Zeitschrift: Bulletin technique de la Suisse romande

Band: 71 (1945)

Heft: 15-16: 25me anniversaire du Laboratoire d'essai des matériaux de l'Ecole d'ingénieurs de Lausanne

Artikel: Recherche de l'élastique d'un tube cylindrique de révolution à épaisseur variable

Autor: Paschoud, Jacques

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-54101

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 26.01.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

Extrémité A ($\varphi = \alpha = 90^o$; $\sin \alpha = 1$; $\cos \alpha = 0$).

$$v = -0{,}11733 + 0{,}11734 \simeq 0. \quad (1)$$

$$\frac{d^2v}{dx^2} = -0{,}11733 + 0{,}11734 \simeq 0. \quad (2)$$

$$\frac{d^3v}{dx^3} = 0. \quad (3)$$

Equilibre général :

$$-0{,}02439 + 0{,}56439 - 0{,}02439 + 0{,}56439 = 1{,}08 \text{ cm}$$
$$1{,}08 = 1{,}08. \quad (4)$$

Section médiane :

$$\frac{dv}{dx} = 0) + 0{,}02439 - 0{,}02439 - 0{,}56439 + 0{,}56439 = 0. \quad (5)$$

La compression du sol atteint, sous la charge ponctuelle ($x = 0$; $\varphi = 0$)

$$v = +0{,}02439.1.1 + 0{,}56439.1.1 = 0{,}58878 \text{ cm}$$

et le moment fléchissant médian

$$M = -(EJ)\frac{d^2v}{dx^2} = +5\,451\,100 \text{ cm k} = +54{,}51 \text{ mt}$$

un chiffre naturellement plus fort que sous la base répartitrice.

Conclusions.

Supposant l'élasticité parfaite du sol comprimé, mais abstraction faite de l'entraînement dû aux déformations inégales, supposant donc la proportionalité des enfoncements avec les efforts verticaux, qui les provoquent, on montre que les conditions aux extrémités de la poutre de longueur limitée, et celles aux affleurements de la poutre de longueur illimitée, conduisent le calcul à des fonctions trigonométriques amorties par des exponentielles à exposants négatifs et positifs. Les constantes d'intégration donnent aux puissances négatives du nombre *e* une influence prépondérante, mais laissent subsister dans tous les cas étudiés les termes à exposant positif ; l'absence de ces derniers aurait empêché de donner satisfaction simultanée à toutes les conditions d'extrémités, de contiguïté et d'équilibre.

On remarque, en passant, que l'élasticité de la poutre abaisse ses moments fléchissants maximums en concentrant la pression du sol aux abords de la charge ; la longueur de la cuvette de pénétration ne dépend toutefois pas de la grandeur de la charge sur le sol censé élastique linéairement, mais seulement de sa disposition.

On voit enfin, à travers un sommier armé, que la transmission des charges se fait probablement sur une largeur plus grande que ne le fait la répartition à 45° généralement admise ; l'élasticité relative du sol et de la poutre influencent cette largeur dans une proportion que le laboratoire de statique pourrait aider à fixer pratiquement.

Recherche de l'Elastique d'un tube cylindrique de révolution à épaisseur variable,

par Jacques PASCHOUD, ingénieur E. I. L.,
ingénieur aux Usines Paillard S. A., Sainte-Croix.

1. Introduction.

Dans son article paru dans ce même numéro, M. le professeur A. Dumas expose les difficultés très grandes qui s'opposent à l'intégration algébrique rigoureuse des équations différentielles des enveloppes et il s'attache particulièrement à l'étude du tube cylindrique de révolution à épaisseur variable. Il montre comment, en généralisant la solution de l'équation différentielle du tube à épaisseur constante, on peut obtenir les déformations dans la section origine du tube. Partant de ces déformations, il est alors possible de trouver toute l'élastique par une intégration numérique ou graphique point par point. Cette méthode a l'avantage considérable d'être immédiatement applicable à n'importe quel cas d'enveloppe de révolution. Par contre, elle ne peut être utilisée que pour des enveloppes axialement illimitées dans un sens, ou du moins que l'on peut considérer comme telles en vertu du principe de Saint-Venant. Enfin, pour trouver la déformation en un point quelconque de cette enveloppe, elle exige une intégration point par point numérique ou graphique à partir de la section origine.

Nous attachant au seul cas du tube cylindrique de révolution à épaisseur variable sollicité dans la section origine par un moment fléchissant et un effort tranchant répartis uniformément dans cette section, nous avons cherché à mettre l'élastique de ce tube sous une forme algébrique propre à permettre la détermination suffisamment précise des déformations en un point quelconque, et ceci par simple substitution de nombres aux symboles algébriques. Notre but était encore d'envisager non seulement le problème du tube illimité axialement mais aussi toutes les conditions aux limites possibles pour la section terminale du tube.

2. Principe de la méthode.

L'idée développée fut la suivante : chercher une loi régissant la variation d'épaisseur du tube qui permette, par l'intégration rigoureuse de l'équation différentielle proposée d'obtenir l'élastique du tube sous la forme d'une fonction connue ; puis généraliser cette fonction de façon à pouvoir envisager d'autres lois de variation d'épaisseur.

Avant de développer ce principe, nous voudrions attirer l'attention sur le fait que les calculs effectués pour obtenir le résultat algébrique paraîtront probablement un peu longs ; néanmoins l'application de ce résultat, *acquis une fois pour toutes*, à un problème numérique donné sera beaucoup plus courte.

