Zeitschrift: Bulletin technique de la Suisse romande

Band: 73 (1947)

Heft: 10

Artikel: Etude des propriétés d'un réglage automatique: essai de synthèse de différentes méthodes de calcul: application au réglage de vitesse d'un groupe hydro-électrique (suite)

Autor: Cuénod, Michel

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-55132

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 16.08.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

73e année 10 mai 1947 N° 10

BULLETIN TECHNIQUE
DE LA SUISSE ROMANDE

Paraissant tous les 15 jours

ABONNEMENTS :
Suisse : 1 an, 20 francs
Etranger : 25 francs
Pour sociétaires :
Suisse : 1 an, 17 francs
Etranger : 22 francs
Prix du numéro :
1 Fr. 25
Pour les abonnements s'adresser à la librairie F. Rouge & Cie, à Lausanne.

Organe de la Société suisse des ingénieurs et des architectes, des Sociétés vaudoise et genevoise des ingénieurs et des architectes, de l'Association des anciens élèves de l'Ecole polytechnique de l'Université de Lausanne et des Groupes romands des anciens élèves de l'Ecole polytechnique fédérale.

COMITÉ DE PATRONAGE. — Président : R. Neeser, ingénieur, à Genève ; Vice-président : G. Epitaux, architecte, à Lausanne ; secrétaire : J. Calame, ingénieur, à Genève. Membres : *Fribourg :* MM. L. Hertling, architecte ; P. Joye, professeur ; *Vaud :* MM. F. Chenaux, ingénieur ; E. Elskes, ingénieur ; E. d'Okolski, architecte ; A. Paris, ingénieur ; Ch. Thévenaz, architecte ; *Genève :* MM. L. Archinard, ingénieur ; E. Martin, architecte ; E. Odier, architecte ; *Neuchâtel :* MM. J. Béguin, architecte ; G. Furter, ingénieur ; R. Guye, ingénieur ; *Valais :* M. J. Dubuis, ingénieur ; A. de Kalbermatten, architecte.

Rédaction : D. Bonnard, ingénieur, Case postale Chauderon 475, Lausanne.

Publicité :
TARIF DES ANNONCES
Le millimètre (larg. 47 mm.) 20 cts.
Réclames : 60 cts. le mm. (largeur 95 mm.)
Rabais pour annonces répétées.

ANNONCES-SUISSES S.A.
5, rue Centrale Tél. 2.33.26
LAUSANNE
& Succursales.

CONSEIL D'ADMINISTRATION DE LA SOCIÉTÉ ANONYME DU BULLETIN TECHNIQUE
A. Stucky, ingénieur, président ; M. Bridel ; G. Epitaux, architecte ; R. Neeser, ingénieur.

SOMMAIRE : *Etude des propriétés d'un réglage automatique. Essai de synthèse de différentes méthodes de calcul. Application au réglage de vitesse d'un groupe hydro-électrique*, par Michel Cuénod, ingénieur à la S. A. Brown-Boveri (suite). — *Courbes de raccordement*, par L. Vuagnat, ingénieur au 1er arrondissement des Chemins de fer fédéraux. — Bibliographie. — Divers : *Congrès technique français.* — Société suisse des ingénieurs et des architectes : *Groupe des Ponts et Charpentes ; Bureau pour la reconstruction.* — Société vaudoise des ingénieurs et des architectes (Section S. I. A.) : *Assemblée générale extraordinaire.* — Service de placement.

Etude des propriétés d'un réglage automatique.

Essai de synthèse de différentes méthodes de calcul. Application au réglage de vitesse d'un groupe hydro-électrique,

par Michel CUÉNOD, ingénieur à la S. A. Brown-Boveri.

