

Zeitschrift: Bulletin technique de la Suisse romande
Band: 73 (1947)
Heft: 21

Artikel: Contribution au problème linéaire de flexion d'une plaque élastique
Autor: Bolle, L.
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-55151>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 26.01.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

BULLETIN TECHNIQUE DE LA SUISSE ROMANDE

ABONNEMENTS :

Suisse : 1 an, 20 francs
Etranger : 25 francs

Pour sociétaires :
Suisse : 1 an, 17 francs
Etranger : 22 francs

Prix du numéro :
1 Fr. 25

Pour les abonnements
s'adresser à la librairie
F. Rouge & Cie, à Lausanne.

Paraisant tous les 15 jours

Organe de la Société suisse des ingénieurs et des architectes, des Sociétés vaudoise et genevoise des ingénieurs et des architectes, de l'Association des anciens élèves de l'Ecole polytechnique de l'Université de Lausanne et des Groupes romands des anciens élèves de l'Ecole polytechnique fédérale.

COMITÉ DE PATRONAGE. — Président : R. NEESER, ingénieur, à Genève ; Vice-président : G. EPITAUX, architecte, à Lausanne ; secrétaire : J. CALAME, ingénieur, à Genève. Membres : *Fribourg* : MM. L. HERTLING, architecte ; P. JOYE, professeur ; *Vaud* : MM. F. CHENAUX, ingénieur ; † E. ELSKES, ingénieur ; E. D'OKOLSKI, architecte ; A. PARIS, ingénieur ; *Ch. THÉVENAZ*, architecte ; *Genève* : MM. L. ARCHINARD, ingénieur ; E. MARTIN, architecte ; E. ODIER, architecte ; *Neuchâtel* : MM. J. BÉGUIN, architecte ; G. FURTER, ingénieur ; R. GUYE, ingénieur ; *Valais* : M. J. DUBUIS, ingénieur ; D. BURGNER, architecte.

RÉDACTION : D. BONNARD, ingénieur, Case postale Chauderon 475, LAUSANNE.

CONSEIL D'ADMINISTRATION DE LA SOCIÉTÉ ANONYME DU BULLETIN TECHNIQUE

A. STUCKY, ingénieur, président ; M. BRIDEL ; G. EPITAUX, architecte ; R. NEESER, ingénieur.

SOMMAIRE : Contribution au problème linéaire de flexion d'une plaque élastique, par L. BOLLE, professeur à l'Ecole polytechnique de l'Université de Lausanne. — DIVERS : Energie atomique et économie électrique. — Considérations à propos de la situation actuelle de l'économie électrique suisse. — NÉCROLOGIE : Edouard Elskes, ingénieur. — LES CONGRÈS : Conférence technique mondiale (C. M. T.) — 1^{er} Congrès de l'Union internationale des architectes. — BIBLIOGRAPHIE. — Société vaudoise des ingénieurs et des architectes. — SERVICE DE PLACEMENT.

Contribution au problème linéaire de flexion d'une plaque élastique¹,

par L. BOLLE, professeur à l'Ecole polytechnique
de l'Université de Lausanne.

624.073.1

§ 1. Introduction.

Le problème de flexion d'une plaque élastique a retenu l'attention des physiciens plus longtemps que toute autre question d'élasticité et nous ne saurions retracer ici toutes les étapes de sa résolution. Cependant, comme notre étude se rapporte à une question qui fut autrefois abondamment discutée, nous croyons utile de l'introduire par un bref exposé historique susceptible de trouver ici peut-être plus d'intérêt que nos développements mathématiques.

Le déplacement élastique du feuillet moyen d'une plaque est régi par une équation aux dérivées partielles du quatrième ordre trouvée en 1813 sans démonstration dans les papiers de Lagrange. Ce dernier y était arrivé en examinant en 1811 la tentative faite par Sophie Germain d'étendre aux plaques la méthode analytique qui avait permis d'exprimer l'équilibre de simples fils et lames élastiques.