3. Transformation de l'équation différentielle du tube.

Considérons l'équation du tube cylindrique de révolution à épaisseur variable sollicité dans sa section origine par un moment et un effort tranchant uniformément répartis sur cette section. Cette équation a été établie en détails par M. le professeur A. Dumas dans son article précité, auquel le lecteur est prié de se reporter. Notons en passant que pour établir cette équation, on envisage un rayon moyen constant du tube. Par conséquent, en toute rigueur, l'épaisseur devra varier symétriquement par rapport au cylindre moyen. Si ce n'est pas le cas, les variations relatives de ce rayon moyen devront tout au moins être faibles.

En utilisant les mêmes notations et les mêmes conventions de signes que le professeur Dumas, l'équation différentielle s'écrit :

$$y^{IV} + 6\frac{h'}{h}y''' + 3\left[2\left(\frac{h'}{h}\right)^2 + \frac{h''}{h}\right]y'' + \frac{A}{h^2}y = 0. \quad (1)$$

y = ordonnée courante de l'élastique cherchée ;
h = épaisseur variable, suivant une loi quelconque ;
A = constante $= \frac{12}{r^2}\left(1 - \frac{1}{m^2}\right)$;
r = rayon moyen du tube ;
m = coefficient de contraction latérale ; $1/m = 0{,}3$ pour l'acier.

Les dérivées sont prises par rapport à l'abscisse courante x.

Transformons cette équation différentielle en changeant de variable ; posons :

$$t = h^3$$

d'où

$$t' = 3\,h^2h'$$
$$t'' = 3\,[2hh'^2 + h^2h'']$$

et introduisons dans l'équation différentielle (1) après l'avoir multipliée par $t = h^3$; il vient :

$$ty^{IV} + 2t'y''' + t''y'' + At^{1/3}y = 0. \quad (2)$$

Mise sous cette forme, cette équation différentielle rappelle, par la forme de ses trois premiers termes, l'équation différentielle dite d'Euler :

$$x^n y^{(n)} + p_1 x^{n-1} y^{(n-1)} + \ldots + p_n y = 0$$

dont on connaît une solution particulière :

$$y = x^K \text{ où } K \text{ est une constante.}$$

4. Equation caractéristique généralisée.

Par analogie, posons

$y = t^K$ où K est une constante à déterminer.

Il est fort probable que cette expression de y ne satisfera pas à l'équation différentielle proposée quelle que soit la fonction $h = h(x)$, mais on peut espérer que cette transformation rendra possible la détermination de la fonction $h = h(x)$ de façon que $y = t^K = h^{3K}$ soit solution rigoureuse de l'équation différentielle (1). Pour simplifier l'écriture, remplaçons $3K$ par α ; il vient successivement :

$$y = h^\alpha ;$$
$$y' = \alpha h^\alpha \frac{h'}{h} ;$$
$$y'' = \alpha h^\alpha\left[(\alpha - 1)\left(\frac{h'}{h}\right)^2 + \frac{h''}{h}\right];$$
$$y''' = \alpha h^\alpha\left[(\alpha - 1)(\alpha - 2)\left(\frac{h'}{h}\right)^3 + 3(\alpha - 1)\frac{h'h''}{h^2} + \frac{h'''}{h}\right];$$
$$y^{IV} = \alpha h^\alpha\left[(\alpha - 1)(\alpha - 2)(\alpha - 3)\left(\frac{h'}{h}\right)^4 + \right.$$
$$\left. + 6(\alpha - 1)(\alpha - 2)\frac{h'^2h''}{h^3} + (\alpha - 1)\frac{3h''^2 + 4h'h''}{h^2} + \frac{h^{IV}}{h}\right];$$

En introduisant ces expressions dans l'équation différentielle (1), on trouve, après simplifications, ce que nous pouvons appeler l'*équation caractéristique généralisée* :

$$\left.\begin{aligned}&(\alpha+1)\alpha^2(\alpha - 1)\left(\frac{h'^2}{h}\right)^2 + 6(\alpha + 1)\alpha\left(\alpha - \frac{1}{2}\right)\frac{h'^2h''}{h} + \\ &+ 3\alpha^2h''^2 + 4\left(\alpha + \frac{1}{2}\right)\alpha h'h''' + \alpha hh^{IV} + A = 0.\end{aligned}\right\} \quad (3)$$

Ainsi, pour que la solution de notre équation différentielle (1) soit de la forme $y = h^\alpha$, il est nécessaire que la fonction $h = h(x)$ satisfasse à l'équation différentielle (3).

5. Recherche d'une loi de variation des épaisseurs.

Cherchons une solution particulière de cette équation différentielle (3). Cette équation serait satisfaite en particulier identiquement en x si chaque terme était par exemple une constante et si nous calculons alors α de façon que la somme de ces constantes soit égale à zéro. Pour que chaque terme soit constant, il est nécessaire qu'on ait simultanément :

$$\frac{h'^2}{h} = c = \text{constante} \quad \text{et} \quad h'' = \text{constante}$$

ce qui suffit, puisque cette deuxième condition entraîne $h''' \equiv h^{IV} \equiv 0$.