(Suite.)[1] C.D. 621.3.016.3

IV. Relations et comparaisons entre les différentes méthodes.

L'exemple élémentaire choisi ne permettait pas de juger des avantages des méthodes de Nyquist et de Küpfmüller par rapport à la méthode classique ; nous souhaitons qu'il en ait montré le principe et qu'il ait permis d'en apprécier les particularités :

a) La méthode de *Hurwitz* complétée par celle de *Leonhard* s'impose chaque fois que le réglage est simple et qu'il a été possible d'établir les équations différentielles de tous les chaînons du circuit de réglage. L'inconvénient de cette méthode est de faire défaut au moment où elle serait la plus utile, car pour les cas trop simples, le calcul n'est pas nécessaire, la simple intuition doublée de bon sens suffit.

b) La méthode de *Küpfmüller*, sous forme opérationnelle est avantageuse lorsqu'on connaît les courbes de réponse de chacun des organes de réglage ; ces courbes de réponse sont relativement faciles à relever pour des phénomènes rapides à l'aide d'un oscillographe cathodique et pour des phénomènes lents, à l'aide d'une mesure au chronomètre ; pour les cas intermédiaires, le relevé d'un phénomène transitoire peut offrir certaines difficultés ; il est aussi parfois difficile d'obtenir à l'« entrée » d'un chaînon de réglage une fonction impulsive sans sollicitation inadmissible de ses organes mécaniques ; d'autre part, cette méthode ne donne aucun renseignement immédiat sur la stabilité du réglage, mais nécessite pour l'application de la formule de Heaviside la résolution d'une équation qui peut être d'un degré élevé.

c) La méthode de *Nyquist* ne nécessite par contre aucun calcul ; cependant, le relevé des courbes d'allure demande des essais qui peuvent être très longs, puisqu'il faut relever la courbe point par point, voire pratiquement irréalisables lorsqu'il s'agit de relever par exemple la courbe d'allure de tout un réseau électrique. D'autre part, la méthode de Nyquist ne donne aucune indication immédiate sur le comportement de la grandeur à régler en fonction du temps ni sur son écart maximum.

Loin de se faire concurrence, ces trois méthodes se complètent et il semble qu'il y a tout intérêt à pouvoir les combiner selon les moyens dont on dispose pour « ausculter » le réglage et le but que l'on se propose.

La formule clef qui permet de passer d'une méthode à l'autre est la *transformation de Laplace* qui se laisse établir à partir de l'*intégrale de Fourier*.

Soit $\Phi(t)$ une certaine fonction du temps périodique, il est connu qu'elle peut être décomposée dans ses composants harmoniques à l'aide de la formule suivante :

[1] Voir *Bulletin technique* du 26 avril 1947, p. 105.

$$\Phi(t) = \sum_{-\infty}^{+\infty} c_\zeta e^{j\zeta t} \quad \text{avec} \quad c_k = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2T} e^{-jkt}\Phi(t)\,dt.$$

Nous supposons que $\Phi(t)$ est une fonction quelconque apériodique ; cela revient à dire que sa période s'étend de 0 à $+\infty$. La somme prend la forme d'une intégrale avec ζ comme variable d'intégration. Cette variable ζ représente la pulsation des différentes composantes harmoniques de $\Phi(t)$. Il en résulte :

$$\Phi(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{j\zeta t}\,d\zeta\,\frac{1}{2\pi}\int_0^{\infty} e^{-j\zeta t}\,\Phi(t)\,dt.$$

Nous multiplions et divisons par $j\zeta$ et obtenons

$$\boxed{\begin{aligned} \Phi(t) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{J(j\zeta)}{j\zeta}\,e^{j\zeta t}\,d\zeta = \text{courbe de réponse} \\ J(j\zeta) &= j\zeta\int_0^{\infty}\Phi(t)\,e^{-j\zeta t}\,dt = \text{courbe d'allure} \end{aligned}}$$

ou exprimé différemment :

$$\Phi(t) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{R_e(J)}{\zeta}\sin\zeta t\,d\zeta = \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{J_m(J)}{\zeta}\cos\zeta t\,d\zeta$$

$$J(j\zeta) = \zeta\int_0^{\infty}\Phi(t)\sin\zeta t\,dt + j\zeta\int_0^{\infty}\Phi(t)\cos\zeta t\,d\zeta.$$

