Zeitschrift: Bulletin technique de la Suisse romande

Band: 72 (1946)

Heft: 22

Artikel: Le calcul d'un tube cylindrique de révolution à épaisseur de paroi

variable

Autor: Tâche, J.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-54637

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 19.11.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

BULLETIN TECHNIQUE

DE LA SUISSE ROMANDE

ABONNEMENTS:

Suisse: 1 an, 17 francs Etranger: 20 francs

Pour sociétaires:

Suisse: 1 an, 14 francs Etranger: 17 francs

Prix du numéro: 75 centimes

Pour les abonnements s'adresser à la librairie F. Rouge & C^{1e}, à Lausanne. Paraissant tous les 15 jours

Organe de la Société suisse des ingénieurs et des architectes, des Sociétés vaudoise et genevoise des ingénieurs et des architectes, de l'Association des anciens élèves de l'Ecole polytechnique de l'Université de Lausanne et des Groupes romands des anciens élèves de l'Ecole polytechnique fédérale.

COMITÉ DE PATRONAGE. — Président: R. Neeser, ingénieur, à Genève; Vice-président: G. EPITAUX, architecte, à Lausanne; secrétaire: J. Calame, ingénieur, à Genève. Membres: Fribourg: MM. L. HERTLING, architecte; P. Joye, professeur; Vaud: MM. F. Chenaux, ingénieur; E. Elskes, ingénieur; E. D'OKOLSKI, architecte; A. Paris, ingénieur; Ch. Thévenaz, architecte; Genève: MM. L. Archinard, ingénieur; E. Martin, architecte; E. Odier, architecte; Neuchâtel: MM. J. Béguin, architecte; G. Furter, ingénieur; R. Guye, ingénieur; Valais: M. J. Dubius, ingénieur; A. De Kalbermatten, architecte.

RÉDACTION: D. BONNARD, ingénieur. Case postale Chauderon 475, LAUSANNE.

Publicité : TARIF DES ANNONCES

Le millimètre (larg. 47 mm.) 20 cts. Tarif spécial pour fractions de pages. En plus 20% de majoration de guerre Rabais pour annonces



ANNONCES-SUISSES s.a. 5, rue Centrale LAUSANNE & Succursales.

CONSEIL D'ADMINISTRATION DE LA SOCIÉTÉ ANONYME DU BULLETIN TECHNIQUE A. STUCKY, ingénieur, président; M. Bridel; G. Epitaux, architecte; R. Neeser, ingénieur.

SOMMAIRE: Le calcul d'un tube cylindrique de révolution à épaisseur de paroi variable (suite et fin), par J. Tache, ingénieur E. I. L.

— Chronique de la propriété industrielle: Le rôle de la revendication dans le brevet suisse. L'appréciation de la différence entre l'invention et la simple mesure constructive. — Société suisse des ingénieurs et des architectes: Groupe professionnel des architectes pour les relations internationales. — Les congrès: Réunion de la Commission internationale des Grands Barrages; Association internationale des Ponts et Charpentes. — Bibliographie. — Carnet des concours. — Service de placement. — Informations diverses.

Le calcul d'un tube cylindrique de révolution à épaisseur de paroi variable

par J. TÂCHE, ingénieur E. I. L.

(Suite et sin 1).

Applications.

1º Tube très court.

Considérons un tube de section triangulaire soumis en O à un moment fléchissant M_0 , figure 3, et supposons que la longueur l soit suffisamment courte pour que les coefficients k puissent être exprimés par leur premier terme seulement.

Calculons la valeur de ω_0 par la formule (13).

y

No Mo D

Y

Y

Y

Y

Fig. 3.

On a

$$(59) \qquad k_{4} = \frac{6}{\alpha_{m}^{3} l^{3}} \frac{3}{2} = \frac{9}{\alpha_{m}^{3} l^{3}}.$$

Faisons le même calcul en considérant ce tube très court comme un anneau. On sait que la section triangulaire de l'anneau s'incline d'un angle ω donné par la formule (344), page 39 du B. V. 1943, et qui, traduite dans notre notation, s'écrira

¹ Voir Bulletin technique du 12 octobre 1946, p. 273.

(60)
$$\omega = \frac{b M_0}{E I}.$$

Dans cette formule, I désigne le moment d'inertie de la section triangulaire pris par rapport à l'axe yy.

On a

$$I = \frac{h_0 l^3}{36}.$$

En portant cette valeur dans la relation (60), on obtient

(61)
$$\omega = \frac{36 \, b \, M_0}{h_0 \, l^3 \, E}.$$

En comparant les formules (59) et (61), on constate que $\omega_0 = \omega$. On pourrait poursuivre la comparaison et on constaterait la parfaite concordance entre les formules obtenues en considérant la pièce étudiée d'une part comme un tube très court et d'autre part comme un anneau.

2º Tube court.

Nous choisirons comme exemple le tube étudié par M. Paschoud (exemple 2).

Pour plus de généralité, nous admettrons que le tube est soumis non seulement aux perturbations M_A et T_A mais encore à la perturbation N, formule (16). Sur la figure 4 seule la force L est représentée, mais il est facile de s'imaginer l'existence de la pression intérieure p_i et de la pression extérieure p_e qui entrent dans l'expression de N.

Après avoir dessiné le plus exactement possible le profil à contour curviligne, nous l'avons remplacé par un profil trapézoïdal représenté par la figure 4.