L'intégrale de $h'' =$ constante est $h = a_0 + a_1x + a_2x^2$

d'où $\qquad h' = a_1 + 2a_2x,$

en introduisant dans la première condition, on obtient l'identité en x :

$$a_1^2 + 4a_1a_2x + 4a_2^2x^2 \equiv ca_0 + ca_1x + ca_2x^2$$

d'où par identification terme à terme :

$$a_1 = \pm 2\sqrt{a_0a_2}.$$

Par conséquent, h sera de la forme

$$h = (a + bx)^2$$

a et b étant deux paramètres arbitraires quelconques.

6. Elastique rigoureuse du tube répondant à cette loi.

Ainsi donc lorsque $h = (a + bx)^2$ l'intégrale rigoureuse de l'équation différentielle (1) est de la forme $y = h^\alpha$. Pour calculer la constante α, il suffit d'intro-

duire cette expression de h dans l'équation différentielle (3), qui devient alors une équation algébrique du quatrième degré en α.

Posons $$c = \frac{A}{b^4},$$

cette équation s'écrit après réduction :

$$(2\alpha + 4)(2\alpha + 3)\,2\alpha(2\alpha - 1) + c = 0. \qquad (4)$$

Remarquons qu'en posant $\eta = -(2\alpha + 3)$, l'équation (4) ne change pas. La courbe représentative du membre de gauche de l'équation est donc symétrique par rapport à la droite $2\alpha = -\frac{3}{2}$. Faisons donc une translation d'axe de coordonnées en posant $\xi = 2\alpha + \frac{3}{2}$; on obtient alors l'équation bicarrée

$$16\,\xi^4 - 136\,\xi^2 + (225 + 16c) = 0$$

d'où l'on tire :

$$\xi = \pm\sqrt{\frac{17}{4} \pm \sqrt{4 - c}}$$

et $$\alpha = -\frac{3}{4} \pm \frac{1}{4}\sqrt{17 \pm 4\sqrt{4 - c}}.$$

On obtient ainsi quatre valeurs de α qui sont racines de l'équation (4). On a donc quatre intégrales particulières indépendantes, et comme l'équation différentielle (1) est linéaire, la solution générale s'écrit :

$$y = C_1 h^{\alpha_1} + C_2 h^{\alpha_2} + C_3 h^{\alpha_3} + C_4 h^{\alpha_4} \qquad (5)$$

où C_1, C_2, C_3 et C_4 sont des constantes à déterminer par les conditions aux limites. Nous rappelons que $h = (a + bx)^2$.

7. Mise sous forme réelle de l'expression de l'élastique.

L'expression (5) ne fournira directement la solution cherchée que si α est réel, c'est-à-dire lorsque $c \leqq 4$, ce qui, pratiquement, est tout à fait exceptionnel.

Dans le cas le plus courant, où les valeurs de α sont complexes, il est donc nécessaire de transformer la relation (5) de façon à ne faire apparaître que des valeurs réelles. Ceci sera évidemment possible à priori puisque l'élastique existe réellement ! Le calcul est très simple.

Mettons α sous la forme $\alpha = -\frac{3}{4} \pm \gamma \pm \delta i$, où le symbole i représente $\sqrt{-1}$. Après élévation au carré et identification des parties réelles et des parties imaginaires (le double signe sous la $\sqrt{}$ représente, outre la valeur à considérer, une valeur étrangère que l'on peut reconnaître en calculant le module de α) on obtient :

$$\left.\begin{aligned} \gamma &= \frac{1}{4\sqrt{2}}\sqrt{17 + \sqrt{225 + 16c}} \\ \delta &= \frac{1}{4\sqrt{2}}\sqrt{-17 + \sqrt{225 + 16c}} \\ \alpha &= -\frac{3}{4} \pm \gamma \pm \delta i \end{aligned}\right\} \qquad (6)$$

Introduisant ces résultats dans la relation (5), il vient :

$$y = h^{-(\gamma + \frac{3}{4})}[C_1 h^{+\delta i} + C_2 h^{-\delta i}] + h^{\gamma - \frac{3}{4}}[C_3 h^{+\delta i} + C_4 h^{-\delta i}]$$

avec $$h = (a + bx)^2.$$

Or posons maintenant : $\eta = h^{\delta i}$

On a successivement : $\delta i \operatorname{Lg} h = \operatorname{Lg} \eta$ où le signe Lg indique le logarithme népérien,

$$\eta = h^{\delta i} = e^{i.\delta \operatorname{Lg} h}$$

d'où l'écriture

$$y = h^{-(\gamma + \frac{3}{4})}[C_1 e^{+i\delta \operatorname{Lg} h} + C_2 e^{-i\delta \operatorname{Lg} h}] + h^{\gamma - \frac{3}{4}}[C_3 e^{+i\delta \operatorname{Lg} h} + C_4 e^{-i\delta \operatorname{Lg} h}].$$

Selon la méthode habituelle, chaque parenthèse est identique à une expression de la forme

$$A \cos(\delta \operatorname{Lg} h) + B \sin(\delta \operatorname{Lg} h)$$

ce qui permet enfin d'écrire

$$\left.\begin{aligned} y = h^{-(\gamma + \frac{3}{4})}[A_1 \cos(\delta \operatorname{Lg} h) + B_1 \sin(\delta \operatorname{Lg} h)] + \\ + h^{\gamma - \frac{3}{4}}[A_2 \cos(\delta \operatorname{Lg} h) + B_2 \sin(\delta \operatorname{Lg} h)] \end{aligned}\right\} \qquad (7)$$

avec $$h = (a + bx)^2.$$

A_1, B_1, A_2 et B_2 sont des constantes à déterminer au moyen des conditions aux limites.