La résolution directe de ces intégrales conduirait à des calculs compliqués. Pratiquement, il existe deux façons de contourner cette difficulté :

a) *A l'aide de l'analysateur harmonique.*

Cet appareil permet de réaliser graphiquement l'intégration des coefficients de Fourier a_n et b_n

$$a_n = \frac{1}{T}\int_0^{T} f(t)\cos\left(2\pi n\,\frac{t}{T}\right)dt$$

$$b_n = \frac{1}{T}\int_0^{T} f(t)\sin\left(2\pi n\,\frac{t}{T}\right)dt.$$

Par analogie avec les transformations de Laplace, il est facile de déduire comment la courbe peut se déterminer par intégration graphique de la courbe de réponse et vice versa ; cette méthode permet en particulier de construire point par point à partir de la courbe d'allure du réglage fermé la courbe de réponse Φ_R décrivant les variations de la grandeur à régler à la suite d'une perturbation sur le dispositif de réglage.

b) *A l'aide des tables de transformation du calcul opérationnel.*

Si l'on remplace $j\zeta$ par p dans la transformation de Laplace définie ci-dessus, on retrouve les formules de base du calcul opérationnel dont le résultat a été condensé dans des formulaires [1]. Lorsqu'une courbe de réponse a été relevée, il faut en chercher l'expression en fonction du temps, ce qui conduit à un polynôme en puissance ou en exponentielle de t ; grâce aux tabelles de transformation, il faut en calculer l'expression sous forme opérationnelle, dans laquelle il suffit de remplacer l'opérateur p par $j\zeta$ pour obtenir la courbe d'allure correspondante. En remplaçant p par $\frac{d}{dt}$ nous déduisons l'équation différentielle. Suivant les genres de réglage et les moyens dont on dispose, il est commode de pouvoir choisir le mode d'auscultation le plus avantageux pour chaque organe de réglage et d'en combiner ensuite les résultats. Il est possible par exemple d'envisager les combinaisons suivantes :

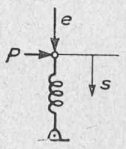
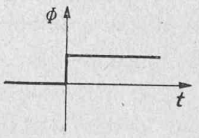
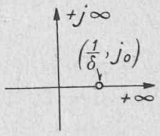
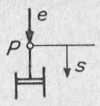
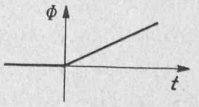
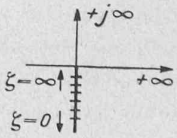
Etablissement des équations différentielles pour certains éléments de la chaîne de réglage, relever des courbes de réponse pour les autres ; détermination de la fonction de transfert du réglage sous forme opérationnelle, application du critère de Hurwitz ou de Leonhard au dénominateur de cette fonction.

Relever des courbes de réponse de certains éléments, déduction des courbes d'allures, applications du critère de Nyquist.

Les équations différentielles, fonction de transfert sous forme opérationnelle, courbe de réponse et courbe d'allure les plus caractéristiques ont été réunis dans le tableau suivant :

Tableau des caractéristiques dynamiques les plus courantes.

e = grandeur à *l'entrée* du dispositif (force agissant sur le point P).
s = grandeur à *la sortie* du dispositif (course du point P).

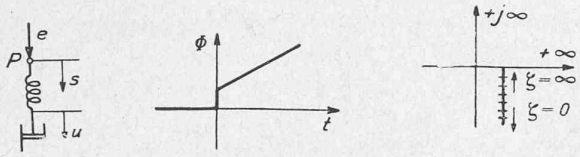
Modèle mécanique équation différentielle.	*Courbe de réponse* [2] fonction de transfert sous forme opérationnelle.	*Courbe d'allure* [3] (représentée dans le plan complexe).
Dispositif purement statique.		
		
$e = \delta s$ δ = statisme	$\Phi(t) = \frac{1}{\delta} = \varphi(p)$	$J = \frac{1}{\delta}, j_0$
Dispositif astatique avec amortissement.		
		
$e = k\,\frac{ds}{dt}$	$\Phi = \frac{t}{k}\ \varphi = \frac{1}{kp}$	$J = \frac{1}{kj\zeta}$

[1] Par ex., *Mémorial des sciences mathématiques*, Fascicule C, formulaire pour le calcul symbolique, Mc Lachlan, Pierre Humbert.