Les données sont donc les suivantes:

1er troncon:

$$h_0 = 5,5 \text{ cm}$$
 $l = 8,4 \text{ cm}$ $h_1 = 1,9 \text{ cm}$ $b = 115 \text{ cm}$

2e tronçon:

$$\begin{array}{lll} h_2 = 1{,}9 \ \ \mathrm{cm} & b = 115 \quad \ \mathrm{cm} \\ l = \mathrm{illimit\acute{e}} & \end{array}$$

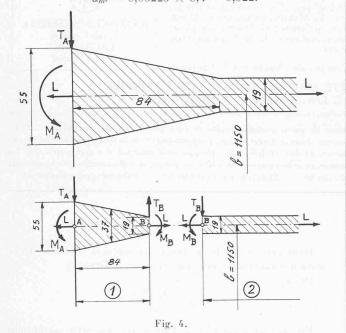
Calcul des caractéristiques du 1er tronçon :

$$|\beta| = \frac{55 - 19}{55 + 19} = 0,486$$

$$h_m = \frac{5.5 + 1.9}{2} = 3,7 \text{ cm}$$

$$\alpha_m = \frac{1,285}{\sqrt{115 \times 3,7}} = 0,06225 \text{ cm}^{-1}$$

$$\alpha_m l = 0,06225 \times 8,4 = 0,522.$$



Le tronçon 1 est donc bien un tronçon court. Pour le calcul des k, on établit le tableau ci-dessous :

Calcul de la caractéristique du 2e tronçon :

$$\alpha_2 = \frac{1{,}285}{\sqrt{115 \times 1{,}9}} = 0.0867~\text{cm}^{-1}.$$

On calcule ensuite y_{B1} et ω_{B1} comme appartenant au tronçon 1, en utilisant les formules (14) et (15).

On obtient

$$(62) \quad y_{B_1} = \frac{2 \alpha_m b}{h_m E} \begin{bmatrix} T_A 2,0777 + \alpha_m M_A 13,84 + T_B 5,177 - \\ -\alpha_m M_B 13,937 + N 1,541 \end{bmatrix}$$

$$(63) \quad \omega_{B_{1}} = \frac{2 \alpha_{m}^{2} b}{h_{m} E} \begin{bmatrix} T_{A} 9,982 + \alpha_{m} M_{A} 45,55 + T_{B} 13,937 - \\ -\alpha_{m} M_{B} 47,01 + N 1,9333 \end{bmatrix}$$

D'autre part on peut écrire

(64)
$$\alpha_m = \alpha_2 \frac{\alpha_m}{\alpha_2} = \alpha_2 0.716 \cdot$$

(65)
$$h_m = h_2 \frac{h_m}{h_2} = h_2 0.195.$$

En portant ces valeurs dans les formules (62) et (63), celles-ci deviennent

$$(66) \quad y_{B_1} = \frac{2 \alpha_2 b}{h_2 E} \begin{bmatrix} T_A 0.765 + \alpha_2 M_A 3.660 + T_B 1.910 - \\ -\alpha_2 M_B 3.690 + N 0.568 \end{bmatrix}$$

$$(67) \quad \mathbf{w_{B_1}} = \frac{2 \, \alpha_2^2 b}{h_2 \, E} \begin{bmatrix} T_A \, 2,642 + \alpha_2 \, M_A \, 8,652 + T_B \, 3,690 - \\ -\alpha_2 \, M_B \, 8,940 + N \, 0,5115 \end{bmatrix}$$

Calculons la flèche et la tangente en B du tronçon 2. Si M_B et T_B n'existaient pas, la flèche du tronçon 2 serait donnée par la formule (42^*) , dans laquelle on suppose que

 φ_i et φ_e sont égaux à l'unité. En tenant compte de la relation (16), cette flèche peut se mettre sous la forme

$$y_c = rac{bN}{h_2 l E}$$
 .

Pour harmoniser cette expression avec les autres, on peut écrire

$$y_c = \frac{2 \alpha_2 bN}{h_2 E} \frac{1}{2 \alpha_2 l} = \frac{2 \alpha_2 bN}{h_2 E} 0,687.$$

Si M_A et T_A existaient seuls, la flèche en B serait donnée par la formule (182^*) :

$$y_{B2} = \frac{2 \alpha_2 b}{h_2 E} (-T_B - \alpha_2 M_B).$$

La flèche totale en B du tronçon 2 sera donc

(68)
$$y_{B2} = \frac{2 \alpha_2 b}{h_2 E} (-T_B - \alpha_2 M_B + N 0,687).$$

Indices	1 p	1n	2p	2n	4 p	4n	5p	5n
η	1,35 2,55 5,17 0,007	0,82 0,524 3,14 0,0014	1,261 2,68 13,86 0,077	0,91 0,525 10,00 0,015	1,086 3,38 45,7 1,31	1,086 0,49 45,7 0,19	1,086 1,115 2,08 -0,0023	1,086 1,113 2,08 0,0023
k	5,177	3,1414	13,937	10,015	47,01	45,89	2,0777	2,077
Indices	6 <i>p</i>	6 <i>n</i>	8 <i>p</i>	8 <i>n</i>	9 <i>p</i>	9 <i>n</i>	10 <i>p</i>	10 <i>n</i>
η	1,261 1,16 13,86 0,0196	0,91 1,08 10,00 —0,018	1,086 1,12 45,7 —0,15	1,086 1,12 45,7 —0,15	1,611 0,440 1,541 0,00015	0,5575 0,197 0,5335 0,00007	0,5275 0,450 1,932 0,0013	-0,5273 0,200 -1,932 0,000
k	13,8404	9,982	45,55	45,55	1,54115	0,53357	1,9333	-1,931

