

**Zeitschrift:** Bulletin technique de la Suisse romande  
**Band:** 72 (1946)  
**Heft:** 22

**Artikel:** Le calcul d'un tube cylindrique de révolution à épaisseur de paroi variable  
**Autor:** Tâche, J.  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-54637>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 26.01.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

# BULLETIN TECHNIQUE DE LA SUISSE ROMANDE

## ABONNEMENTS :

Suisse : 1 an, 17 francs  
Etranger : 20 francs

### Pour sociétaires :

Suisse : 1 an, 14 francs  
Etranger : 17 francs

Prix du numéro :  
75 centimes

Pour les abonnements  
s'adresser à la librairie  
F. Rouge & C<sup>ie</sup>, à Lausanne.

Paraissant tous les 15 jours

Organe de la Société suisse des ingénieurs et des architectes, des Sociétés vaudoise et genevoise des ingénieurs et des architectes, de l'Association des anciens élèves de l'Ecole polytechnique de l'Université de Lausanne et des Groupes romands des anciens élèves de l'Ecole polytechnique fédérale.

COMITÉ DE PATRONAGE. — Président : R. NEESER, ingénieur, à Genève ; Vice-président : G. EPITAUX, architecte, à Lausanne ; secrétaire : J. CALAME, ingénieur, à Genève. Membres : *Fribourg* : MM. L. HERTLING, architecte ; P. JOYE, professeur ; *Vaud* : MM. F. CHENAUX, ingénieur ; E. ELSKES, ingénieur ; E. D'OKOLSKI, architecte ; A. PARIS, ingénieur ; Ch. THÉVENAZ, architecte ; *Genève* : MM. L. ARCHINARD, ingénieur ; E. MARTIN, architecte ; E. ODIER, architecte ; *Neuchâtel* : MM. J. BÉGUIN, architecte ; G. FURTER, ingénieur ; R. GUYE, ingénieur ; *Valais* : M. J. DUBUIS, ingénieur ; A. DE KALBERMATTEN, architecte.

RÉDACTION : D. BONNARD, ingénieur, Case postale Chauderon 475, LAUSANNE.

CONSEIL D'ADMINISTRATION DE LA SOCIÉTÉ ANONYME DU BULLETIN TECHNIQUE

A. STUCKY, ingénieur, président ; M. BRIDEL ; G. EPITAUX, architecte ; R. NEESER, ingénieur.

## Publicité : TARIF DES ANNONCES

Le millimètre  
(larg. 47 mm.) 20 cts.  
Tarif spécial pour fractions  
de pages.  
En plus 20 % de majoration de guerre  
Rabais pour annonces  
répétées.



ANNONCES-SUISSES S.A.  
5, rue Centrale  
LAUSANNE  
& Succursales.

SOMMAIRE : Le calcul d'un tube cylindrique de révolution à épaisseur de paroi variable (suite et fin), par J. TACHE, ingénieur E. I. L. — Chronique de la propriété industrielle : Le rôle de la revendication dans le brevet suisse. L'appréciation de la différence entre l'invention et la simple mesure constructive. — Société suisse des ingénieurs et des architectes : Groupe professionnel des architectes pour les relations internationales. — LES CONGRÈS : Réunion de la Commission internationale des Grands Barrages ; Association internationale des Ponts et Charpentes. — BIBLIOGRAPHIE. — CARNET DES CONCOURS. — SERVICE DE PLACEMENT. — INFORMATIONS DIVERSES.

## Le calcul d'un tube cylindrique de révolution à épaisseur de paroi variable

par J. TÂCHE, ingénieur E. I. L.

(Suite et fin<sup>1</sup>).

### Applications.

#### 1° Tube très court.

Considérons un tube de section triangulaire soumis en O à un moment fléchissant  $M_0$ , figure 3, et supposons que la longueur  $l$  soit suffisamment courte pour que les coefficients  $k$  puissent être exprimés par leur premier terme seulement.

Calculons la valeur de  $\omega_0$  par la formule (13).

On a

$$(59) \quad \omega_0 = \frac{2 \alpha_m^2 b}{h_m E} \alpha_m M_0 \frac{9}{\alpha_m^3 l^3} = \frac{36 b M_0}{h_0 l^3 E}$$

Faisons le même calcul en considérant ce tube très court comme un anneau. On sait que la section triangulaire de l'anneau s'incline d'un angle  $\omega$  donné par la formule (344), page 39 du B. V. 1943, et qui, traduite dans notre notation, s'écrit

<sup>1</sup> Voir Bulletin technique du 12 octobre 1946, p. 273.

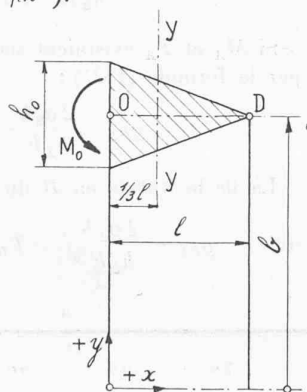


Fig. 3.

$$(60) \quad \omega = \frac{b M_0}{E I}$$

Dans cette formule,  $I$  désigne le moment d'inertie de la section triangulaire pris par rapport à l'axe  $yy$ .

On a

$$I = \frac{h_0 l^3}{36}$$

En portant cette valeur dans la relation (60), on obtient

$$(61) \quad \omega = \frac{36 b M_0}{h_0 l^3 E}$$

En comparant les formules (59) et (61), on constate que  $\omega_0 = \omega$ . On pourrait poursuivre la comparaison et on constaterait la parfaite concordance entre les formules obtenues en considérant la pièce étudiée d'une part comme un tube très court et d'autre part comme un anneau.

#### 2° Tube court.

Nous choisirons comme exemple le tube étudié par M. Paschoud (exemple 2).

Pour plus de généralité, nous admettrons que le tube est soumis non seulement aux perturbations  $M_A$  et  $T_A$  mais encore à la perturbation  $N$ , formule (16). Sur la figure 4 seule la force  $L$  est représentée, mais il est facile de s'imaginer l'existence de la pression intérieure  $p_i$  et de la pression extérieure  $p_e$  qui entrent dans l'expression de  $N$ .