[2] La courbe de réponse de la fonction de transfert s'obtient en faisant brusquement varier la grandeur d'entrée d'un organe de réglage et en relevant les variations de sa grandeur de sortie.

[3] La courbe d'allure à fréquence variable de la fonction de transfert s'obtient en faisant varier selon une oscillation harmonique la grandeur d'entrée et en mesurant la phase et l'amplitude de la grandeur de sortie pour différentes fréquences d'oscillation.

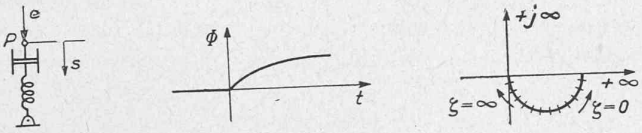
Dispositif astatique avec amortissement et statisme passager.



$$\begin{cases} e - k_1(s-u) = 0 \\ k_1(s-u) - k_2 u = 0 \end{cases} \qquad \Phi = k_1\left(1 + \frac{t}{k_2}\right) \qquad J = k_1\left(1 + \frac{1}{j\zeta k_2}\right)$$

$$\varphi = k_1\left(1 + \frac{1}{pk_2}\right)$$

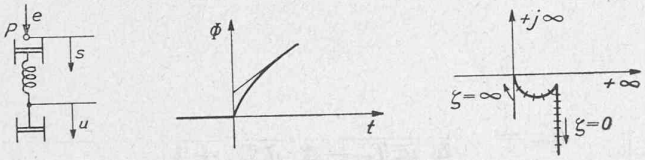
Dispositif statique avec amortissement.



$$e = s + k\frac{ds}{dt} \qquad \Phi = 1 - e^{-\frac{t}{k}} \qquad J = \frac{1}{1 + kj\zeta}$$

$$\varphi = \frac{1}{1 + kp}$$

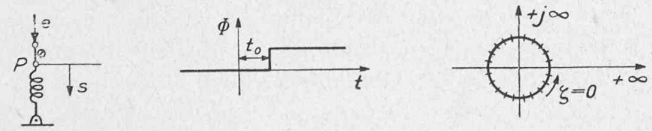
Dispositif astatique avec statisme passager avec amortissement.



$$\begin{cases} e - k_1(s-u) - k_2\frac{ds}{dt} = 0 \\ k_1(s-u) - k_3\frac{du}{dt} = 0 \end{cases} \qquad \Phi = b_1 t + b_2\left(-1 e^{-\beta t}\right) \qquad J = \frac{j\zeta c_1 + 1}{(j\zeta)^2 c_2 + j\zeta c_3}$$

$$\varphi = \frac{pc_1 + 1}{p^2 c_2 + pc_3}$$

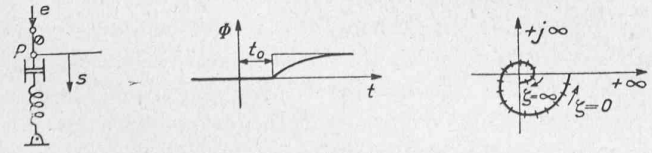
Dispositif statique avec retard.



$$e(t - t_o) = \delta s \qquad \Phi = 0 \quad t < t_o \quad \Phi = \frac{1}{\delta} \quad t > t_o \qquad J = \frac{e^{-j\zeta t_o}}{\delta}$$

$$\varphi = \frac{e^{-pt_o}}{\delta}$$

Dispositif statique avec retard et amortissement.