La tangente en B du tronçon 2 sera donnée par la formule (185^*) :

(69)
$$\omega_{B2} = \frac{2 \alpha_2^2 b}{h_2 E} (T_B + 2 \alpha_2 M_B).$$

En posant

$$y_{B_1} = y_{B_2}$$
 et $\omega_{B_1} = \omega_{B_2}$

on obtient les deux équations suivantes qui nous permettront d'exprimer T_B et M_B en fonction de T_A et M_A et N

2,910
$$T_B$$
 – 2,690 α_2 M_B = -0.765 T_A – 3,660 α_2 M_A + 0,119 N .
2,690 T_B – 10,94 α_2 M_B = -2.642 T_A – 8,655 α_2 M_A – 0,5115 N .

En résolvant ces deux équations on obtient

(70)
$$T_B = -0.051 T_A - 0.682 \alpha_2 M_A + 0.109 N.$$

(71)
$$\alpha_2 M_B = 0.229 T_A + 0.622 \alpha_2 M_A + 0.0735 N.$$

Connaissant T_B et z_2 M_B , on peut calculer y_A et ω_A en appliquant les formules (12) et (13). Après avoir fait les mêmes substitutions que pour les formules (62) et (63), on a

$$(72) \quad y_A = -\frac{2 \alpha_2 b}{h_2 E} \ (0.513 \ T_A + 0.483 \ \alpha_2 \ M_A - 0.307 N).$$

(73)
$$\omega_A = \frac{2 \alpha_2^2 b}{h_2 E} (0.483 T_A + 0.850 \alpha_2 M_A + 0.274 N).$$

Enfin, en remplaçant dans (68) et (69) T_B et α_2 M_B par leur valeur (relations 70 et 71), on obtient

(74)
$$y_B = \frac{2 \alpha_2 b}{b_A E} (-0.1777 T_A + 0.060 \alpha_2 M_A + 0.5045 N).$$

$$(74) \quad y_B = \frac{2 \, \alpha_2 \, b}{h_2 \, E} \, (-0.1777 \, T_A + 0.060 \, \alpha_2 \, M_A + 0.5045 \, N).$$

$$(75) \quad \omega_B = \frac{2 \, \alpha_2^2 \, b}{h_2 \, E} \, (0.4067 \, T_A + 0.562 \, \alpha_2 \, M_A + 0.256 \, N).$$

Le problème peut être considéré comme résolu.

Remarquons que les calculs ont été conduits de façon à introduire dans les formules le moins possible de valeurs numériques.

Celles qui y figurent sont : les coefficients k, l'expression α_2 l et les rapports $\frac{\alpha_m}{\alpha_2}$ et $\frac{h_m}{h_2}$. Il est facile de voir que ces valeurs ne changent pas si l'on multiplie toutes les dimensions du tube étudié par un facteur quelconque.

On en conclut que les résultats obtenus sont valables non seulement pour le tube étudié, mais encore pour tout tube qui lui est semblable.

Comparons les résultats avec ceux obtenus par M. Pas-

Il faut d'abord supposer que N est nul.

Pour passer de notre notation à celle de M. Paschoud, il faut remplacer

$$\begin{array}{ll} M_A \ \mathrm{par} \ -- M_0 b \\ T_A \ \mathrm{par} \ -- T_0 b \\ E \ \mathrm{par} \ 0.91 \, E_b. \end{array}$$

La relation (72) devient

$$y_A = \frac{2 \alpha_2 b^2}{h \ 0.91} \left(0.513 \ \frac{T_0}{E} + 0.483 \ \alpha_2 \ \frac{M_0}{E} \right).$$

En posant $\frac{T_0}{E} = 1$ mm et $\frac{M_0}{E} = 1$ mm², et en calculant le tout en millimètres, on a

$$y_A = 685$$
 mm.

M. Paschoud a obtenu 689 mm.

Revenons aux relations (70) à (75), qui représentent la solution la plus générale du problème. Les termes en T_{A} et M_A sont ceux qu'on obtiendrait en résolvant l'équation différentielle (4) sans second membre, tandis que les termes en N correspondent à la solution particulière de l'équation différentielle (4) avec second membre.

Les formules (70) à (75) permettent de résoudre une foule de cas particuliers. Pour ne pas allonger cette étude, nous choisirons parmi eux ceux qui nous paraissent les plus caractéristiques et les analyserons rapidement.

Premier cas particulier: N=0.

Si le tube, au lieu d'être renforcé, était d'épaisseur constante h_2 , la flèche à son extrémité aurait la valeur

(76)
$$y_{h=\text{constant}} = -\frac{2 \alpha_2 b}{h_2 E} (T_A + \alpha_2 M_A).$$

En comparant (76) à (72), on constate que le renforcement du tube a pour effet de diminuer la flèche produite par l'effort tranchant T_A dans le rapport 1 à 0,513 et celle engendrée par le moment M_A dans le rapport 1 à 0,483.