Après avoir dessiné le plus exactement possible le profil à contour curviligne, nous l'avons remplacé par un profil trapézoïdal représenté par la figure 4.

Les données sont donc les suivantes :

1<sup>er</sup> tronçon :

$$\begin{aligned} h_0 &= 5,5 \text{ cm} & l &= 8,4 \text{ cm} \\ h_1 &= 1,9 \text{ cm} & b &= 115 \text{ cm} \end{aligned}$$

2<sup>e</sup> tronçon :

$$h_2 = 1,9 \text{ cm} \quad b = 115 \text{ cm} \\ l = \text{illimité}$$

Calcul des caractéristiques du 1<sup>er</sup> tronçon :

$$|\beta| = \frac{55 - 19}{55 + 19} = 0,486$$

$$h_m = \frac{5,5 + 1,9}{2} = 3,7 \text{ cm}$$

$$\alpha_m = \frac{1,285}{\sqrt{115 \times 3,7}} = 0,06225 \text{ cm}^{-1}$$

$$\alpha_m l = 0,06225 \times 8,4 = 0,522.$$

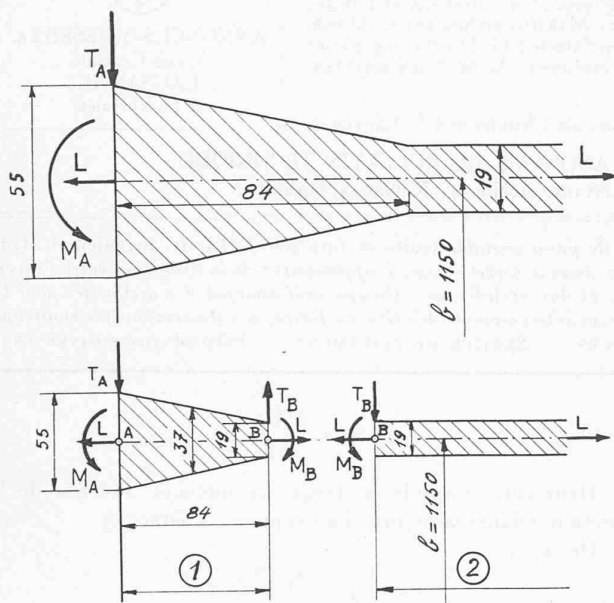


Fig. 4.

Le tronçon 1 est donc bien un tronçon court.  
Pour le calcul des  $k$ , on établit le tableau ci-dessous :

Calcul de la caractéristique du 2<sup>e</sup> tronçon :

$$\alpha_2 = \frac{1,285}{\sqrt{115 \times 1,9}} = 0,0867 \text{ cm}^{-1}.$$

On calcule ensuite  $y_{B1}$  et  $\omega_{B1}$  comme appartenant au tronçon 1, en utilisant les formules (14) et (15).

On obtient

$$(62) \quad y_{B1} = \frac{2 \alpha_m b}{h_m E} \left[ T_A 2,0777 + \alpha_m M_A 13,84 + T_B 5,177 - \alpha_m M_B 13,937 + N 1,541 \right]$$

$$(63) \quad \omega_{B1} = \frac{2 \alpha_m^2 b}{h_m E} \left[ T_A 9,982 + \alpha_m M_A 45,55 + T_B 13,937 - \alpha_m M_B 47,01 + N 1,9333 \right]$$

D'autre part on peut écrire

$$(64) \quad \alpha_m = \alpha_2 \frac{\alpha_m}{\alpha_2} = \alpha_2 0,716.$$

$$(65) \quad h_m = h_2 \frac{h_m}{h_2} = h_2 0,195.$$

En portant ces valeurs dans les formules (62) et (63), celles-ci deviennent

$$(66) \quad y_{B1} = \frac{2 \alpha_2 b}{h_2 E} \left[ T_A 0,765 + \alpha_2 M_A 3,660 + T_B 1,910 - \alpha_2 M_B 3,690 + N 0,568 \right]$$

$$(67) \quad \omega_{B1} = \frac{2 \alpha_2^2 b}{h_2 E} \left[ T_A 2,642 + \alpha_2 M_A 8,652 + T_B 3,690 - \alpha_2 M_B 8,940 + N 0,5115 \right]$$

Calculons la flèche et la tangente en B du tronçon 2.

Si  $M_B$  et  $T_B$  n'existaient pas, la flèche du tronçon 2 serait donnée par la formule (42\*), dans laquelle on suppose que  $\varphi_1$  et  $\varphi_e$  sont égaux à l'unité.

En tenant compte de la relation (16), cette flèche peut se mettre sous la forme

$$y_c = \frac{bN}{h_2 l E}.$$

Pour harmoniser cette expression avec les autres, on peut écrire

$$y_c = \frac{2 \alpha_2 b N}{h_2 E} \frac{1}{2 \alpha_2 l} = \frac{2 \alpha_2 b N}{h_2 E} 0,687.$$

Si  $M_A$  et  $T_A$  existaient seuls, la flèche en B serait donnée par la formule (182\*) :

$$y_{B2} = \frac{2 \alpha_2 b}{h_2 E} (-T_B - \alpha_2 M_B).$$

La flèche totale en B du tronçon 2 sera donc

$$(68) \quad y_{B2} = \frac{2 \alpha_2 b}{h_2 E} (-T_B - \alpha_2 M_B + N 0,687).$$