¹ Une partie des développements mathématiques du présent article a fait l'objet en septembre 1946 d'une communication au *Sixième congrès international de Mécanique appliquée*, à Paris. Depuis cette date, nous avons eu connaissance de diverses publications récentes dont deux antérieures au Congrès, publications dans lesquelles le prof. E. REISSNER traite la même question au moyen du calcul des variations. Le fait que nos deux résultats, obtenus par des voies totalement différentes, coïncident d'une façon aussi remarquable est propre à faire croire à leur exactitude même à défaut d'une vérification expérimentale (E. REISSNER 1. *On the theory of Bending of elastic plates*. J. of Math. a. Phys.) ; 2. *The Effect of Transverse-Shear Deformation on the bending of elastic plates*. J. of App. Mechanics, Juin 1945.

Partant des équations de l'élasticité et admettant que les fonctions entrant en jeu étaient toutes développables suivant les puissances de la distance au feuillet moyen, Poisson donnait dans son mémoire de 1828¹ une démonstration de l'équation de Lagrange et associait à cette équation trois conditions limites qui devaient permettre de choisir arbitrairement les efforts de torsion, de flexion et de cisaillement agissant sur le contour de la plaque.

Mais en 1850, Kirchhoff² montrait qu'on ne pouvait en général satisfaire simultanément à ces trois conditions limites et que l'une d'elles était par conséquent surabondante. Sa méthode reposait sur deux hypothèses : 1. Toute droite primitivement normale au feuillet moyen reste après déformation droite et normale à la surface élastique. 2. Les éléments du feuillet moyen ne subissent aucune dilatation. Grâce à ces deux hypothèses Kirchhoff parvenait à exprimer l'énergie potentielle de la plaque en fonction des courbures de la surface élastique puis à déduire du principe des travaux virtuels l'équation de Lagrange avec deux conditions limites seulement.

Le nombre de ces conditions aux limites opposa ainsi les théories de Poisson et de Kirchhoff jusqu'au jour où Kelvin et Tait réussirent à les « réconcilier ». Ces auteurs³ montrèrent qu'on pouvait passer des conditions apparemment surabondantes de Poisson à celles

¹ « Mémoire sur l'équilibre et le mouvement des corps élastiques », E. VIII du Mem. de l'Ac. des Sc.

² Über Gleichgewicht und Bewegung einer elastischen Scheibe. Journal de Crelle.

³ Nat. Phil., 1867.

Publicité :
TARIF DES ANNONCES

Le millimètre
(larg. 47 mm.) 20 cts.

Réclames : 60 cts. le mm.
(largeur 95 mm.)

Rabais pour annonces
répétées.



ANNONCES-SUISSES S.A.
5, rue Centrale Tél. 2.33.26
LAUSANNE
& Succursales.

juste suffisantes de Kirchhoff, en modifiant simplement la distribution des actions exercées sur le bord de la plaque. Les forces tangentielles, parallèles au feuillet moyen et équivalentes au moment de torsion (fig. 1a), pouvaient en effet être remplacées, sur chaque élément du cylindre contournant, par un couple statiquement équivalent de deux forces perpendiculaires à ce même feuillet et agissant suivant les génératrices limites de l'élément (fig. 1b). Répétant cette opération sur tout le pourtour on obtenait ainsi sur chaque génératrice deux forces opposées réductibles elles-mêmes à leur différence (fig. 1c) proportionnelle à la dérivée du couple de torsion prise le long du contour. Grâce à cet artifice on substituait au couple de torsion un effort tranchant fictif qu'il suffisait de fondre dans celui réellement appliqué pour n'avoir plus à considérer sur le bord que les deux conditions limites de Kirchhoff. Kelvin et Tait montrèrent de plus que ce regroupement des charges n'était susceptible de modifier leur effet élastique que dans une région toute voisine du bord et ne dépassant guère en largeur le double de l'épaisseur de la plaque.