Pour analyser plus à fond ce cas particulier, il est indispensable d'étudier séparément l'action de T_A et M_A . Nous nous bornerons à analyser l'influence de M_A . Ce sera une occasion de montrer la manière d'appliquer les autres for-

Deuxième cas particulier : N = 0 ; $T_A = 0$.

Choisissons, comme flèche étalon, la valeur absolue de la flèche en A produite par M_A si le tube n'était pas renforcé :

$$f_e = \frac{2 \alpha_2^2 b M_A}{h_2 E}$$

et comme tension étalon la valeur

$$\sigma_e = rac{2 \; lpha_2^2 \, M_A}{h_2} \, .$$

Les formules (70) et (75) nous donnent

(77)
$$y_A = -0.483 f_e$$
.

(78)
$$\omega_A = 0.850 \,\alpha_2 \,f_e$$

$$(79) y_B = 0.060 f_e.$$

(80)
$$\omega_B = 0.562 \,\alpha_2 \,f_{\epsilon}.$$

(81)
$$T_B = -0.682 \alpha_2 M_A$$
.

$$(82) M_B = 0.622 M_A.$$

Les formules (77) à (80) nous permettent de tracer la ligne élastique du tronçon 1 ; cette ligne est déterminée par y_A , y_B ainsi que par les tangentes ω_A et ω_B en ces points, donc en tout par quatre points, ce qui est amplement suffisant en pratique, voir figure 5.

La ligne élastique du tronçon 2 est donnée par la formule (176*) (voir page 27 du B. V. 1945-1).

Pour appliquer cette formule, il faut remplacer

$$lpha M_0 \quad {
m par} \quad lpha_2 M_B \ T_0 \quad \ \ \ \ \ \ \ \ \, T_B.$$

En tenant compte des relations (81) et (82), on obtient $y_2 = f_e e^{-\alpha_2 x} (0.622 \sin \alpha_2 x + 0.060 \cos \alpha_2 x).$

La courbe des moments fléchissants du tronçon 1 est définie par

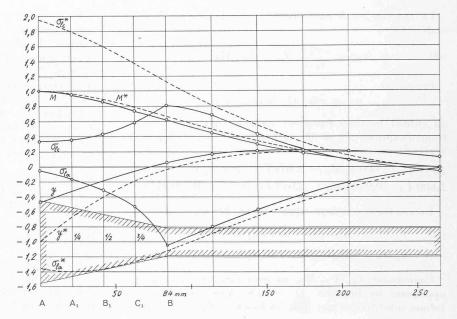
$$M_A = M_A,$$

$$M_B = 0.622 M_A$$

Fig. 5.

Unité des moments = M_A " " flèches = $\frac{2\alpha_2^2 b M_A}{h_2 E}$ " " tensions = $\frac{2\alpha_2^2 M_A}{h_A}$

Les courbes dont la lettre est surmontée d'un astérisque se rapportent au tube non renforcé.



ainsi que par les tangentes en ces points

$$\begin{split} T_A &= 0 \\ T_B &= -0.682 \; \mathbf{\alpha_2} \; M_A. \end{split}$$

Si l'on désire calculer les points intermédiaires A_1 , B_1 et C_1 , on appliquera les formules (43), (44) et (45). On obtient ainsi

$$M_{1/4} = 0,959 M_A$$

 $M_{1/2} = 0,866 M_A$
 $M_{3/4} = 0,745 M_A$.

Pour obtenir la courbe des moments fléchissants du tronçon 2, on applique la formule (178*) du B. V. déjà cité. Tous calculs faits on a

$$M_{\rm 2} = M_{\rm A} \, e^{-\alpha_{\rm 2} x} (-0.060 \, \sin \alpha_{\rm 2} \, x \, + \, 0.622 \, \cos \alpha_{\rm 2} \, x).$$

Après avoir tracé la courbe des flèches et celle des moments fléchissants, figure 5, on est en possession de toutes les données pour calculer les contraintes. Nous appliquerons les formules générales (113*) et (120*). Cette dernière peut se transformer et se mettre sous la forme

(83)
$$\sigma_l = \sigma_e \left[-n \frac{y}{f_e} \pm \sqrt{3(1-n^2)} \left(\frac{h_2}{h} \right) \frac{^2M}{M_A} \right].$$

Pour compléter cette étude, nous avons représenté également la ligne élastique du tube non renforcé (formule 160*)

$$y_{h=h_2}^* = f_e e^{-\alpha_2 x} (\sin \alpha_2 x - \cos \alpha_2 x).$$

et la courbe des moments fléchissants du tube non renforcé (formule 162^{\star})

$$M_{h=h_0}^* = M_A e^{-\alpha_2 x} (\sin \alpha_2 x + \cos \alpha_2 x).$$

On remarque que le renforcement du tube n'étouffe pas d'une façon très appréciable le moment fléchissant ¹.

Sur la figure 5, les courbes σ_{lc}^* et σ_{la}^* représentent les tensions de comparaison extérieure et intérieure du tube non

renforcé. On remarque que le renforcement diminue surtout ces tensions en A et beaucoup moins en B. Le renforcement n'est donc pas très heureux au point de vue de l'économie de matière. Il est inutilement épais en A. Il serait donc avantageux de diminuer l'épaisseur en A et d'augmenter la longueur du tronçon renforcé de façon à déplacer le point B dans la zone où le moment fléchissant est davantage amorti.