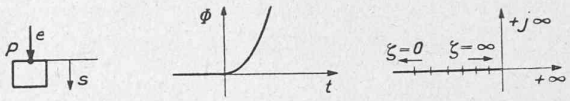


$$e(t - t_o) = s + k\frac{ds}{dt} \qquad \Phi = 0 \quad (t < t_o) \qquad J = \frac{e^{-j\zeta t_o}}{1 + kj\zeta}$$

$$\Phi = 1 - e^{-\frac{t - t_o}{k}}$$

$$\Phi = \frac{e^{-pt_o}}{1 + kp}$$

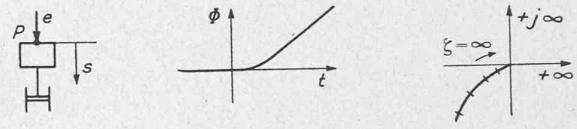
Dispositif astatique avec masse.



$$e = m\frac{d^2 s}{dt^2} \qquad \Phi = \frac{t^2}{2m} \qquad J = \frac{1}{m\zeta^2}$$

$$\varphi = \frac{1}{p^2 m}$$

Dispositif astatique avec masse et amortissement.

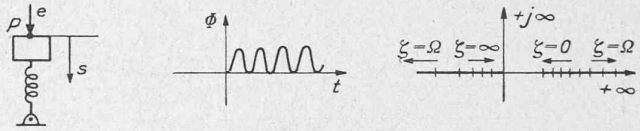


$$e = m\frac{d^2 a}{dt^2} + k\frac{da}{dt} \qquad \Phi = \frac{1}{m}\left(\frac{t}{\alpha} - \frac{1}{\alpha^2}(1 - e^{-\alpha t})\right) \qquad J = \frac{1}{j\zeta k - \zeta^2 m}$$

$$\alpha = \frac{k}{m}$$

$$\varphi = \frac{1}{p^2 m + pk}$$

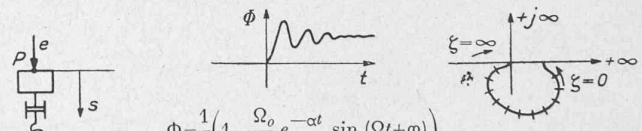
Dispositif statique avec masse.



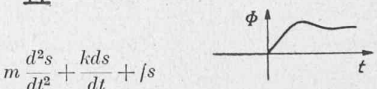
$$e = m\frac{d^2 s}{dt^2} + fs \qquad \Phi = \frac{1}{f}(1 - \cos \Omega t) \qquad J = \frac{2}{m(\Omega^2 - \zeta^2)}$$

$$\varphi = \frac{1}{m}\frac{1}{p^2 + \Omega^2} \qquad \Omega = \sqrt{\frac{f}{m}}$$

Dispositif statique avec masse et amortissement.



$$\Phi = \frac{1}{f}\left(1 - \frac{\Omega_o}{\Omega} e^{-\alpha t} \sin(\Omega t + \varphi)\right) \qquad J = \frac{1}{m(\Omega_o^2 - \zeta^2) + j2\alpha\zeta}$$



$$e = m\frac{d^2 s}{dt^2} + \frac{kds}{dt} + fs \qquad \alpha = \frac{k}{2m} \qquad \Omega_o^2 = \frac{f}{m}$$

$$\Phi = \frac{1}{f}\left(1 - e^{-\alpha t}(1 + \alpha t)\right) \qquad \Omega^2 = \Omega_o^2 - \alpha^2$$

$$\varphi = \frac{1}{m(p^2 + 2\alpha p + \Omega_o^2)} \qquad \operatorname{tg} \varphi = \frac{\Omega^2}{\alpha}$$

V. Application des méthodes de Küpfmüller et de Nyquist à quelques cas particuliers.

1. *Réglage d'un groupe en marche individuelle avec régulateur amorti.*

a) *Détermination des conditions de stabilité.*

Nous établirons la courbe d'allure du réglage ouvert :

$$J_{\nu\nu} = J_{\nu\rho} \cdot J_{\rho\mu} \cdot J_{\mu\nu} = -\frac{1}{\delta(j\zeta T_r + 1)} \cdot \frac{1}{jT_s + 1} \cdot \frac{1}{j\zeta T_a}$$

Il est facile de prouver que la courbe d'allure coupe le demi-axe réel positif pour une valeur plus petite que 1 lorsque l'inégalité suivante est remplie :

$$\frac{T_r T_s}{T_r + T_s} < \delta T_a .$$

La figure 18 exprime graphiquement cette inégalité et confirme ce que l'on présume intuitivement, à savoir qu'un réglage est stable tant qu'il n'y a que deux constantes de temps des organes de réglage qui sont du même ordre de grandeur et devient instable dès qu'il y en a trois.