Si du point de vue pratique ces résultats consacraient définitivement la théorie de Kirchhoff ils ne montraient pas en quoi Poisson s'était trompé lorsqu'il écrivait trois conditions limites quand deux devaient suffire.

Cherchant à élucider cette question Boussinesq retrouvait dans son mémoire de 1871¹ l'artifice qui avait permis à Kelvin et Tait de passer des conditions de Poisson à celles de Kirchhoff et concluait en disant : « Poisson ayant négligé de remplacer les couples de torsion par des efforts tranchants équivalents et de fondre leur effet dans celui de l'effort tranchant réellement appliqué, avait regardé ces couples comme représentant un mode d'action distinct, ce qui lui avait donné une condition de trop. » Se refusant à admettre une telle conclusion, Maurice Lévy reprit toute la question dans son grand mémoire sur la théorie des plaques élastiques planes². « On admettra difficilement, dit-il, que dans un problème on puisse arriver à un résultat différent, suivant qu'on aura ou non remplacé un couple par un couple statiquement équivalent, si toutefois cette substitution est permise ; un artifice, quel qu'il soit on le comprend, peut faciliter la solution d'un problème mais non la modifier ; s'il la modifie on peut affirmer d'avance qu'il est illégitime et c'est ce qui a lieu ici. » Puis il montre comment on peut satisfaire aux trois conditions de Poisson en superposant à la déformation caractérisée par les déplacements élastiques du feuillet moyen, seule déformation envisagée aussi bien par Poisson que par Kirchhoff, une déformation nouvelle, satisfaisant rigoureusement dans un cylindre d'épaisseur quelconque aux équations générales de l'élasticité, et dans laquelle les points du feuillet moyen restaient immobiles.

Une vive polémique s'engagea alors entre Boussinesq

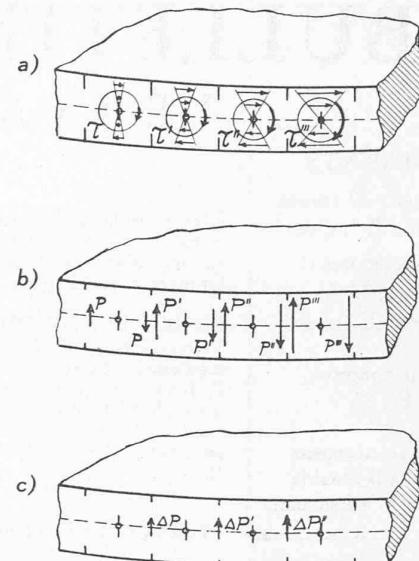


Fig. 1. — Remplacement de l'effort de torsion réellement appliqué sur le bord d'une plaque par un effort tranchant fictif statiquement équivalent.

et M. Lévy, polémique dont le diapason vous est donné par cette seule phrase tirée des Comptes Rendus de l'Académie, 1878 : « L'effort tranchant, le couple de torsion et le couple de flexion, auxquels M. Lévy réduit, sans le moindre essai de démonstration, toutes les actions extérieures, sont en eux-mêmes des fictions qu'il aurait dû discuter avant de s'en servir ».

Saint-Venant rend compte de cette controverse dans sa traduction de l'ouvrage de Clebsch. Après avoir analysé le mémoire de M. Lévy « qui offre dans plusieurs parties de bons modèles de recherches, quoique le sens du concret y fasse quelquefois défaut et qui aura tout au moins provoqué une utile controverse », Saint-Venant conclut en disant qu'il n'y a point lieu, dans les problèmes des plaques minces, de tenir compte des termes ajoutés par M. Lévy à la solution connue, dans le but de se donner une arbitraire de plus pour pouvoir satisfaire séparément aux trois conditions de Poisson.

Un tel jugement, ajouté au fait qu'une réduction du nombre des conditions limites équivale à une notable simplification des calculs, explique aisément pourquoi la théorie de Kirchhoff resta dès lors seule appliquée

* * *

Si ce bref historique suffit à introduire notre étude, il semble malheureusement suffire aussi à la condamner puisque nous retrouvons dans notre solution générale précisément les termes introduits par M. Lévy.