Indices	1p	1n	2p	2n	4p	4n	5p	5n
$\eta$ . . . . .	1,35	0,82	1,261	0,91	1,086	1,086	1,086	1,086
$\varphi$ d'après graphique . . . . .	2,55	0,524	2,68	0,525	3,38	0,49	1,115	1,113
Premier terme de $k$ . . . . .	5,17	3,14	13,86	10,00	45,7	45,7	2,08	2,08
Deuxième terme de $k$ . . . . .	0,007	0,0014	0,077	0,015	1,31	0,19	-0,0023	-0,0023
$k$ . . . . .	5,177	3,1414	13,937	10,015	47,01	45,89	2,0777	2,0777
Indices	6p	6n	8p	8n	9p	9n	10p	10n
$\eta$ . . . . .	1,261	0,91	1,086	1,086	1,611	0,5575	0,5275	-0,5275
$\varphi$ d'après graphique . . . . .	1,16	1,08	1,12	1,12	0,440	0,197	0,450	0,200
Premier terme de $k$ . . . . .	13,86	10,00	45,7	45,7	1,541	0,5335	1,932	-1,932
Deuxième terme de $k$ . . . . .	-0,0196	-0,018	-0,15	-0,15	0,00015	0,00007	0,0013	0,0006
$k$ . . . . .	13,8404	9,982	45,55	45,55	1,54115	0,53357	1,9333	-1,9314

La tangente en  $B$  du tronçon 2 sera donnée par la formule (185\*) :

$$(69) \quad \omega_{B2} = \frac{2 \alpha_2^2 b}{h_2 E} (T_B + 2 \alpha_2 M_B).$$

En posant

$$y_{B1} = y_{B2} \quad \text{et} \quad \omega_{B1} = \omega_{B2}$$

on obtient les deux équations suivantes qui nous permettront d'exprimer  $T_B$  et  $M_B$  en fonction de  $T_A$  et  $M_A$  et  $N$  supposés connus :

$$2,910 T_B - 2,690 \alpha_2 M_B = -0,765 T_A - 3,660 \alpha_2 M_A + 0,119 N.$$

$$2,690 T_B - 10,94 \alpha_2 M_B = -2,642 T_A - 8,655 \alpha_2 M_A - 0,5115 N.$$

En résolvant ces deux équations on obtient

$$(70) \quad T_B = -0,051 T_A - 0,682 \alpha_2 M_A + 0,109 N.$$

$$(71) \quad \alpha_2 M_B = 0,229 T_A + 0,622 \alpha_2 M_A + 0,0735 N.$$

Connaissant  $T_B$  et  $\alpha_2 M_B$ , on peut calculer  $y_A$  et  $\omega_A$  en appliquant les formules (12) et (13). Après avoir fait les mêmes substitutions que pour les formules (62) et (63), on a

$$(72) \quad y_A = -\frac{2 \alpha_2 b}{h_2 E} (0,513 T_A + 0,483 \alpha_2 M_A - 0,307 N).$$

$$(73) \quad \omega_A = \frac{2 \alpha_2^2 b}{h_2 E} (0,483 T_A + 0,850 \alpha_2 M_A + 0,274 N).$$

Enfin, en remplaçant dans (68) et (69)  $T_B$  et  $\alpha_2 M_B$  par leur valeur (relations 70 et 71), on obtient

$$(74) \quad y_B = \frac{2 \alpha_2 b}{h_2 E} (-0,1777 T_A + 0,060 \alpha_2 M_A + 0,5045 N).$$

$$(75) \quad \omega_B = \frac{2 \alpha_2^2 b}{h_2 E} (0,4067 T_A + 0,562 \alpha_2 M_A + 0,256 N).$$

Le problème peut être considéré comme résolu.

Remarquons que les calculs ont été conduits de façon à introduire dans les formules le moins possible de valeurs numériques.

Celles qui y figurent sont : les coefficients  $k$ , l'expression  $\alpha_2 l$  et les rapports  $\frac{z_m}{\alpha_2}$  et  $\frac{h_m}{h_2}$ . Il est facile de voir que ces valeurs ne changent pas si l'on multiplie toutes les dimensions du tube étudié par un facteur quelconque.

On en conclut que les résultats obtenus sont valables non seulement pour le tube étudié, mais encore pour tout tube qui lui est semblable.

Comparons les résultats avec ceux obtenus par M. Paschoud.

Il faut d'abord supposer que  $N$  est nul.

Pour passer de notre notation à celle de M. Paschoud, il faut remplacer

$$\begin{aligned} M_A &\text{ par } -M_0 b \\ T_A &\text{ par } -T_0 b \\ E &\text{ par } 0,91 E_b. \end{aligned}$$

La relation (72) devient

$$y_A = \frac{2 \alpha_2 b^2}{h} \left( 0,513 \frac{T_0}{E} + 0,483 \alpha_2 \frac{M_0}{E} \right).$$

En posant  $\frac{T_0}{E} = 1 \text{ mm}$  et  $\frac{M_0}{E} = 1 \text{ mm}^2$ , et en calculant le tout en millimètres, on a

$$y_A = 685 \text{ mm.}$$

M. Paschoud a obtenu 689 mm.

Revenons aux relations (70) à (75), qui représentent la solution la plus générale du problème. Les termes en  $T_A$  et  $M_A$  sont ceux qu'on obtiendrait en résolvant l'équation différentielle (4) sans second membre, tandis que les termes en  $N$  correspondent à la solution particulière de l'équation différentielle (4) avec second membre.

Les formules (70) à (75) permettent de résoudre une foule de cas particuliers. Pour ne pas allonger cette étude, nous choisirons parmi eux ceux qui nous paraissent les plus caractéristiques et les analyserons rapidement.

*Premier cas particulier :  $N = 0$ .*

Si le tube, au lieu d'être renforcé, était d'épaisseur constante  $h_2$ , la flèche à son extrémité aurait la valeur

$$(76) \quad y_h = \text{constant} = -\frac{2 \alpha_2 b}{h_2 E} (T_A + \alpha_2 M_A).$$

En comparant (76) à (72), on constate que le renforcement du tube a pour effet de diminuer la flèche produite par l'effort tranchant  $T_A$  dans le rapport 1 à 0,513 et celle engendrée par le moment  $M_A$  dans le rapport 1 à 0,483.

Pour analyser plus à fond ce cas particulier, il est indispensable d'étudier séparément l'action de  $T_A$  et  $M_A$ . Nous nous bornerons à analyser l'influence de  $M_A$ . Ce sera une occasion de montrer la manière d'appliquer les autres formules.