Cette expression (7) représente la solution cherchée mise sous forme réelle.

Comme δ est essentiellement positif et que h ne peut évidemment pas devenir négatif, cette valeur de y sera toujours réelle lorsque α est complexe.

8. Résumé des résultats obtenus jusqu'ici.

Lorsque la loi de variation d'épaisseur du tube est donnée par

$$h = (a + bx)^2,$$

l'élastique du tube sera calculée *rigoureusement* par l'une des deux expressions :

$$\left\{\begin{aligned} & y = C_1 h^{\alpha_1} + C_2 h^{\alpha_2} + C_3 h^{\alpha_3} + C_4 h^{\alpha_4} \qquad (5) \\ & \text{avec} \quad \alpha_{1,2,3,4} = -\frac{3}{4} \pm \frac{1}{4}\sqrt{17 \pm 4\sqrt{4 - c}} \\ & \text{si} \quad c = \frac{12}{r^2 b^4}\left(1 - \frac{1}{m^2}\right) \text{ est plus petit ou égal à } 4 \end{aligned}\right.$$

ou

$$\left\{\begin{aligned} & y = h^{-(\gamma + \frac{3}{4})}[A_1 \cos(\delta \operatorname{Lg} h) + B_1 \sin(\delta \operatorname{Lg} h)] + \qquad (7) \\ & \qquad + h^{\gamma - \frac{3}{4}}[A_2 \cos(\delta \operatorname{Lg} h) + B_2 \sin(\delta \operatorname{Lg} h)] \\ & \text{avec} \quad \gamma = \frac{1}{4\sqrt{2}}\sqrt{17 + \sqrt{225 + 16c}} \\ & \text{et} \quad \delta = \frac{1}{4\sqrt{2}}\sqrt{-17 + \sqrt{225 + 16c}} \\ & \text{si} \quad c = \frac{12}{r^2 b^4}\left(1 - \frac{1}{m^2}\right) \text{ est plus grand que } 4. \end{aligned}\right.$$

C_1, C_2, C_3, C_4 ; A_1, A_2 B_1 et B_2 étant des constantes à déterminer par les conditions aux limites.

9. Cas particulier du tube à épaisseur constante.

Si dans l'expression de l'épaisseur $h = (a + bx)^2$, nous faisons tendre b vers zéro, h tend vers une constante et il semble à première vue que l'expression trouvée de l'élastique tend, elle aussi, à se réduire à une constante, ce qui serait évidemment paradoxal. Mais un examen plus attentif révèle que c, donc aussi α, γ et δ, tendent vers l'infini lorsque h tend vers une constante. Les expressions (5) et (7) trouvées pour l'élastique du tube à épaisseur variable perdent alors leur sens, mais il est aisé de lever l'indétermination. Nous le montrerons pour le cas de l'égalité (7), seule utilisée en pratique.

Nous avons $c = \dfrac{\text{constante}}{b^4}$; par conséquent, si b tend vers zéro, γ et δ tendent tous deux vers la même valeur $\dfrac{d}{2b}$ où $d = \text{constante} = \dfrac{1{,}285\,4}{\sqrt{r}}$ pour l'acier. L'expression (7) s'écrit alors avec $h = (a + bx)^2$:

$$y \to h^{-\frac{d}{2b}}\left[A_1 \cos\left(\operatorname{Lg} h^{\frac{d}{2b}}\right) + B_1 \sin\left(\operatorname{Lg} h^{\frac{d}{2b}}\right)\right] + $$
$$+ h^{+\frac{d}{2b}}\left[A_2 \cos\left(\operatorname{Lg} h^{\frac{d}{2b}}\right) + B_2 \sin\left(\operatorname{Lg} h^{\frac{d}{2b}}\right)\right].$$

Développons $h^{\pm\frac{d}{2b}} = (a + bx)^{\pm\frac{d}{b}}$:

$$(a+bx)^{\pm\frac{d}{b}} = a^{\pm\frac{d}{b}}\left[1 \pm \frac{\frac{d}{b}}{1\,!}\left(\frac{b}{a}x\right) + \frac{\frac{d}{b}\left(\frac{d}{b}-1\right)}{2\,!}\left(\frac{b}{a}x\right)^2 \pm \ldots\right]$$

et maintenant si b tend vers zéro, $\dfrac{d}{b}$ tend vers l'infini, donc vers la même valeur que $\dfrac{d}{b} - 1$, $\dfrac{d}{b} - 2$, ... etc., ce qui permet d'écrire :

$$(a + bx)^{\pm\frac{d}{b}} \to a^{\pm\frac{d}{b}}\left[1 \pm \frac{\frac{d}{a}x}{1\,!} + \frac{\left(\frac{d}{a}x\right)^2}{2\,!} \pm \frac{\left(\frac{d}{a}x\right)^3}{3\,!} + \ldots\right]$$