Cependant on pourrait se demander si Boussinesq et Saint-Venant n'auraient pas tous deux accordé plus de considération à ces termes négligeables si M. Lévy les avait obtenus tout naturellement comme des éléments indispensables d'une solution unique déduite des seules hypothèses de la résistance des matériaux ? Quoi qu'il

¹ Journ. des Mathématiques (Liouville).

² Journal de Math. pures et appliquées, 1877, juillet-septembre.

en soit, d'autres raisons justifiaient une nouvelle étude de la question. La théorie de Kirchhoff ne donnait aucune image de l'état élastique au voisinage du bord de la plaque et, de ce fait, ne se prêtait guère à une vérification expérimentale, du moins au degré d'exactitude où les essais d'élasticité sont poussés de nos jours. De plus quelques problèmes aux limites de la théorie des plaques¹ se montraient toujours rebelles à l'analyse et on pouvait se demander si une théorie ne permettant pas de déterminer dans toute l'étendue de la plaque une répartition des contraintes qui correspond exactement aux véritables actions exercées sur le bord était bien propre à résoudre ces questions.

Ayant reconnu que la solution de certaines questions de flexion d'une pièce prismatique ne pouvait satisfaire à toutes les données du problème qu'à la condition de tenir compte de la déformation engendrée par l'effort tranchant², nous avons pensé qu'une introduction analogue de ce même effort dans la théorie des plaques permettrait peut-être de donner une réponse toute naturelle à la question du nombre des conditions aux limites. Cette supposition était d'autant plus plausible que la première hypothèse à la base de la théorie de Kirchhoff excluait à priori l'influence de cet effort.

Nous avons donc remis le problème en équations en ne retenant de cette première hypothèse de Kirchhoff que l'alignement sur une droite des points primitivement situés sur la normale au feuillet moyen mais en laissant cette droite s'incliner par rapport à la surface élastique.

Cette suppression d'une hypothèse restrictive nous a permis de ramener logiquement le problème linéaire de flexion d'une plaque élastique à une question d'analyse à deux dimensions parfaitement définie et dépendant, conformément aux vues de Poisson, de trois conditions limites. En accord aussi avec les vues de Maurice Lévy la solution de ce problème apparaît comme une superposition de deux déformations particulières dépendant l'une du fléchissement de la plaque, l'autre de la rotation dans leur plan des éléments d'un même feuillet.

Sans négliger aucun terme dans les calculs nous avons pu mettre les équations finales sous une forme des plus simples qui en facilite beaucoup l'application. Ces formules parmi lesquelles nous retrouvons évidemment l'équation de Lagrange mais avec un terme de charge légèrement modifié permettent de donner une solution à certains problèmes que la théorie de Kirchhoff ne résolvait pas, et de comparer dans quelques exemples numériques nos résultats avec ceux donnés par cette même théorie.

Enfin dans une dernière partie nous montrons que la solution, donnée par Saint-Venant, au problème de la torsion d'une pièce prismatique, se déduit tout natu-

¹ J. STOCKER: Mathematical problems connected with the bending and buckling of elastic plates. Bull. of the Am. Math. Soc., 1942, pp. 247-261.

² L. BOLLE: Quelques remarques au sujet du rôle de l'effort tranchant en résistance des matériaux. IV^e centenaire de la fondation de l'Université, Lausanne, 1937.

rellement de nos formules si nous y introduisons encore l'influence de charges tangentielles, appliquées aux feuillets superficiels de la plaque, et antisymétriques par rapport au feuillet moyen.

§ 2. Mise en équations du problème.