*Deuxième cas particulier :  $N = 0$  ;  $T_A = 0$ .*

Choisissons, comme flèche étalon, la valeur absolue de la flèche en  $A$  produite par  $M_A$  si le tube n'était pas renforcé :

$$f_e = \frac{2 \alpha_2^2 b M_A}{h_2 E}$$

et comme tension étalon la valeur

$$\sigma_e = \frac{2 \alpha_2^2 M_A}{h_2}.$$

Les formules (70) et (75) nous donnent

$$(77) \quad y_A = -0,483 f_e.$$

$$(78) \quad \omega_A = 0,850 \alpha_2 f_e.$$

$$(79) \quad y_B = 0,060 f_e.$$

$$(80) \quad \omega_B = 0,562 \alpha_2 f_e.$$

$$(81) \quad T_B = -0,682 \alpha_2 M_A.$$

$$(82) \quad M_B = 0,622 M_A.$$

Les formules (77) à (80) nous permettent de tracer la ligne élastique du tronçon 1 ; cette ligne est déterminée par  $y_A$ ,  $y_B$  ainsi que par les tangentes  $\omega_A$  et  $\omega_B$  en ces points, donc en tout par quatre points, ce qui est amplement suffisant en pratique, voir figure 5.

La ligne élastique du tronçon 2 est donnée par la formule (176\*) (voir page 27 du B. V. 1945-1).

Pour appliquer cette formule, il faut remplacer

$$\begin{aligned} \alpha M_0 &\text{ par } \alpha_2 M_B \\ T_0 &\text{ » } T_B. \end{aligned}$$

En tenant compte des relations (81) et (82), on obtient

$$y_2 = f_e e^{-\alpha_2 x} (0,622 \sin \alpha_2 x + 0,060 \cos \alpha_2 x).$$

La courbe des moments fléchissants du tronçon 1 est définie par

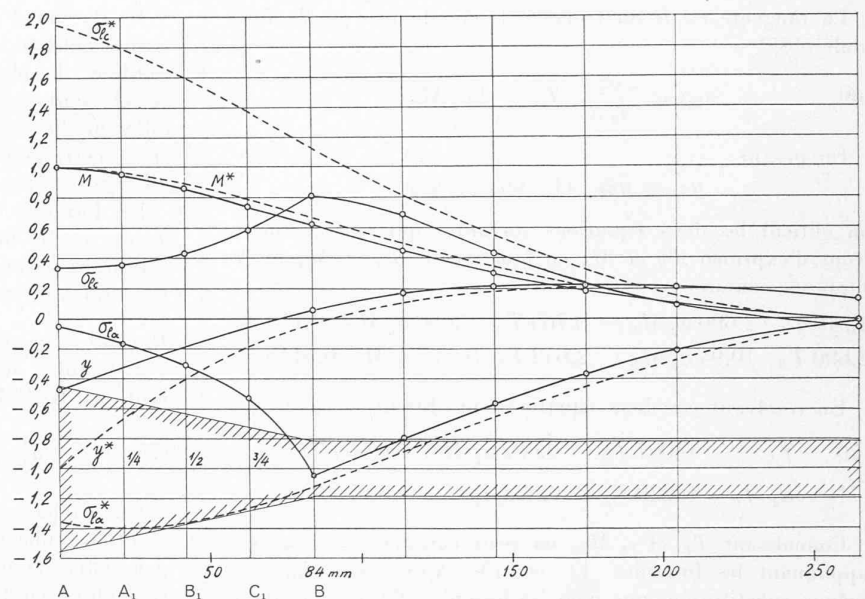
$$M_A = M_A.$$

$$M_B = 0,622 M_A.$$

Fig. 5.

$$\begin{aligned} \text{Unité des moments} &= M_A \\ \text{» » flèches} &= \frac{2\alpha_2^2 b M_A}{h_2 E} \\ \text{» » tensions} &= \frac{2\alpha_2^2 M_A}{h_2} \end{aligned}$$

Les courbes dont la lettre est surmontée d'un astérisque se rapportent au tube non renforcé.



ainsi que par les tangentes en ces points

$$\begin{aligned} T_A &= 0 \\ T_B &= -0,682 \alpha_2 M_A. \end{aligned}$$

Si l'on désire calculer les points intermédiaires  $A_1$ ,  $B_1$  et  $C_1$ , on appliquera les formules (43), (44) et (45). On obtient ainsi

$$\begin{aligned} M_{1/4} &= 0,959 M_A \\ M_{1/2} &= 0,866 M_A \\ M_{3/4} &= 0,745 M_A. \end{aligned}$$

Pour obtenir la courbe des moments fléchissants du tronçon 2, on applique la formule (178\*) du B. V. déjà cité. Tous calculs faits on a

$$M_2 = M_A e^{-\alpha_2 x} (-0,060 \sin \alpha_2 x + 0,622 \cos \alpha_2 x).$$

Après avoir tracé la courbe des flèches et celle des moments fléchissants, figure 5, on est en possession de toutes les données pour calculer les contraintes. Nous appliquerons les formules générales (113\*) et (120\*). Cette dernière peut se transformer et se mettre sous la forme

$$(83) \quad \sigma_l = \sigma_e \left[ -n \frac{y}{f_e} \pm \sqrt{3(1-n^2)} \left( \frac{h_2}{h} \right)^2 \frac{M}{M_A} \right].$$

Pour compléter cette étude, nous avons représenté également la ligne élastique du tube non renforcé (formule 160\*)

$$y_{h=h_2}^* = f_e e^{-\alpha_2 x} (\sin \alpha_2 x - \cos \alpha_2 x).$$

et la courbe des moments fléchissants du tube non renforcé (formule 162\*)

$$M_{h=h_2}^* = M_A e^{-\alpha_2 x} (\sin \alpha_2 x + \cos \alpha_2 x).$$

On remarque que le renforcement du tube n'étouffe pas d'une façon très appréciable le moment fléchissant<sup>1</sup>.