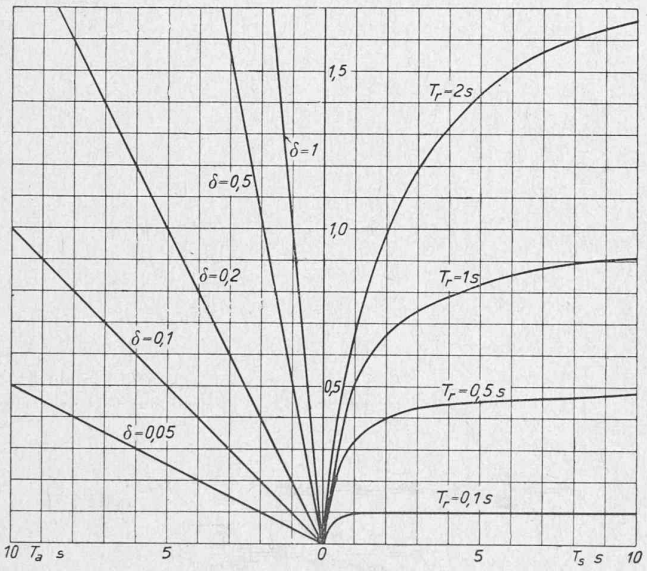


Fig. 18. — Condition de stabilité d'un groupe en marche individuelle avec régulateur amorti.

Ainsi pour $T_a = 5$ sec, $T_s = 1$ sec et $\delta = 5$ %.
Le réglage est stable pour $T_r \leqq 0{,}1$ sec
instable pour $T_r \geqq 0{,}4$ sec.

Ce qui est confirmé par les courbes 2 des figures 16 et 17, établies pour $T_r = 0{,}4$ sec. Le point $(+1, jo)$ est entouré, donc le réglage est instable. Ces considérations prouvent l'importance d'une régulation rapide pour la stabilité d'un réglage et permettent d'apprécier quantitativement quelle est la vitesse de réglage qu'il faut exiger.

b) *Détermination des variations de vitesse résultant d'une perturbation.*

Nous établissons la fonction de transfert du réglage fermé sous forme opérationnelle

$$\varphi_R = \frac{\varphi_{\sigma\nu}}{1 - \varphi_{r\nu}\,\varphi_{\rho\mu}\,\varphi_{\mu\nu}} = \frac{\dfrac{1}{pT_a}}{1 + \dfrac{1}{\delta}\cdot\dfrac{1}{pT_r+1}\cdot\dfrac{1}{pT_s+1}\cdot\dfrac{1}{pT_a}}$$

$$\varphi_R = \frac{\delta\,(p^2 T_r T_s + p\,(T_r + T_s) + 1)}{\delta p^3 T_r T_s T_a + \delta p^2 T_a (T_r + T_s) + \delta p T_a + 1}$$

L'application de la formule de Heaviside permet de déterminer la courbe de réponse du réglage fermé $\Phi_R(t)$.

$$\Phi_R(t) = \delta + \sum_{p_1 p_2 p_3} \frac{(p^2 T_r T_s + p\,(T_r + T_s) + 1)\,e^{pt}}{3\,p^3 T_r T_s T_a + 2p^2 T_a (T_r + T_s) + p\,T_a}$$

avec p_1, p_2, p_3 racines de l'équation

$$Z(p) = \delta p^3 T_r T_s T_a + p^2 \delta\, T_a (T_r + T_s) + \delta\, p\, T_a + 1 = 0.$$

2. *Réglage d'un groupe en marche en parallèle avec régulateur amorti.*

Pour déterminer les conditions de stabilité, nous établissons la courbe d'allure du réglage ouvert en faisant le produit des courbes d'allure partielles. Nous avons établi la courbe d'allure $J_{\mu\nu}$ du groupe sans amortissement $= \dfrac{j\zeta}{T_a(\Omega^2 - \zeta^2)}$.