Soient (fig. 2a) M_0 un point d'une aire plane limitée par un contour fermé, g_0 un segment de longueur h porté par la normale en M_0 et dont le milieu coïncide avec ce point. Nous appellerons plaque élastique d'épaisseur h l'ensemble continu à deux dimensions de tous ces segments ou génératrices g_0 associées aux points de l'aire considérée qui devient le feuillet moyen de la plaque. Donnons à M_0 un petit déplacement M_0M perpendiculaire à l'aire (fig. 2b) et imprimons en même temps à g_0 une légère déviation l'amenant en une position quelconque g ne coïncidant pas nécessairement avec la normale à la surface élastique (M). L'ensemble continu à deux dimensions des génératrices (M/g) définira l'état déformé de la plaque fléchie.

Pour caractériser cet état, il suffit de se donner en fonction des coordonnées x et y les petits déplacements de chaque génératrice, c'est-à-dire la translation w de son point milieu et les deux composantes φ et ψ de sa déviation. La déformation d'un élément de la plaque est alors mesurée :

- 1^o par trois paramètres ϵ_x , ϵ_y et τ_{xy} définissant la déformation d'une section horizontale d'ordonnée z et
- 2^o par deux glissements verticaux mesurant les inclinaisons τ_x , τ_y de la génératrice g par rapport à la normale à la surface élastique (fig. 2b).

Exprimés en fonction des déplacements les paramètres de la déformation s'écrivent

$$\begin{aligned}\epsilon_x &= z \frac{\partial \Phi}{\partial x} & \epsilon_y &= z \frac{\partial \Psi}{\partial y} & \tau_{xy} &= z \left(\frac{\partial \Psi}{\partial x} + \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right) \\ \tau_x &= \varphi + \frac{\partial w}{\partial x} & \tau_y &= \psi + \frac{\partial w}{\partial y}.\end{aligned}$$

La loi de Hooke fait passer de ces paramètres aux efforts unitaires correspondants.

Les moments m_x , m_y et m_{xy} s'écrivent

$$\begin{aligned}m_x &= N \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} + v \frac{\partial \Psi}{\partial y} \right) & m_y &= N \left(\frac{\partial \Psi}{\partial y} + v \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right) \\ m_{xy} &= -\frac{1-v}{2} N \left(\frac{\partial \Psi}{\partial x} + \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right)\end{aligned}$$

où N désigne la rigidité de la plaque et v le rapport de Poisson.

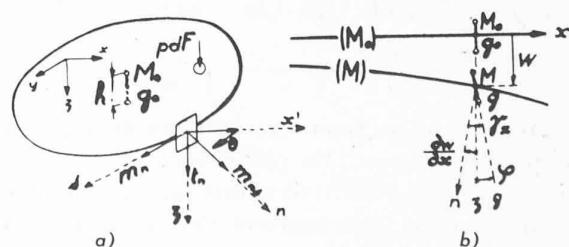


Fig. 2.

Quant aux efforts tranchants nous avons le droit de les lier aux glissements par la formule $t = \frac{Gh}{k} \gamma$ (avec $k = 1,2$) valable pour une poutre à section rectangulaire car dans la déformation engendrée par chacun des efforts t_x et t_y l'élément de la plaque se comporte évidemment comme s'il appartenait à une *poutre de section rectangulaire*.

Avec les formules et désignations

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad N = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \quad \lambda^2 = \frac{10}{h^2}$$

on peut écrire

$$t_x = \frac{(1-\nu)N}{2} \lambda^2 \left(\phi + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \quad t_y = \frac{(1-\nu)N}{2} \lambda^2 \left(\psi + \frac{\partial w}{\partial y} \right).$$

Tous les efforts étant ainsi calculés en fonction des déplacements il reste à exprimer l'équilibre de la plaque.