Sur la figure 5, les courbes  $\sigma_{le}^*$  et  $\sigma_{la}^*$  représentent les tensions de comparaison extérieure et intérieure du tube non

<sup>1</sup> Cette remarque est de la plus grande importance pour le constructeur lorsqu'il doit déterminer les dimensions du renforcement d'un tube. Elle lui évitera bien des tâtonnements et lui épargnera des calculs longs et inutiles. En effet, il calculera d'abord la courbe des moments fléchissants comme si le tube n'était pas renforcé et se basera sur elle pour fixer les dimensions du renforcement. Un calcul de contrôle exact lui montrera ensuite si les valeurs admises sont judicieusement choisies.

renforcé. On remarque que le renforcement diminue surtout ces tensions en A et beaucoup moins en B. Le renforcement n'est donc pas très heureux au point de vue de l'économie de matière. Il est inutilement épais en A. Il serait donc avantageux de diminuer l'épaisseur en A et d'augmenter la longueur du tronçon renforcé de façon à déplacer le point B dans la zone où le moment fléchissant est davantage amorti.

#### Troisième cas particulier.

Le tube est soumis à une traction axiale P.

La force axiale par unité d'angle sera

$$L = \frac{P}{2\pi}$$

La tension longitudinale dans le tube au large de la perturbation, c'est-à-dire à une distance suffisante de celle-ci pour que les tensions qui en résultent puissent être considérées comme négligeables, sera

$$\sigma_l = \frac{P}{2\pi b h_2} = \frac{L}{b h_2} = \sigma_e.$$

Nous choisirons cette tension comme tension étalon.

La flèche au large de la perturbation sera donnée par la formule (42\*) :

$$y_e = -\frac{nL}{h_2 E}.$$

La valeur absolue de cette flèche sera choisie comme flèche étalon :

$$y_e = \frac{nL}{h_2 E}.$$

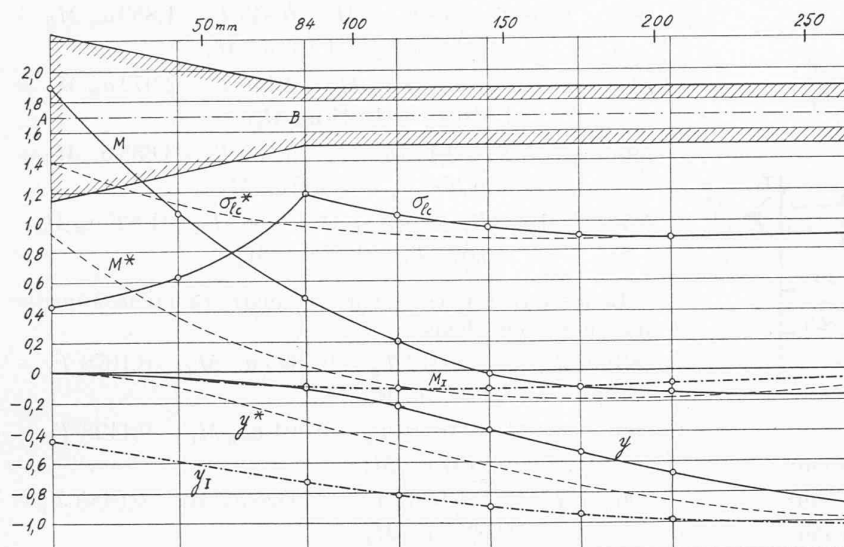
En outre, comme unité des moments fléchissants, nous adopterons la valeur  $0,1 L h_2$ .

Ceci posé, nous nous proposons d'envisager divers genres de liaison en A.

**Premier genre de liaison :** Le tube en A est complètement libre ; cette condition se traduit en posant  $T_A = 0$  et  $M_A = 0$ .

En tenant compte que  $N = -\frac{nLl}{b}$  (formule 16), les relations (70) à (75) deviennent





$$\begin{aligned}
 T_B &= -0,00239 L \\
 \alpha_2 M_B &= -0,00161 L \\
 y_A &= -0,447 y_e \\
 \omega_A &= -0,399 \alpha_2 y_e \\
 y_B &= -0,734 y_e \\
 \omega_B &= -0,373 \alpha_2 y_e
 \end{aligned}$$

En appliquant les formules (176\*) et (178\*) déjà citées, on pourra tracer la courbe des flèches  $y_I$  et celle des moments fléchissants  $M_I$ , voir figure 6.

Si le tube n'était pas renforcé, les moments fléchissants seraient nuls et la ligne élastique serait une droite parallèle à l'axe des  $x$  et d'ordonnée  $-y_e$ .

On voit que le renforcement du tube diminue la flèche en  $A$  dans le rapport 1 à 0,447 et incurve légèrement la ligne élastique en engendrant un moment fléchissant dont la valeur est toutefois assez faible.

*Deuxième genre de liaison :* L'extrémité  $A$  du tube est solidaire d'une plaque infiniment rigide.

Cette condition se traduit par  $y_A = 0$  et  $\omega_A = 0$ .

Les relations (72) et (73) nous donnent

$$\begin{aligned}
 0,513 T_A + 0,483 \alpha_2 M_A - 0,307 N &= 0 \\
 0,483 T_A + 0,850 \alpha_2 M_A + 0,274 N &= 0
 \end{aligned}$$

En résolvant ces deux équations par rapport à  $T_A$  et  $M_A$ , on obtient

$$\begin{aligned}
 T_A &= 1,94 N \\
 \alpha_2 M_A &= -1,425 N
 \end{aligned}$$

En portant ces valeurs dans (70), (71), (74) et (75), on a

$$\begin{aligned}
 y_B &= -0,109 y_e \\
 \omega_B &= -0,356 \alpha_2 y_e \\
 T_B &= 0,9845 N \\
 \alpha_2 M_B &= -0,3675 N
 \end{aligned}$$

D'après ces valeurs, nous avons établi la ligne élastique  $y$  et la courbe des moments fléchissants  $M$ , puis celle des tensions longitudinales de comparaison  $\sigma_{lc}$ , figure 6.