Troisième cas particulier.

Le tube est soumis à une traction axiale P. La force axiale par unité d'angle sera

$$L = \frac{P}{2\pi}$$

La tension longitudinale dans le tube au large de la perturbation, c'est-à-dire à une distance suffisante de celle-ci pour que les tensions qui en résultent puissent être considérées comme négligeables, sera

$$\sigma_l = rac{P}{2\pi \ bh_2} = rac{L}{bh_2} = \sigma_e.$$

Nous choisirons cette tension comme tension étalon.

La flèche au large de la perturbation sera donnée par la formule (42^*) :

$$y_c = -\frac{nL}{h_2 E}.$$

La valeur absolue de cette flèche sera choisie comme flèche étalon:

$$y_e = rac{nL}{h_2 \, E} \cdot$$

En outre, comme unité des moments fléchissants, nous adopterons la valeur $0.1 Lh_2$.

Ceci posé, nous nous proposons d'envisager divers genres de liaison en A.

Premier genre de liaison : Le tube en A est complètement libre ; cette condition se traduit en posant $T_A=0$ et $M_A=0$.

En tenant compte que $N=-\frac{nLl}{b}$ (formule 16), les relations (70) à (75) deviennent

¹ Cette remarque est de la plus grande importance pour le constructeur lorsqu'il doit déterminer les dimensions du renforcement d'un tube. Elle lui évitera bien des tâtonnements et lui épargnera des calculs longs et inutiles. En effet, il calculera d'abord la courbe des moments fléchissants comme si le tube n'était pas renforcé et se basera sur elle pour fixer les dimensions du renforcement. Un calcul de contrôle exact lui montrera ensuite si les valeurs admises sont judicieusement choisies.

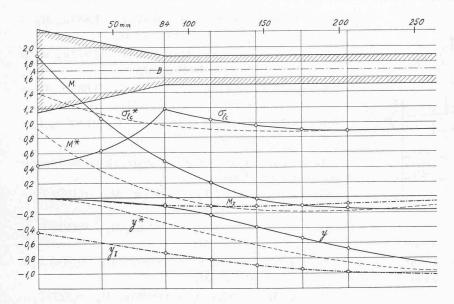


Fig. 6.
Unité des moments = 0,1
$$Lh_2$$

»
» flèches = $\frac{nL}{h_2E} = |y_e|$

»
» tensions = $\frac{L}{bh_2}$

 y_I et M_I représentent la ligne élastique et la courbe des moments fléchissants du tube renforcé, soumis à une traction L et dont l'extrémité A est libre.

y et M se rapportent au même tube mais dont l'extrémité A est encastrée sur une plaque infiniment rigide.

y* et M* se rapportent au tube non renforcé dont l'extrémité A est encastrée sur une plaque infiniment rigide.

$$\begin{split} T_{B} &= -0.00239 \, L \\ \alpha_{2} \, M_{B} &= -0.00161 \, L \\ y_{4} &= -0.447 \, y_{e} \\ \omega_{4} &= -0.399 \, \alpha_{2} \, y_{e} \\ y_{B} &= -0.734 \, y_{e} \\ \omega_{B} &= -0.373 \, \alpha_{2} \, y_{e}. \end{split}$$

En appliquant les formules (476^*) et (478^*) déjà citées, on pourra tracer la courbe des flèches y_I et celle des moments fléchissants M_I , voir figure 6.

Si le tube n'était pas renforcé, les moments fléchissants seraient nuls et la ligne élastique serait une droite parallèle à l'axe des x et d'ordonnée — y_e .

On voit que le renforcement du tube diminue la flèche en A dans le rapport 1 à 0,447 et incurve légèrement la ligne élastique en engendrant un moment fléchissant dont la valeur est toutefois assez faible.

Deuxième genre de liaison : L'extrémité A du tube est solidaire d'une plaque infiniment rigide.

Cette condition se traduit par $y_A = 0$ et $\omega_A = 0$. Les relations (72) et (73) nous donnent

$$0.513 T_A + 0.483 \alpha_2 M_A - 0.307 N = 0.$$

 $0.483 T_A + 0.850 \alpha_2 M_A + 0.274 N = 0.$

En résolvant ces deux équations par rapport à T_A et M_A , on obtient

$$T_A = 1,94 N$$

 $\alpha_2 M_A = -1,425 N.$

En portant ces valeurs dans (70), (71), (74) et (75), on a

$$y_B = -0.109 y_e$$
 $\omega_B = -0.356 \alpha_2 y_e$
 $T_B = 0.9845 N$
 $\alpha_2 M_B = -0.3675 N$

D'après ces valeurs, nous avons établi la ligne élastique y et la courbe des moments fléchissants M, puis celle des tensions longitudinales de comparaison σ_{lc} , figure 6.

A titre de comparaison nous avons, par des calculs simi-

laires, déterminé les mêmes courbes pour le tube non renforcé, désignées sur le graphique par un astérisque.

On constate que le moment fléchissant d'encastrement est environ deux fois plus grand pour le tube renforcé que pour le tube non renforcé. La section dangereuse pour le tube renforcé est en B, tandis que celle du tube non renforcé est en A, où la tension longitudinale extérieure de comparaison est d'environ 40 % supérieure à la tension étalon (traction dans le tube au large de la perturbation). Pour ce cas encore, on remarque qu'il serait plus avantageux de diminuer l'épaisseur du renforcement en A et d'augmenter la longueur de celui-ci.