L'expression contenue dans la parenthèse n'est pas autre chose que le développement de $e^{\pm\frac{d}{a}x}$ qui est convergent pour n'importe quelle valeur de x. Par conséquent :

$$(a + bx)^{\pm\frac{d}{b}} \to a^{+\frac{d}{b}} \cdot e^{\pm\frac{d}{a}x}.$$

En outre, $\operatorname{Lg}\left(a^{\frac{d}{b}} \cdot e^{\frac{d}{a}x}\right) = \operatorname{Lg} a^{\frac{d}{b}} + \dfrac{d}{a}x.$

Si nous introduisons ces résultats dans l'expression de l'élastique, il vient

$$y = e^{-\frac{d}{a}x}\left\{\left[\frac{A_1 \cos\left(\frac{d}{b}\operatorname{Lg} a\right) + B_1 \sin\left(\frac{d}{b}\operatorname{Lg} a\right)}{a^{\frac{d}{b}}}\right]\cos\left(\frac{d}{a}x\right) + \right.$$
$$\left. \left[\frac{-A_1 \sin\left(\frac{d}{b}\operatorname{Lg} a\right) + B_1 \cos\left(\frac{d}{b}\operatorname{Lg} a\right)}{a^{\frac{d}{b}}}\right]\sin\left(\frac{d}{a}x\right)\right\}$$

+ une expression semblable en $e^{+\frac{d}{a}x}$.

Les deux parenthèses-crochets contenant deux constantes arbitraires peuvent elles-mêmes être considérées comme des constantes arbitraires et l'on retrouve enfin l'élastique du tube à épaisseur constante :

$$y = e^{-\frac{d}{a}x}\left[C_1 \cos\left(\frac{d}{a}x\right) + C_2 \sin\left(\frac{d}{a}x\right)\right] +$$
$$+ e^{+\frac{d}{a}x}\left[C_3 \cos\left(\frac{d}{a}x\right) + C_4 \sin\left(\frac{d}{a}x\right)\right].$$

10. Calcul des constantes par les conditions aux limites.

Les deux manières générales de fixer les conditions aux limites sont de se donner dans deux sections du tube soit la déformation radiale y et la rotation y', soit le moment unitaire fléchissant M (par unité de longueur de la circonférence du tube) et l'effort tranchant T unitaire. On sait que ces deux sollicitations M et T sont liées aux déformations par les relations :

$$y'' = \frac{M}{J \cdot E_b}\,; \qquad y''' = \frac{1}{J \cdot E_b}\left(T - \frac{J'}{J}M\right)$$

où J = moment d'inertie variable pour une longueur unité de la circonférence ; $J = \dfrac{h^3}{12}$

E_b = module d'élasticité en sollicitation bi-axiale = $E\,\dfrac{m^2}{m^2-1}$.

Les moments sont comptés positivement lorsqu'ils tendent les fibres inférieures, les efforts tranchant positivement dans le sens des y croissants.

Par ce qui précède, nous voyons qu'il est nécessaire de connaître les dérivées successives de l'élastique y.

Posons pour cela successivement :

$$\epsilon_1 = 2\left(\gamma + \frac{3}{4}\right) \qquad \epsilon_2 = 2\left(\gamma - \frac{3}{4}\right) = \epsilon_1 - 3$$
$$C_1 = \epsilon_1(\epsilon_1 + 1) - 4\delta^2 \qquad C_2 = \epsilon_2(\epsilon_2 - 1) - 4\delta^2$$
$$D_1 = 2\delta.(2\epsilon_1 + 1) \qquad D_2 = 2\delta.(2\epsilon_2 - 1)$$
$$F_1 = C_1(\epsilon_1 + 2) - 2D_1\delta \qquad F_2 = C_2(\epsilon_2 - 2) - 2D_2\delta$$
$$G_1 = D_1(\epsilon_1 + 2) + 2C_1\delta \qquad G_2 = D_2(\epsilon_2 - 2) + 2C_2\delta$$

Pour faciliter les calculs numériques, nous passons dans t des logarithmes népériens (Lg) aux logarithmes décimaux (log) :

$$t = \delta \operatorname{Lg} h = 4{,}605{\cdot}170{\cdot}2\ \delta \log(a + bx).$$

On obtient :

$$y = (a + bx)^{-\epsilon_1}[A_1 \cos t + B_1 \sin t] +$$
$$+ (a + bx)^{+\epsilon_2}[A_2 \cos t + B_2 \sin t]$$

$$y' = -b.(a + bx)^{-(\epsilon_1+1)}[(A_1\epsilon_1 - 2B_1\delta)\cos t +$$
$$+ (2A_1\delta + B_1\epsilon_1)\sin t] + b\cdot(a + bx)^{\epsilon_2-1}[(A_2\epsilon_2 +$$
$$+ 2B_2\delta)\cos t - (2A_2\delta - B_2\epsilon_2)\sin t].$$