Celui-ci est régi par les trois équations indéfinies (fig. 3a)

$$\frac{\partial m_n}{\partial x} - \frac{\partial m_{xy}}{\partial y} = t_x \quad \frac{\partial m_y}{\partial y} - \frac{\partial m_{xy}}{\partial x} = t_y \quad \frac{\partial t_x}{\partial x} + \frac{\partial t_y}{\partial y} = -p$$

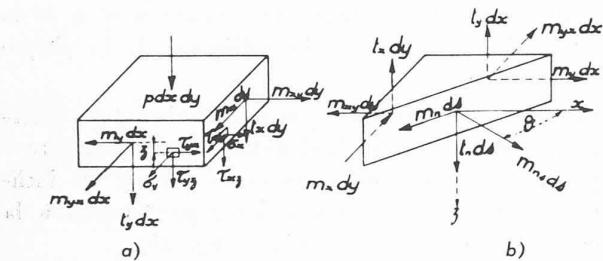


Fig. 3.

auxquelles il faut adjoindre les conditions au contour (fig. 3b)

$$\begin{aligned} \frac{m_x + m_y}{2} + \frac{m_x - m_y}{2} \cos 2\theta - m_{xy} \sin 2\theta &= m_n \\ \frac{m_x - m_y}{2} \sin 2\theta + m_{xy} \cos 2\theta &= m_{ns} \\ t_x \cos \theta + t_y \sin \theta &= t_n. \end{aligned}$$

Remplaçant dans ces équations les efforts par les valeurs trouvées on obtient les équations suivantes en les inconnues w , ϕ et ψ . Tout d'abord un système du sixième ordre

$$\begin{aligned} \frac{2}{1-\nu} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial y} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} - \frac{\partial \phi}{\partial y} \right) &= \lambda^2 \left(\phi + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \\ \frac{2}{1-\nu} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} - \frac{\partial \phi}{\partial y} \right) &= \lambda^2 \left(\psi + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \\ \frac{\partial \phi}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial y} + \Delta w &= -\frac{2}{(1-\nu)\lambda^2} \cdot \frac{p}{N} \end{aligned}$$

puis trois conditions limites susceptibles de se présenter sous plusieurs formes. En particulier :

Si, par exemple, les trois efforts m_n , m_{ns} , t_n sont donnés sur le bord indépendamment des déplacements w , ϕ et ψ , les conditions limites sont statiques et s'écrivent :

$$\begin{aligned} \frac{1+\nu}{1-\nu} \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial y} \right) + \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial y} \right) \cos 2\theta + \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial \phi}{\partial y} \right) \sin 2\theta &= \frac{2m_n}{(1-\nu)N} \\ - \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial y} \right) \sin 2\theta - \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial \phi}{\partial y} \right) \cos 2\theta &= \frac{2m_{ns}}{(1-\nu)N} \\ \phi \cos \theta + \psi \sin \theta + \frac{\partial w}{\partial n} &= \frac{2t_n}{\lambda^2(1-\nu)N}. \end{aligned}$$

Si par contre la plaque est simplement appuyée on aura :

$$w = m_n = m_{ns} = 0$$

et si elle est encastrée on posera

$$w = \phi = \psi = 0.$$

La question est ainsi ramenée à un problème d'analyse à deux dimensions parfaitement défini. (Système du sixième ordre avec trois conditions limites.)

Remarquons que l'élimination de ϕ et ψ donne

$$(2.1) \quad \Delta \Delta w = \frac{1}{N} \left(p - \frac{1}{\lambda_1^2} \Delta p \right) \quad \left(\lambda_1^2 = \frac{1-\nu}{2} \lambda^2 \right)$$

soit l'équation connue mais avec un terme de charge légèrement modifié du fait de l'intervention des efforts tranchants. Comme cette équation n'est que du quatrième ordre alors que le système est du sixième, elle ne saurait à elle seule résoudre complètement le problème. Nous devons en conclure aussi que *plusieurs déformations pourront avoir même surface élastique* ou encore, ce qui revient au même, *qu'une plaque peut subir des déformations dans lesquelles le feuillet moyen reste plan*. Dans ces conditions nous ne pourrons évidemment plus calculer les efforts par simples dérivations de la seule fonction w . Pour les obtenir sous une forme aussi simple que possible introduisons d'abord la dilatation e et la rotation ω dans un feuillet d'ordonnée $z = 1$ soit :