Troisième genre de liaison: Considérons deux tubes renforcés identiques, retournons l'un d'eux et soudons-les bout à bout. On obtiendra un tube illimité dans les deux sens avec un bourrelet en son milieu.

L'état de perturbation d'un tel tube soumis à une traction longitudinale s'exprimera par les conditions

$$\begin{aligned}
\omega_A &= 0 \\
T_A &= 0.
\end{aligned}$$

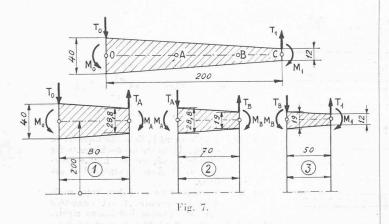
En effet, T_A doit être nul, car par raison de symétrie le moment d'encastrement en A passe par un maximum et par conséquent l'effort tranchant en cet endroit doit être nul.

Nous ne développerons pas davantage cet exemple. Ceux que nous venons de citer montrent les nombreux avantages de la solution algébrique du problème, laquelle permet d'étudier rapidement un grand nombre de cas particuliers.

3º Tube long limité.

Considérons le tube de la figure 7. En calculant $\alpha_m l$ on obtient la valeur 3,566. Le tube est donc trop long pour être étudié comme tronçon unique. Nous le scinderons en trois tronçons de longueur différente choisie de façon que, pour chacun de ces tronçons, la valeur $\alpha_m l$ soit inférieure à 1,5 (voir figure 7).

Les caractéristiques de ces tronçons sont les suivantes:



$$h_{m1} = 3,44 \text{ cm}$$
 $l_1 = 8 \text{ cm}$ $l_{m2} = 2,39 \text{ cm}$ $l_1 = 7 \text{ cm}$ $l_1 = 7 \text{ cm}$ $l_2 = 5 \text{ cm}$

Les caractéristiques du tube entier sont :

$$\alpha_m = 0.1783 \text{ cm}^{-1}$$
 $\alpha_m \ l = 3.566$ $h_m = 2.6 \text{ cm}$ $l = 20 \text{ cm}$

Pour ne pas abuser de la patience de nos lecteurs, nous nous bornerons à indiquer la marche à suivre et à donner les résultats obtenus.

Pour simplifier les calculs, nous avons supposé que N était nul. La marche des opérations n'est toutefois, de ce fait, nullement modifiée.

On dresse d'abord les tableaux des coefficients k en remarquant que

$$\begin{split} \beta_1 &= \frac{40-28,8}{40+28,8} = 0{,}1625. \\ \beta_2 &= \frac{28,8-19}{28,8+19} = 0{,}2050. \\ \beta_3 &= \frac{19-12}{19+12} = 0{,}2258. \end{split}$$

puis en appliquant les formules (12), (13), (14) et (15) on calcule les flèches et tangentes en A et B.

Dans les huit expressions ainsi obtenues, on remplace les $\alpha_{m1},\ \alpha_{m2}$ et α_{m3} par

$$\alpha_{m_1} = \alpha_m \frac{\alpha_{m_1}}{\alpha_m} = \alpha_m \ 0.868$$

etc

On fait la même substitution pour les h_m :

$$h_{m1} = h_m \, \frac{h_{m1}}{h_m} = h_m \, 1,323$$

etc

On obtient les flèches et tangentes en A et B exprimées en fonction de α_m et h_m .

En posant

$$egin{array}{ll} y_{A_1} = y_{A_2} \ & \omega_{A_1} = \omega_{A_2} \ & y_{B_2} = y_{B_3} \ & \omega_{B_2} = \omega_{B_3} \end{array}$$

on obtient les quatre équations suivantes :

$$\begin{array}{ll} (84) & 2,808 \; T_{A} + 0,825 \; \alpha_{m} \, M_{A} + 0,845 \; T_{B} - 1,853 \; \alpha_{m} \, M_{B} = \\ & = -0,5155 \; T_{0} - 1,133 \; \alpha_{m} \, M_{0}. \end{array}$$

(85)
$$0.825 T_A + 6.458 \alpha_m M_A + 2.140 T_B - 2.972 \alpha_m M_B = 1.010 T_0 + 1.415 \alpha_m M_0.$$

$$\begin{array}{ll} (86) & 0.845 \ T_{A} + 2.140 \ \alpha_{m} \ M_{A} + 5.460 \ T_{B} + 3.685 \ \alpha_{m} \ M_{B} = \\ & = -1.858 \ T_{1} + 5.730 \ \alpha_{m} \ M_{1}. \end{array}$$

(87)
$$-1,853T_A = 2,972 \alpha_m M_A + 3,685 T_B + 21,825 \alpha_m M_B =$$

$$= -6,675 T_1 + 13,32 \alpha_m M_1.$$

La résolution de ce système de quatre équations à quatre inconnues nous donne

$$(88) \quad T_{A} = -0.212 \ T_{0} - 0.4695 \ \alpha_{m} \ M_{0} - 0.1678 \ T_{1} + 0.1267 \ \alpha_{m} \ M_{1}.$$