Cette expression de y' permet de calculer la courbe dérivée de l'élastique ; pour le calcul des constantes on met ces constantes en évidence :

$$
\begin{aligned}
y' = &- b\cdot(a+bx)^{-(\epsilon_1+1)}\,[A_1(\epsilon_1\cos t + 2\delta\sin t) + \\
&+ B_1(\epsilon_1\sin t - 2\delta\cos t)] + \\
&+ b\cdot(a+bx)^{\epsilon_2-1}\,[A_2(\epsilon_2\cos t - 2\delta\sin t) + \\
&+ B_2(\epsilon_2\sin t + 2\delta\cos t)]
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
y'' = &+ b^2\cdot(a+bx)^{-(\epsilon_1+2)}\,[A_1(C_1\cos t + D_1\sin t) + \\
&+ B_1(C_1\sin t - D_1\cos t)] + \\
&+ b^2(a+bx)^{\epsilon_2-2}\,[A_2(C_2\cos t - D_2\sin t) + \\
&+ B_2(C_2\sin t + D_2\cos t)]
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
y''' = &- b^3\cdot(a+bx)^{-(\epsilon_1+3)}\,[A_1(F_1\cos t + G_1\sin t) + \\
&+ B_1(F_1\sin t - G_1\cos t)] + \\
&+ b^3\cdot(a+bx)^{\epsilon_2-3}[A_2(F_2\cos t - G_2\sin t) + \\
&+ B_2(F_2\sin t + G_2\cos t)].
\end{aligned}
$$

Posons encore successivement :

$$M_r = \frac{M}{IE_b} = \frac{12}{E_b h_3}\cdot M = \frac{12}{E_b\cdot(a+bx)^6}\cdot M$$

$$
\begin{aligned}
T_r &= \frac{1}{IE_b}\left[T - \frac{I'}{I}M\right] = \frac{12}{E_b h^3}\left[T - 3\frac{h'}{h}M\right] = \\
&= \frac{12}{E_b\cdot(a+bx)^6}\left[T - \frac{6b}{a+bx}M\right],
\end{aligned}
$$

puis

$$
\begin{aligned}
H_1 &= (a+bx)^{-\epsilon_1}\cdot\cos t \\
K_1 &= (a+bx)^{-\epsilon_1}\cdot\sin t \\
P_1 &= -b\cdot(a+bx)^{-(\epsilon_1+1)}(\epsilon_1\cos t + 2\delta\sin t) \\
Q_1 &= -b\cdot(a+bx)^{-(\epsilon_1+1)}(\epsilon_1\sin t - 2\delta\cos t) \\
R_1 &= +b^2\cdot(a+bx)^{-(\epsilon_1+2)}(C_1\cos t + D_1\sin t) \\
S_1 &= +b^2\cdot(a+bx)^{-(\epsilon_1+2)}(C_1\sin t - D_1\cos t) \\
V_1 &= -b^3\cdot(a+bx)^{-(\epsilon_1+3)}(F_1\cos t + G_1\sin t) \\
W_1 &= -b^3\cdot(a+bx)^{-(\epsilon_1+3)}(F_1\sin t - G_1\cos t) \\
H_2 &= (a+bx)^{+\epsilon_2}\cdot\cos t \\
K_2 &= (a+bx)^{+\epsilon_2}\cdot\sin t \\
P_2 &= +b\cdot(a+bx)^{\epsilon_2-1}(\epsilon_2\cos t - 2\delta\sin t) \\
Q_2 &= +b\cdot(a+bx)^{\epsilon_2-1}(\epsilon_2\sin t + 2\delta\cos t) \\
R_2 &= +b^2\cdot(a+bx)^{\epsilon_2-2}(C_2\cos t - D_2\sin t) \\
S_2 &= +b^2\cdot(a+bx)^{\epsilon_2-2}(C_2\sin t + D_2\cos t) \\
V_2 &= +b^3\cdot(a+bx)^{\epsilon_2-3}(F_2\cos t - G_2\sin t) \\
W_2 &= +b^3\cdot(a+bx)^{\epsilon_2-3}(F_2\sin t + G_2\cos t)
\end{aligned}
$$

Introduisons maintenant un mode simplifié d'écriture. Pour cela, considérons quatre équations algébriques linéaires à quatre inconnues :

$$
\begin{aligned}
a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + a_4x_4 &= a_0 \\
b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3 + b_4x_4 &= b_0 \\
c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3 + c_4x_4 &= c_0 \\
d_1x_1 + d_2x_2 + d_3x_3 + d_4x_4 &= d_0
\end{aligned}
$$

Utilisant la règle bien connue de Cramer, nous écrivons les racines symboliquement de la manière suivante :

$$
\overbrace{\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \\ d_1 & d_2 & d_3 & d_4 \end{vmatrix}}^{\Delta}
\qquad
\begin{vmatrix} a_0 \\ b_0 \\ c_0 \\ d_0 \end{vmatrix}
$$

$$x_1 \quad x_2 \quad x_3 \quad x_4$$

Cela signifiera par convention que la valeur de chaque variable est égale à une fraction dont le dénominateur est le déterminant Δ et dont le numérateur est le déterminant formé en remplaçant dans Δ la colonne repérée par la variable, par la colonne séparée.