A titre de comparaison nous avons, par des calculs simi-

Fig. 6.

Unité des moments =  $0,1 L h_2$

» » flèches =  $\frac{nL}{h_2 E} = |y_e|$

» » tensions =  $\frac{L}{b h_2}$

$y_I$  et  $M_I$  représentent la ligne élastique et la courbe des moments fléchissants du tube renforcé, soumis à une traction  $L$  et dont l'extrémité  $A$  est libre.

$y$  et  $M$  se rapportent au même tube mais dont l'extrémité  $A$  est encastrée sur une plaque infiniment rigide.

$y^*$  et  $M^*$  se rapportent au tube non renforcé dont l'extrémité  $A$  est encastrée sur une plaque infiniment rigide.

lares, déterminé les mêmes courbes pour le tube non renforcé, désignées sur le graphique par un astérisque.

On constate que le moment fléchissant d'encastrement est environ deux fois plus grand pour le tube renforcé que pour le tube non renforcé. La section dangereuse pour le tube renforcé est en  $B$ , tandis que celle du tube non renforcé est en  $A$ , où la tension longitudinale extérieure de comparaison est d'environ 40 % supérieure à la tension étalon (traction dans le tube au large de la perturbation). Pour ce cas encore, on remarque qu'il serait plus avantageux de diminuer l'épaisseur du renforcement en  $A$  et d'augmenter la longueur de celui-ci.

*Troisième genre de liaison :* Considérons deux tubes renforcés identiques, retournons l'un d'eux et soudons-les bout à bout. On obtiendra un tube illimité dans les deux sens avec un bourrelet en son milieu.

L'état de perturbation d'un tel tube soumis à une traction longitudinale s'exprimera par les conditions

$$\begin{aligned}
 \omega_A &= 0 \\
 T_A &= 0
 \end{aligned}$$

En effet,  $T_A$  doit être nul, car par raison de symétrie le moment d'encastrement en  $A$  passe par un maximum et par conséquent l'effort tranchant en cet endroit doit être nul.

Nous ne développerons pas davantage cet exemple. Ceux que nous venons de citer montrent les nombreux avantages de la solution algébrique du problème, laquelle permet d'étudier rapidement un grand nombre de cas particuliers.

### 3° Tube long limité.

Considérons le tube de la figure 7. En calculant  $\alpha_m l$  on obtient la valeur 3,566. Le tube est donc trop long pour être étudié comme tronçon unique. Nous le scinderons en trois tronçons de longueur différente choisie de façon que, pour chacun de ces tronçons, la valeur  $\alpha_m l$  soit inférieure à 1,5 (voir figure 7).

Les caractéristiques de ces tronçons sont les suivantes :

$$\begin{aligned}
 \alpha_{m1} &= 0,155 \text{ cm}^{-1} & \alpha_{m1} l_1 &= 1,240 \\
 \alpha_{m2} &= 0,186 \text{ cm}^{-1} & \alpha_{m2} l_2 &= 1,302 \\
 \alpha_{m3} &= 0,2309 \text{ cm}^{-1} & \alpha_{m3} l_3 &= 1,1545
 \end{aligned}$$

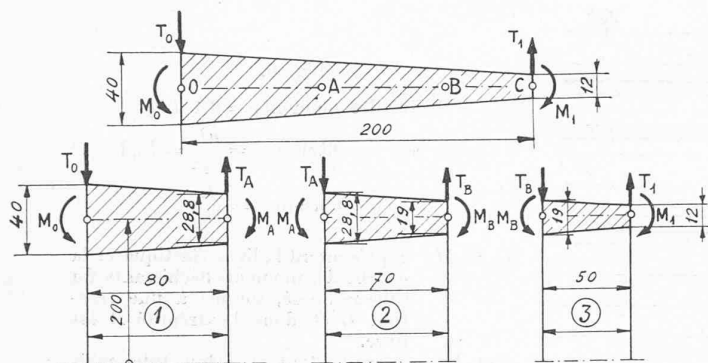


Fig. 7.

$$\begin{aligned} h_{m1} &= 3,44 \text{ cm} & l_1 &= 8 \text{ cm} \\ h_{m2} &= 2,39 \text{ cm} & l_1 &= 7 \text{ cm} \\ h_{m3} &= 1,55 \text{ cm} & l_3 &= 5 \text{ cm} \end{aligned}$$

Les caractéristiques du tube entier sont :

$$\begin{aligned} \alpha_m &= 0,1783 \text{ cm}^{-1} & \alpha_m l &= 3,566 \\ h_m &= 2,6 \text{ cm} & l &= 20 \text{ cm} \end{aligned}$$

Pour ne pas abuser de la patience de nos lecteurs, nous nous bornerons à indiquer la marche à suivre et à donner les résultats obtenus.

Pour simplifier les calculs, nous avons supposé que  $N$  était nul. La marche des opérations n'est toutefois, de ce fait, nullement modifiée.

On dresse d'abord les tableaux des coefficients  $k$  en remarquant que

$$\beta_1 = \frac{40 - 28,8}{40 + 28,8} = 0,1625.$$

$$\beta_2 = \frac{28,8 - 19}{28,8 + 19} = 0,2050.$$

$$\beta_3 = \frac{19 - 12}{19 + 12} = 0,2258.$$

puis en appliquant les formules (12), (13), (14) et (15) on calcule les flèches et tangentes en  $A$  et  $B$ .

$$\begin{aligned} y_{A1} &= \text{flèche en } A \text{ du tronçon } 1 \\ y_{A2} &= \text{» » } A \text{ » » } 2 \\ &\text{etc.} \end{aligned}$$

Dans les huit expressions ainsi obtenues, on remplace les  $\alpha_{m1}$ ,  $\alpha_{m2}$  et  $\alpha_{m3}$  par

$$\alpha_{m1} = \alpha_m \frac{\alpha_{m1}}{\alpha_m} = \alpha_m 0,868$$

etc.