$$(2.2) \quad e = \frac{\partial \phi}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial y} \quad \omega = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} - \frac{\partial \phi}{\partial y} \right)$$

il vient

$$\begin{aligned} \frac{1}{1-\nu} \frac{\partial e}{\partial x} - \frac{\partial \omega}{\partial y} &= \frac{\lambda^2}{2} \left(\phi + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \\ \frac{1}{1-\nu} \frac{\partial e}{\partial y} - \frac{\partial \omega}{\partial x} &= \frac{\lambda^2}{2} \left(\psi + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \\ e + \Delta w &= -\left(\frac{1}{\lambda} \frac{p}{N} \right) \end{aligned} \quad \begin{cases} \lambda^2 = \frac{10}{h^2} \\ \lambda = \frac{5(1-\nu)}{h^2} \end{cases}$$

et par élimination

$$\Delta e = -\frac{p}{N} \quad \Delta \omega = \lambda^2 \omega.$$

En introduisant de plus la fonction

$$(2.3) \quad \mathcal{V} = w - \frac{e}{\lambda_1^2} = w + \frac{1}{\lambda_1^2} \Delta w + \frac{1}{\lambda_4} \frac{p}{N}$$

les formules finales se simplifieront du fait que les rotations ϕ et ψ tirées des deux premières équations :

$$\phi = -\left(\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial x} + \frac{h^2}{5} \frac{\partial \omega}{\partial y} \right) \quad \psi = -\left(\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial y} - \frac{h^2}{5} \frac{\partial \omega}{\partial x} \right)$$

s'expriment à l'aide des deux seules fonctions \mathfrak{V} et ω . Comme nous connaissons déjà l'équation indéfinie de ω il suffit de trouver encore celle de \mathfrak{V} . Prenant le double laplacien de \mathfrak{V} et tenant compte de l'équation trouvée pour ω (2.1) on aura simplement

$$\Delta\Delta \mathfrak{V} = \frac{p}{N}$$

soit de nouveau l'équation habituelle avec son terme de charge normal.

Ainsi la fonction \mathfrak{V} qui ne représente plus ici le déplacement élastique ω du feuillet moyen satisfait à la même équation indéfinie que ce déplacement lui-même dans la théorie de Kirchhoff.

Voici le système à résoudre en définitive : deux équations indéfinies distinctes

$$(2.4) \quad \text{a)} \quad \Delta\Delta \mathfrak{V} = \frac{p}{N} \quad \text{b)} \quad \Delta\omega = \frac{10}{h^2} \omega$$

et, liant en quelque sorte les deux fonctions inconnues, trois conditions limites :

$$\begin{aligned} m_n &= -N \left\{ v\Delta\mathfrak{V} + (1-v) \frac{\partial^2 \mathfrak{V}}{\partial n^2} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1-v}{5} h^2 \left[\frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{\partial \omega}{\partial n} \right) - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \omega}{\partial s} \right] \right\} \\ m_{ns} &= (1-v) N \left\{ \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{\partial \mathfrak{V}}{\partial s} \right) + \omega - \frac{h^2}{5} \frac{\partial^2 \omega}{\partial n^2} \right\} \\ t_n &= -N \left\{ \frac{\partial (\Delta\mathfrak{V})}{\partial n} + (1-v) \frac{\partial \omega}{\partial s} \right\} \end{aligned}$$

rapportées (fig. 4) à la normale et à la tangente en un point du contour où le rayon de courbure vaut ρ .

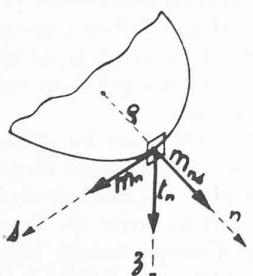


Fig. 4.