(89)
$$\alpha_m M_A = 0.216 T_0 + 0.301 \alpha_{m_0} M_0 - 0.1128 T_1 - 0.0157 \alpha_m M_1.$$

$$\begin{array}{ll} (90) & T_{\rm \textit{B}} = -~0.0662~T_{\rm \textit{0}} - ~0.0520~\alpha_{\rm \textit{m}}~M_{\rm \textit{0}} - ~0.0485~T_{\rm \textit{1}} + \\ & +~0.6975~\alpha_{\rm \textit{m}}~M_{\rm \textit{1}}. \end{array}$$

(91)
$$\alpha_m M_B = 0.02273 T_0 + 0.00985 \alpha_m M_0 - 0.3275 T_1 + 0.500 \alpha_m M_1.$$

Remarquons en passant que le déterminant des coefficients des quatre inconnues est symétrique. Ce n'est pas un effet du hasard, car la symétrie provient du fait que $k_2=k_3$. Cette remarque est intéressante, car elle permet de contrôler l'exactitude du calcul de ces coefficients.

Il n'est pas du tout nécessaire de connaître la théorie des déterminants pour résoudre ce système d'équations. Nous l'avons appliquée et avons constaté que cette méthode n'est ni plus simple ni plus exacte. Celle qui nous paraît la plus appropriée consiste à supposer d'abord que T_1 et M_1 sont nuls. On calcule alors T_B et z_m M_B au moyen des équations (86) et (87), puis on porte ces valeurs dans (84) et(85). Ayant obtenu les valeurs des quatre inconnues en fonction de T_0 et z_m z_m 0, on suppose ensuite que z_m 0 et z_m 0 sont nuls et l'on résoud le nouveau système d'équations en calculant d'abord les valeurs de z_m 0 may au moyen des équations (84) et (85), valeurs que l'on porte ensuite dans les équations (86) et (87). On obtient ainsi les quatre inconnues en fonction de z_m 1 et z_m 1.

Pour obtenir les flèches et les tangentes en O, A, B et C, il suffira d'appliquer les formules (12), (13), (14) et (15).

$$(92) \quad y_o = \frac{2 \alpha_m b}{h_m E} \begin{pmatrix} -0.672 T_0 - 0.589 \alpha_m M_0 - \\ -0.027 T_1 - 0.081 \alpha_m M_1 \end{pmatrix}.$$

$$(93) \quad y_{A} = \frac{2 \alpha_{m} b}{h_{m} E} \begin{pmatrix} -0.019 T_{0} + 0.171 \alpha_{m} M_{0} - \\ -0.051 T_{1} + 0.167 \alpha_{m} M_{1} \end{pmatrix}$$

$$(94) \quad y_{\rm B} = \frac{2 \alpha_{\rm m} \, b}{h_{\rm m} \, E} \begin{pmatrix} 0.088 \, T_{\rm 0} \, + \, 0.117 \, \alpha_{\rm m} \, \dot{M}_{\rm 0} \, + \\ + \, 0.358 \, T_{\rm 1} + \, 0.199 \, \alpha_{\rm m} \, M_{\rm 1} \end{pmatrix}.$$

$$(95) \quad y_{c} = \frac{2 \alpha_{m} b}{h_{m} E} \begin{pmatrix} 0.029 & T_{0} & -0.031 & \alpha_{m} & M_{0} & + \\ +2.070 & T_{1} & -2.864 & \alpha_{m} & M_{1} \end{pmatrix}.$$

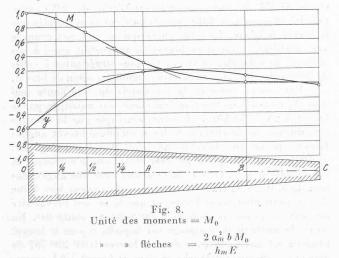
$$(96) \quad \mathbf{w_0} = \frac{2 \, \mathbf{\alpha_m^2} \, b}{h_m \, E} \, \binom{0.588 \, T_0 + 0.968 \, \mathbf{\alpha_m} \, M_0 -}{-0.030 \, T_1 + 0.165 \, \mathbf{\alpha_m} \, M_1}.$$

$$(97) \quad \mathbf{w_{A}} = \frac{2 \, \alpha_{m}^{\, 2} \, b}{h_{m} \, E} \begin{pmatrix} 0.254 \, T_{\, 0} \, + \, 0.133 \, \alpha_{m} \, M_{\, 0} \, + \\ + \, 0.031 \, T_{\, 1} + \, 0.200 \, \alpha_{m} \, M_{\, 1} \end{pmatrix}.$$

$$(98) \quad \mathbf{w}_{B} = \frac{2 \, \mathbf{\alpha}_{m}^{2} \, b}{h_{m} \, E} \left(\begin{array}{c} -0.038 \, T_{0} - 0.161 \, \mathbf{\alpha}_{m} \, M_{0} \, + \\ +0.940 \, T_{1} - 0.649 \, \mathbf{\alpha}_{m} \, M_{1} \end{array} \right)$$

$$(99) \quad \mathbf{w}_{\mathrm{C}} = \frac{2 \, \alpha_{\mathrm{m}}^{2} \, b}{h_{\mathrm{m}} \, E} \begin{pmatrix} -0.078 \, T_{\mathrm{0}} - 0.167 \, \alpha_{\mathrm{m}} \, M_{\mathrm{0}} + \\ +2.842 \, T_{\mathrm{1}} - 8.760 \, \alpha_{\mathrm{m}} \, M_{\mathrm{1}} \end{pmatrix}$$

On peut considérer le problème comme résolu. La ligne élastique est déterminée par les quatre flèches et les quatre tangentes en O, A, B, C, donc par huit points. Il en est de même de la courbe des moments fléchissants. A titre d'exemple, le graphique de la figure 8 donne la ligne élastique et la courbe des moments fléchissants établies en supposant que toutes les perturbations sont nulles à l'exception de M_0 .



y et M représentent la ligne élastique et la courbe des moments fléchissants du tube de la figure 7 soumis seulement au moment M_0 ($T_0 = M_1 = T_1 = 0$).