Supposons maintenant que tous ces coefficients a, b, c et d soient fonctions d'un paramètre et que, par exemple, les coefficients a et b sont à calculer pour la valeur l du paramètre et les coefficients c et d pour une autre valeur L du paramètre. Nous écrirons symboliquement :

$$
\begin{vmatrix}
\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \end{pmatrix}_l \\
\begin{pmatrix} c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \\ d_1 & d_2 & d_3 & d_4 \end{pmatrix}_L
\end{vmatrix}
\qquad
\begin{vmatrix}
\begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \end{pmatrix}_l \\
\begin{pmatrix} c_0 \\ d_0 \end{pmatrix}_L
\end{vmatrix}
$$

$$x_1 \quad x_2 \quad x_3 \quad x_4$$

Supposons enfin que l'on sache à priori que les variables x_3 et x_4 sont nulles ; il ne subsiste plus alors que deux équations à deux variables dont la solution s'écrira symboliquement par exemple :

$$
\begin{vmatrix} \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{pmatrix}_l \end{vmatrix}
\qquad
\begin{vmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \end{pmatrix}_l \end{vmatrix}
$$

$$x_1 \quad x_2$$

On peut faire entrer cette écriture dans la solution générale en y encadrant la partie correspondant à l'expression réduite, d'où l'écriture symbolique définitive :

$$
\begin{vmatrix}
\left(\boxed{\begin{matrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{matrix}}\ \begin{matrix} a_3 & a_4 \\ b_3 & b_4 \end{matrix}\right)_l \\
\begin{pmatrix} c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \\ d_1 & d_2 & d_3 & d_4 \end{pmatrix}_L
\end{vmatrix}
\qquad
\begin{vmatrix}
\left(\boxed{\begin{matrix} a_0 \\ b_0 \end{matrix}}\right)_l \\
\begin{pmatrix} c_0 \\ d_0 \end{pmatrix}_L
\end{vmatrix}
$$

$$x_1 \quad x_2 \quad x_3 \quad x_4$$

Revenons maintenant à la détermination des constantes A_1, A_2, B_1 et B_2. Trois cas peuvent se présenter suivant les conditions aux limites dans les sections d'abscisses l et L :

Sont donnés :

1·) $(y, y')_l$ et $(y, y')_L$
2·) $(M_r, T_r)_l$ et $(y, y')_L$ ou inversement $(y, y')_l$ et $(M_r, T_r)_L$
3·) $(M_r, T_r)_l$ et $(M_r, T_r)_L$

d'où le tableau des solutions :

1·) $(y, y')_l$ et $(y, y')_L$

$$
\begin{vmatrix}
\left(\overbrace{\boxed{\begin{matrix} H_1 & K_1 \\ P_1 & Q_1 \end{matrix}}}^{\text{croissant}}\ \overbrace{\boxed{\begin{matrix} H_2 & K_2 \\ P_2 & Q_2 \end{matrix}}}^{\text{décroissant}}\right)_l \\
\begin{pmatrix} H_1 & K_1 & H_2 & K_2 \\ P_1 & Q_1 & P_2 & Q_2 \end{pmatrix}_L
\end{vmatrix}
\qquad
\begin{vmatrix}
\left(\boxed{\begin{matrix} y \\ y' \end{matrix}}\right)_l \\
\begin{pmatrix} y \\ y' \end{pmatrix}_L
\end{vmatrix}
$$

$$A_1 \quad B_1 \quad A_2 \quad B_2$$

2·) $(M_r, T_r)_l$ et $(y, y')_L$ — pour $(y, y')_l$ et $(M_r, T_r)_L$ il suffira d'intervertir les indices $_l$ et $_L$.

$$\begin{array}{c} \text{croissant} \quad \text{décroissant} \\ \left|\begin{array}{c} \left(\boxed{\begin{matrix} R_1 & S_1 \\ V_1 & W_1 \end{matrix}} \quad \boxed{\begin{matrix} R_2 & S_2 \\ V_2 & W_2 \end{matrix}}\right)_l \\ \left(\begin{matrix} H_1 & K_1 \\ P_1 & Q_1 \end{matrix} \quad \begin{matrix} H_2 & K_2 \\ P_2 & Q_2 \end{matrix}\right)_L \end{array}\right| \\ A_1 \; B_1 \quad A_2 \; B_2 \end{array} \qquad \left|\begin{array}{c} \left(\boxed{\begin{matrix} M_r \\ T_r \end{matrix}}\right)_l \\ \left(\begin{matrix} y \\ y' \end{matrix}\right)_L \end{array}\right|$$

3·) $(M_r, T_r)_l$ et $(M_r, T_r)_L$

$$\begin{array}{c} \text{croissant} \quad \text{décroissant} \\ \left|\begin{array}{c} \left(\boxed{\begin{matrix} R_1 & S_1 \\ V_1 & W_1 \end{matrix}} \quad \boxed{\begin{matrix} R_2 & S_2 \\ V_2 & W_2 \end{matrix}}\right)_l \\ \left(\begin{matrix} R_1 & S_1 \\ V_1 & W_1 \end{matrix} \quad \begin{matrix} R_2 & S_2 \\ V_2 & W_2 \end{matrix}\right)_L \end{array}\right| \\ A_1 \; B_1 \quad A_2 \; B_2 \end{array} \qquad \left|\begin{array}{c} \left(\boxed{\begin{matrix} M_r \\ T_r \end{matrix}}\right)_l \\ \left(\begin{matrix} M_r \\ T_r \end{matrix}\right)_L \end{array}\right|$$

Remarques.

1. Ces expressions se simplifient considérablement dans le cas du tube axialement illimité. Deux des conditions aux limites sont à fixer pour la section $x =$ infini : nous devons imposer que dans cette section l'ordonnée y de l'élastique soit nulle. Considérons alors les deux exposants ϵ_1 et ϵ_2 introduits dans ce paragraphe. Il est facile de voir que la plus petite valeur de γ, obtenue pour $c = 0$, est égale à 1 et que par conséquent :

la plus petite valeur de $\epsilon_1 = +\dfrac{7}{2}$

la plus petite valeur de $\epsilon_2 = +\dfrac{1}{2}$.