\mathfrak{V} et ω une fois déterminées on en déduit les déplacements et les efforts au moyen des formules suivantes :

$$\begin{aligned} \omega &= \mathfrak{V} - \frac{h^2}{5(1-v)} \Delta\mathfrak{V} \\ (2.5) \quad \Phi &= - \left[\frac{\partial \mathfrak{V}}{\partial x} + \frac{h^2}{5} \frac{\partial \omega}{\partial y} \right] \\ \Psi &= - \left[\frac{\partial \mathfrak{V}}{\partial y} - \frac{h^2}{5} \frac{\partial \omega}{\partial x} \right] \end{aligned}$$

$$m_x = -N \left[\frac{\partial^2 \mathfrak{V}}{\partial x^2} + v \frac{\partial^2 \mathfrak{V}}{\partial y^2} + \frac{1-v}{5} h^2 \frac{\partial^2 \omega}{\partial x \partial y} \right]$$

$$m_y = -N \left[\frac{\partial^2 \mathfrak{V}}{\partial y^2} + v \frac{\partial^2 \mathfrak{V}}{\partial x^2} - \frac{1-v}{5} h^2 \frac{\partial^2 \omega}{\partial y \partial x} \right]$$

$$m_{xy} = (1-v) N \left[\frac{\partial^2 \mathfrak{V}}{\partial x \partial y} + \frac{h^2}{10} \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} \right) \right]$$

$$t_x = -N \left[\frac{\partial \Delta \mathfrak{V}}{\partial x} + (1-v) \frac{\partial \omega}{\partial y} \right]$$

$$t_y = -N \left[\frac{\partial \Delta \mathfrak{V}}{\partial y} - (1-v) \frac{\partial \omega}{\partial x} \right].$$

(A suivre.)

DIVERS

Energie atomique et économie électrique.

Extraits

de la conférence de M. A. Winiger, directeur,
donnée à l'occasion
de l'assemblée générale de l'*Association suisse des Electriciens*,
le 7 septembre 1947, à Interlaken.

Si la consommation se poursuit au rythme actuel, le charbon et les carburants feront défaut dans quelques centaines d'années. Or, le 96 % de l'énergie électrique est produite thermiquement. C'est la raison pour laquelle l'on s'efforce, dans tous les pays, d'aménager les forces hydrauliques, car la « houille blanche » est inépuisable. D'autre part, l'utilisation de l'énergie atomique pour la production de chaleur et d'électricité constitue une vaste et précieuse possibilité de remplacer les combustibles, dont les réserves s'amenuisent. Einstein avait déjà prouvé théoriquement que la masse est une forme de l'énergie, la plus concentrée qui se puisse concevoir. En Suisse, la production d'énergie électrique atteint annuellement 10 milliards de kWh, ce qui correspond théoriquement à 400 g masse seulement. La preuve expérimentale que la masse est une forme de l'énergie, et qu'il est possible d'en tirer de l'énergie utile, a été apportée par la bombe atomique, qui est le résultat des recherches de la physique moderne, combinées à une production technique gigantesque. Ce récent succès de la science et de la technique permettra également de libérer, à des fins pacifiques, l'énergie en sommeil dans la masse.

L'énergie produite par la transformation atomique ne donne que de la chaleur. Actuellement, seul l'uranium et le thorium entrent en ligne de compte, qui sont des métaux rares dont nous n'avons pas de gisements en Suisse. La production de chaleur en partant de l'uranium s'opère dans des « piles » qui sont des dispositifs d'un principe fort simple, mais en réalité très compliqués et extrêmement coûteux, à cause de la protection qu'ils doivent assurer contre les rayons radioactifs mortels. A l'aide de la chaleur ainsi obtenue, il est possible de produire de l'énergie électrique, comme dans une usine thermique.

Une importante question est naturellement celle de savoir jusqu'à quel point les usines atomiques seraient capables de concurrencer les autres usines génératrices. Pour l'instant, il est tout à fait impossible d'évaluer, même approximativement, quels seraient les mises de fonds et les frais d'exploitation d'une usine atomique, avant que l'on ait déterminé dans une certaine mesure les nombreuses inconnues du problème.

Il s'agit du traitement chimique et métallurgique des matières premières et des résidus de la réaction, des dispositifs