On fait la même substitution pour les  $h_m$  :

$$h_{m1} = h_m \frac{h_{m1}}{h_m} = h_m 1,323$$

etc.

On obtient les flèches et tangentes en  $A$  et  $B$  exprimées en fonction de  $\alpha_m$  et  $h_m$ .

En posant

$$\begin{aligned} y_{A1} &= y_{A2} \\ \omega_{A1} &= \omega_{A2} \\ y_{B2} &= y_{B3} \\ \omega_{B2} &= \omega_{B3} \end{aligned}$$

on obtient les quatre équations suivantes :

$$(84) \quad 2,808 T_A + 0,825 \alpha_m M_A + 0,845 T_B - 1,853 \alpha_m M_B = -0,5155 T_0 - 1,433 \alpha_m M_0.$$

$$(85) \quad 0,825 T_A + 6,458 \alpha_m M_A + 2,140 T_B - 2,972 \alpha_m M_B = 1,010 T_0 + 1,415 \alpha_m M_0.$$

$$(86) \quad 0,845 T_A + 2,140 \alpha_m M_A + 5,460 T_B + 3,685 \alpha_m M_B = -1,858 T_1 + 5,730 \alpha_m M_1.$$

$$(87) \quad -1,853 T_A - 2,972 \alpha_m M_A + 3,685 T_B + 21,825 \alpha_m M_B = -6,675 T_1 + 13,32 \alpha_m M_1.$$

La résolution de ce système de quatre équations à quatre inconnues nous donne

$$(88) \quad T_A = -0,212 T_0 - 0,4695 \alpha_m M_0 - 0,1678 T_1 + 0,1267 \alpha_m M_1.$$

$$(89) \quad \alpha_m M_A = 0,216 T_0 + 0,301 \alpha_m M_0 - 0,1128 T_1 - 0,0157 \alpha_m M_1.$$

$$(90) \quad T_B = -0,0662 T_0 - 0,0520 \alpha_m M_0 - 0,0485 T_1 + 0,6975 \alpha_m M_1.$$

$$(91) \quad \alpha_m M_B = 0,02273 T_0 + 0,00985 \alpha_m M_0 - 0,3275 T_1 + 0,500 \alpha_m M_1.$$

Remarquons en passant que le déterminant des coefficients des quatre inconnues est symétrique. Ce n'est pas un effet du hasard, car la symétrie provient du fait que  $k_2 = k_3$ . Cette remarque est intéressante, car elle permet de contrôler l'exactitude du calcul de ces coefficients.

Il n'est pas du tout nécessaire de connaître la théorie des déterminants pour résoudre ce système d'équations. Nous l'avons appliquée et avons constaté que cette méthode n'est ni plus simple ni plus exacte. Celle qui nous paraît la plus appropriée consiste à supposer d'abord que  $T_1$  et  $M_1$  sont nuls. On calcule alors  $T_B$  et  $\alpha_m M_B$  au moyen des équations (86) et (87), puis on porte ces valeurs dans (84) et (85). Ayant obtenu les valeurs des quatre inconnues en fonction de  $T_0$  et  $\alpha_m M_0$ , on suppose ensuite que  $T_0$  et  $M_0$  sont nuls et l'on résout le nouveau système d'équations en calculant d'abord les valeurs de  $T_A$  et  $\alpha_m M_A$  au moyen des équations (84) et (85), valeurs que l'on porte ensuite dans les équations (86) et (87). On obtient ainsi les quatre inconnues en fonction de  $T_1$  et  $\alpha_m M_1$ .

Pour obtenir les flèches et les tangentes en  $O$ ,  $A$ ,  $B$  et  $C$ , il suffira d'appliquer les formules (12), (13), (14) et (15).

On obtient

$$(92) \quad y_0 = \frac{2 \alpha_m b}{h_m E} \left( -0,672 T_0 - 0,589 \alpha_m M_0 - 0,027 T_1 - 0,081 \alpha_m M_1 \right).$$

$$(93) \quad y_A = \frac{2 \alpha_m b}{h_m E} \left( -0,019 T_0 + 0,171 \alpha_m M_0 - 0,051 T_1 + 0,167 \alpha_m M_1 \right).$$

$$(94) \quad y_B = \frac{2 \alpha_m b}{h_m E} \left( 0,088 T_0 + 0,117 \alpha_m M_0 + 0,358 T_1 + 0,199 \alpha_m M_1 \right).$$

$$(95) \quad y_C = \frac{2 \alpha_m b}{h_m E} \left( 0,029 T_0 - 0,031 \alpha_m M_0 + 2,070 T_1 - 2,864 \alpha_m M_1 \right).$$

$$(96) \quad \omega_0 = \frac{2 \alpha_m^2 b}{h_m E} \left( 0,588 T_0 + 0,968 \alpha_m M_0 - 0,030 T_1 + 0,165 \alpha_m M_1 \right).$$

$$(97) \quad \omega_A = \frac{2 \alpha_m^2 b}{h_m E} \left( 0,254 T_0 + 0,133 \alpha_m M_0 + 0,031 T_1 + 0,200 \alpha_m M_1 \right).$$

$$(98) \quad \omega_B = \frac{2 \alpha_m^2 b}{h_m E} \left( -0,038 T_0 - 0,161 \alpha_m M_0 + 0,940 T_1 - 0,649 \alpha_m M_1 \right).$$

$$(99) \quad \omega_C = \frac{2 \alpha_m^2 b}{h_m E} \left( -0,078 T_0 - 0,167 \alpha_m M_0 + 2,842 T_1 - 8,760 \alpha_m M_1 \right).$$

On peut considérer le problème comme résolu. La ligne élastique est déterminée par les quatre flèches et les quatre tangentes en  $O$ ,  $A$ ,  $B$ ,  $C$ , donc par huit points. Il en est de même de la courbe des moments fléchissants. A titre d'exemple, le graphique de la figure 8 donne la ligne élastique et la courbe des moments fléchissants établies en supposant que toutes les perturbations sont nulles à l'exception de  $M_0$ .