Nous renonçons à analyser les formules ci-dessus, car cela nous entraînerait trop loin de notre sujet. Soulignons seulement que la comparaison des expressions (92) et (95) nous montre par exemple qu'un effort tranchant appliqué à l'extrémité mince du tube produit en C une flèche qui, en valeur absolue, est 2,070:0,672 fois plus grande que la flèche produite en O par le même effort tranchant agissant à l'extrémité épaisse.

Le problème pourrait être traité plus rapidement si l'on introduisait dès le début les valeurs numériques. Mais on enlèverait aux résultats leur caractère de généralité. On sait en effet que les expressions ainsi obtenues sont applicables non seulement au tube étudié mais également à tout tube qui lui est semblable. En particulier elles sont valables pour résoudre l'exemple 3 étudié par M. J. Paschoud, le rapport de similitude étant de 1/4.

4º Tube long illimité.

Nous avons déjà indiqué la façon de tronçonner le tube long illimité ; ceci fait, l'application des formules ne présente aucune difficulté.

Lorsque la variation de l'épaisseur de la paroi est faible, on peut pratiquement se dispenser de faire tous ces calculs. Il suffira de remplacer le tube à étudier par un tube à épaisseur de paroi constante. Le tout est de choisir judicieusement cette épaisseur.

Prenons comme exemple le tube étudié par M. le professeur Dumas et représenté sur la figure 5, page 204 du Bulletin technique n°s 15 et 16 de 1945.

On suppose que l'extrémité de ce tube est soumise à un moment fléchissant M_0 .

Si l'on jette un coup d'œil sur la figure 15 du B. V. 1945-1, on constate que la partie la plus déformable d'un tube à épaisseur de paroi constante s'étend sur environ un quart de longueur d'onde.

Dans le cas qui nous occupe, le quart de la longueur d'onde est approximativement égal à

$$\frac{\pi}{2\alpha} = \frac{\pi\sqrt{50 \times 5}}{2 \times 1,285} = 19,3 \text{ cm}.$$

L'épaisseur moyenne de ce tronçon est

$$h_m = 5 + \frac{0.02 \times 19.3}{2} = 5.193$$
 cm.

Remplaçons le tube à étudier par un tube constant dont l'épaisseur est 5,193 cm.

La flèche à l'extrémité de ce tube aura pour valeur (formule 160^*)

$$y = -\frac{2 \alpha^2 b}{hE} M_0$$
 or
$$\alpha = \frac{1,285}{\sqrt{50 \times 5,193}} = 0,0797 \text{ cm}^{-1}$$
 d'où
$$y = -\frac{2 \times 0,0797^2 \times 50}{5,193} \frac{M_0}{E}$$

$$y = -0,4225 \frac{M_0}{E}.$$

Pour comparer ce résultat avec la flèche obtenue par M. Dumas, il faut remplacer

$$M_{0}$$
 par $-M_{0} \times 50$
 E par 0,91 E_{b}

et multiplier le numérateur et le dénominateur du second membre par

$$I = \frac{5^3}{12}$$

L'expression de la flèche devient

$$y = 0.1225 \frac{50 \times M_0}{0.91 E_b} \frac{I}{I}$$

 $\frac{M_0}{E_b I} = 1 \text{ cm}^{-1}$

en posant

on obtient

$$y = 0.1225 \frac{50 \times 5^3}{0.91 \times 12} = 70 \text{ cm}.$$

M. Dumas a obtenu une flèche de 70,52 cm.

D'autre part, on sait que le renforcement d'un tube (ce renforcement peut être négatif ou positif) n'a pas grande influence sur la courbe des moments fléchissants. Cette remarque faite en étudiant notre deuxième exemple est confirmée d'autre part par les résultats de M. Dumas : en effet, d'après la figure 7 de l'étude en question, la courbe y'' qui représente, à un facteur près, celle des moments fléchissants, est la même pour les trois cas : tube croissant, tube constant, tube décroissant.

De ces constatations, on peut tirer les conclusions suivantes:

Pour l'étude d'un tube illimité à paroi d'épaisseur linéairement variable, soumis à son extrémité à un moment fléchissant, on peut, lorsque la variation de l'épaisseur de la paroi est faible, remplacer ce tube par un tube équivalent d'épaisseur de paroi constante, cette épaisseur étant mesurée sur le tube à épaisseur de paroi variable à une distance de son extrémité égale au 1/8 de la longueur d'onde.

Il est bien entendu que cette règle est valable seulement pour le calcul de la ligne élastique et de la courbe des moments fléchissants; pour le calcul des contraintes, on tiendra compte de l'épaisseur réelle de la paroi du tube.