Il est facile de prouver que le réglage d'un tel groupe serait instable. Nous devons tenir compte de la constante d'amortissement T_g du groupe, ce qui donne le résultat suivant :

Courbe de réponse $\Phi_{\mu\nu} = \dfrac{e^{-\frac{t}{T_g}} \sin \Omega t}{\Omega\, T_a}$ (v. courbe 3, fig. 6).

Courbe d'allure $J_{\mu\nu} = \dfrac{j\zeta}{T_a\left(\Omega^2 - \zeta^2 + \dfrac{2j\zeta}{T_g}\right)}$ (v. courbe 3, fig. 7).

Il en résulte :

$$J_{\nu\nu} = -\frac{1}{\delta}\cdot\frac{1}{j\zeta T_r + 1}\cdot\frac{1}{j\zeta T_s + 1}\cdot\frac{j\zeta}{T_a\left(\Omega^2 - \zeta^2 + \dfrac{2j\zeta}{T_g}\right)}.$$

Cette courbe d'allure est représentée par la courbe 4 de la figure 16 sous forme vectorielle, par la courbe 4 de la fig. 17 sous forme cartésienne

avec : $T_a = 5$ sec, $T_s = 1$ sec, $T_r = 0{,}4$ sec,
$T_g = 1$ sec, $\delta = 5$ %, $\Omega = 10{,}45$ 1/sec.

Ces courbes prouvent l'influence stabilisante de la marche en parallèle à condition que la fréquence propre du générateur soit suffisamment élevée et qu'il soit lui-même suffisamment amorti.

Si par contre la fréquence propre du générateur tombe en résonance avec celle du réglage, un générateur stable en marche individuelle peut devenir instable en marche en parallèle.

3. *Réglage d'un groupe en marche individuelle avec retard.*

Il se peut qu'un retard soit introduit dans le circuit de réglage. Intuitivement, on se rend compte que ce retard est très défavorable pour la stabilité du réglage.

La méthode classique de Hurwitz ne permet pas d'en tenir compte ; par contre, les méthodes modernes donnent la possibilité de juger quantitativement de son influence néfaste.

La « loi de déplacement dans le domaine temps » du calcul opérationnel énonce qu'« un déplacement de l'origine de temps d'une valeur $-t_0$ dans la fonction

temps correspond au produit par le facteur e^{-pt_0} de la fonction opérateur. Ces retards peuvent être dus à une certaine insensibilité des organes de réglage. Ils se répartissent sur tout le circuit de réglage, mais pour le calcul, nous admettons un régulateur et une transmission infiniment rapide et tout le retard provoqué uniquement par l'action du servomoteur, ainsi à la courbe de réponse $\Phi_{\rho\mu}$ représentée par la courbe 2 de la figure 4

$$\Phi_{\rho\mu} = 1 - e^{\frac{(t-t_0)}{T_s}}\Big|_{t \geq t_0}$$

correspond la fonction de transfert suivante sous forme opérationnelle

$$\varphi_{\rho\mu} = \frac{e^{-pt_0}}{1 + pT_s}$$

et la courbe d'allure suivante représentée par la courbe 2 de la figure 5

$$J_{\rho\mu} = \frac{e^{-j\zeta t_0}}{1 + j\zeta T_s}$$

Les courbes 3 des figures 16 et 17 donnent une représentation vectorielle et cartésienne de la courbe d'allure du réglage ouvert

$$J_{vv} = \frac{1}{\delta} \cdot \frac{e^{-j\zeta t_0}}{1 + j\zeta T_s} \cdot \frac{1}{jT_a}$$

et prouve que pour

$\delta = 5\ \%$, $T_a = 5$ sec, $T_s = 1$ sec, $t_0 = 1$ sec, } le réglage est instable.

(A suivre.)

Courbes de raccordement

par L. VUAGNAT, ingénieur
au Ier arrondissement des Chemins de fer fédéraux.