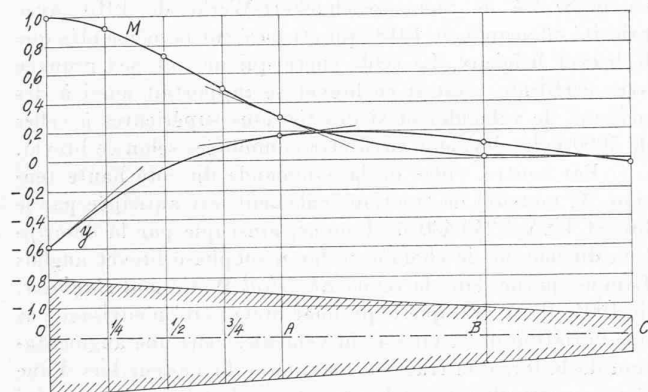


Fig. 8.  
Unité des moments =  $M_0$

$$y \text{ et } M \text{ représentent la ligne élastique et la courbe des moments fléchissants du tube de la figure 7 soumis seulement au moment } M_0 (T_0 = M_1 = T_1 = 0).$$

» » flèches =  $\frac{2 \alpha_m^2 b M_0}{h_m E}$

Nous renonçons à analyser les formules ci-dessus, car cela nous entraînerait trop loin de notre sujet. Soulignons seulement que la comparaison des expressions (92) et (95) nous montre par exemple qu'un effort tranchant appliqué à l'extrémité mince du tube produit en  $C$  une flèche qui, en valeur absolue, est 2,070 : 0,672 fois plus grande que la flèche produite en  $O$  par le même effort tranchant agissant à l'extrémité épaisse.

Le problème pourrait être traité plus rapidement si l'on introduisait dès le début les valeurs numériques. Mais on enlèverait aux résultats leur caractère de généralité. On sait en effet que les expressions ainsi obtenues sont applicables non seulement au tube étudié mais également à tout tube qui lui est semblable. En particulier elles sont valables pour résoudre l'exemple 3 étudié par M. J. Paschoud, le rapport de similitude étant de  $1/4$ .

#### 4° Tube long illimité.

Nous avons déjà indiqué la façon de tronçonner le tube long illimité ; ceci fait, l'application des formules ne présente aucune difficulté.

Lorsque la variation de l'épaisseur de la paroi est faible, on peut pratiquement se dispenser de faire tous ces calculs. Il suffira de remplacer le tube à étudier par un tube à épaisseur de paroi constante. Le tout est de choisir judicieusement cette épaisseur.

Prenons comme exemple le tube étudié par M. le professeur Dumas et représenté sur la figure 5, page 204 du Bulletin technique n°s 15 et 16 de 1945.

On suppose que l'extrémité de ce tube est soumise à un moment fléchissant  $M_0$ .

Si l'on jette un coup d'œil sur la figure 15 du B. V. 1945-1, on constate que la partie la plus déformable d'un tube à épaisseur de paroi constante s'étend sur environ un quart de longueur d'onde.

Dans le cas qui nous occupe, le quart de la longueur d'onde est approximativement égal à

$$\frac{\pi}{2\alpha} = \frac{\pi \sqrt{50 \times 5}}{2 \times 1,285} = 19,3 \text{ cm.}$$

L'épaisseur moyenne de ce tronçon est

$$h_m = 5 + \frac{0,02 \times 19,3}{2} = 5,193 \text{ cm.}$$

Remplaçons le tube à étudier par un tube constant dont l'épaisseur est 5,193 cm.

La flèche à l'extrémité de ce tube aura pour valeur (formule 160\*)

$$y = -\frac{2 \alpha^2 b}{h E} M_0$$

$$\text{or } \alpha = \frac{1,285}{\sqrt{50 \times 5,193}} = 0,0797 \text{ cm}^{-1}$$

d'où

$$y = -\frac{2 \times 0,0797^2 \times 50}{5,193} \frac{M_0}{E}$$

$$y = -0,1225 \frac{M_0}{E}$$

Pour comparer ce résultat avec la flèche obtenue par M. Dumas, il faut remplacer

$$M_0 \text{ par } -M_0 \times 50$$

$$E \text{ par } 0,91 E_b$$

et multiplier le numérateur et le dénominateur du second membre par

$$I = \frac{5^3}{12}$$

L'expression de la flèche devient

$$y = 0,1225 \frac{50 \times M_0}{0,91 E_b I}$$

en posant

$$\frac{M_0}{E_b I} = 1 \text{ cm}^{-1}$$

on obtient

$$y = 0,1225 \frac{50 \times 5^3}{0,91 \times 12} = 70 \text{ cm.}$$

M. Dumas a obtenu une flèche de 70,52 cm.

D'autre part, on sait que le renforcement d'un tube (ce renforcement peut être négatif ou positif) n'a pas grande influence sur la courbe des moments fléchissants. Cette remarque faite en étudiant notre deuxième exemple est confirmée d'autre part par les résultats de M. Dumas : en effet, d'après la figure 7 de l'étude en question, la courbe  $y''$  qui représente, à un facteur près, celle des moments fléchissants, est la même pour les trois cas : tube croissant, tube constant, tube décroissant.

De ces constatations, on peut tirer les conclusions suivantes :

Pour l'étude d'un tube illimité à paroi d'épaisseur linéairement variable, soumis à son extrémité à un moment fléchissant, on peut, lorsque la variation de l'épaisseur de la paroi est faible, remplacer ce tube par un tube équivalent d'épaisseur de paroi constante, cette épaisseur étant mesurée sur le tube à épaisseur de paroi variable à une distance de son extrémité égale au  $1/8$  de la longueur d'onde.

Il est bien entendu que cette règle est valable seulement pour le calcul de la ligne élastique et de la courbe des moments fléchissants ; pour le calcul des contraintes, on tiendra compte de l'épaisseur réelle de la paroi du tube.