CD 625.113

Au début de l'ère des chemins de fer, dès que la vitesse s'éleva tant soit peu, il ne fut plus possible de maintenir les courbes dans le même plan que les alignements.

Les constructeurs furent amenés pour équilibrer la force centrifuge à donner du dévers à la voie en élevant la file de rail extérieure. Pour rattraper la différence de niveau, ils insérèrent une « rampe de surhaussement » entre l'alignement et la courbe. Primitivement cette rampe fut entièrement placée dans l'alignement, puis moitié dans l'alignement et moitié dans la courbe. Puis la voie fut ripée légèrement vers le centre de la courbe de chaque côté du point de tangence, sur quelques longueurs de rail, ce qui correspondait vaguement à une courbe de raccordement. Le succès de l'opération dépendait de l'habileté et du coup d'œil du chef d'équipe.

Ce furent Chavès et Nördling, ingénieurs à la Compagnie du Nord, qui, en 1865 et 1867, firent connaître l'emploi de la parabole cubique

$$y = Bx^3$$

comme courbe de raccordement, en démontrant que la rampe de surhaussement rectiligne exige une courbe de raccordement dont la courbure croisse proportionnellement à la longueur de l'arc et que la parabole cubique répondait à peu près à cette condition. Nördling donna en même temps une méthode de piquetage pratique et simple qui fut employée jusqu'à ces dernières années.

C'est donc de l'étude de la rampe de surhaussement et de l'adaptation de la courbure de la voie au dévers qu'est née la courbe de raccordement.

Dans les lignes qui vont suivre, nous allons refaire rapidement cette étude en donnant les formules exactes, d'abord en prenant une droite comme rampe de surhaussement, puis une courbe analytique pour généraliser le problème et arriver à une solution plus satisfaisante, tant au point de vue dynamique qu'au point de vue géométrique, pour l'établissement de la voie même.

Rappelons tout d'abord la formule du dévers.

Pour une courbe de rayon fixe R et pour une vitesse de translation V, le dévers est donné par la formule connue

$$h = d_{max} = \frac{kV^2}{R} \qquad (1)$$

où k est un coefficient qui varie suivant que V est donné en m/sec ou en km/h. Il varie également si l'on veut avoir le dévers théorique, c'est-à-dire qui équilibre complètement la force centrifuge, ou pratique, c'est-à-dire si l'on admet qu'une fraction de la force centrifuge ne soit pas compensée. (Pour ne pas alourdir cet exposé, nous ne démontrerons pas cette formule.)

Pour une courbe de rayon variable ρ nous aurons

$$d = \frac{kV^2}{\rho} \qquad (2)$$

Pour simplifier, nous supposerons que le dévers s'obtient en élevant la file extérieure de rail et non pas comme le prescrit le règlement C. F. F., moitié en abaissant la file intérieure, moitié en élevant la file extérieure.

1. Courbe de raccordement avec rampe de surhaussement rectiligne.

Nous avons

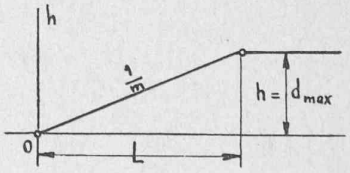
$$\frac{1}{m} = \frac{h}{L} \quad (3) \qquad d = \frac{1}{m}s = \frac{kV^2}{\rho} = \frac{h}{L}s \quad (4) \qquad /h = \frac{kV^2}{R} \quad (5)$$

d'où nous tirons

$$\frac{1}{\rho} = \frac{1}{RL}s = sc \qquad (6)$$

si nous faisons

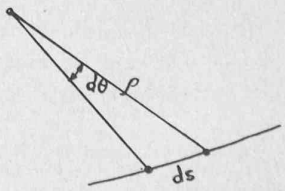
$$c = \frac{1}{RL} \qquad (7)$$



Soit $d\theta$ l'angle compris entre deux rayons de courbure infiniment voisins :

$$\rho d\theta = ds = \frac{d\theta}{cs} \qquad (8)$$

$$d\theta = csds \qquad (9)$$

En intégrant il vient

$$\theta = \frac{c}{2}s^2 \qquad (10)$$