Les deux termes de l'élastique ont en facteur, l'un $(a + bx)^{-\epsilon_1}$, l'autre $(a + bx)^{+\epsilon_2}$.

Lorsqu'il s'agit d'un *tube à épaisseur croissante*, la quantité $|a + bx|$ (valeur absolue !) croît avec x et pour qu'à l'infini la valeur de y soit nulle, il est nécessaire que $A_2 = B_2 = 0$.

Par contre, pour le *tube à épaisseur décroissante* la quantité $|a + bx|$ décroît tout d'abord, passe par zéro, puis croît de nouveau lorsque x croît. Mais un tube dont une section aurait une épaisseur $h = (a + bx)^2$ nulle ne saurait avoir de signification physique. Nous devons donc nous limiter, même pour le raisonnement, à la partie du tube où $a + bx$ est positif. Dans cette partie, le terme $(a + bx)^{-\epsilon_1}$ croîtrait avec x et, par exemple pour une décroissance très lente telle que l'on puisse être sûr que physiquement l'amortissement de la ligne élastique est atteint avant la section théorique d'épaisseur nulle, le terme de facteur $(a + bx)^{-\epsilon_1}$ provoquerait une valeur très grande de l'ordonnée y. Ceci montre que dans le cas du tube à épaisseur décroissante on doit poser $A_1 = B_1 = 0$.

Dans un cas comme dans l'autre, il ne reste que deux équations et nous n'utiliserons, des écritures générales du tableau des solutions, que les valeurs encadrées. Les notations « croissant » et « décroissant » s'expliquent par ce qui précède.

2. Il n'est peut-être pas inutile d'insister ici sur le fait que la méthode de Silvester, permettant de calculer les déterminants du troisième ordre par une généralisation des produits croisés utilisés pour le deuxième ordre, n'est applicable qu'à ces déterminants du troisième ordre. Pour l'utiliser ici, il nous faudrait donc réduire tout d'abord d'une unité l'ordre de nos déterminants. Mais il est, à notre avis, plus judicieux de calculer ces déterminants uniquement par les méthodes de soustraction de lignes, par exemple suivant le schéma de calcul indiqué par C. Runge et Kœnig dans leur ouvrage, *Vorlesungen über numerisches Rechnen*, Springer, Berlin. Le calcul numérique des déterminants les plus compliqués devient très rapide et très simple.

11. Généralisation à des lois quelconques de variations d'épaisseur.

La solution trouvée précédemment :

$$y = h^{-\frac{\epsilon_1}{2}} \left[A_1 \cos(\delta \operatorname{Lg} h) + B_1 \sin(\delta \operatorname{Lg} h)\right] + \\ + h^{+\frac{\epsilon_2}{2}} \left[A_2 \cos(\delta \operatorname{Lg} h) + B_2 \sin(\delta \operatorname{Lg} h)\right]$$

n'est solution rigoureuse de l'équation différentielle du tube que si

$$h = (a + bx)^2$$

a et b étant deux paramètres arbitraires quelconques.

Pour généraliser cette solution à des lois quelconques de variations d'épaisseur, deux idées viennent naturellement à l'esprit :

1. Choisir les deux paramètres a et b de façon que la loi $h = (a + bx)^2$ se rapproche « le plus possible » de la loi envisagée, et ne plus considérer que le tube répondant à $h = (a + bx)^2$ dit « tube équivalent ».

2. Partir de la remarque évidente que l'expression ci-dessus de l'élastique s'écrit en fonction de h seulement à l'exclusion de x, et adopter la même expression quelle que soit la fonction $h = h(x)$.

La seconde méthode pourrait paraître la plus plaisante à première vue. Mais en y regardant de plus près, on s'aperçoit que le fait de remplacer $h = (a + bx)^2$ par une fonction quelconque $h = h(x)$ dans l'expression ci-dessus de l'élastique et de considérer cette expression comme une intégrale approchée revient à supposer *assez arbitrairement* que cette fonction $h = h(x)$ satisfait avec une précision suffisante à l'équation différentielle (3) dite équation caractéristique généralisée. Or quel est le critère qui permettra de dire *à priori* que cette précision est suffisante ? Au lieu d'être nulle, la valeur du membre de gauche de cette équation sera une fonction de x. L'approximation de la solution ne dépend-elle que de la valeur de la plus grande limite atteinte par cette fonction de x dans le domaine utile pour x ? Et à supposer — faussement à notre avis —

que cela soit le cas, quelle valeur sera encore admissible ? La réponse à ces deux questions serait un travail de longue haleine que nous n'avons pas entrepris parce que cette méthode présente par ailleurs d'autres difficultés *rebutantes* :

Le calcul des constantes ϵ et δ nécessite l'introduction de $h(x)$ dans l'équation caractéristique généralisée (3·) et nous venons de dire que le premier membre de cette équation deviendra alors une fonction de x variant pratiquement entre deux limites. Il paraîtrait judicieux de choisir ϵ et δ (donc α) de façon que ces limites soient les plus petites possibles en valeur absolue, ce qui donnerait lieu à un calcul très long à recommencer pour chaque nouvelle loi de variations d'épaisseur.

Enfin, pour calculer les constantes A_1, A_2, B_1 et B_2 par les conditions aux limites, il est nécessaire de dériver successivement l'expression de l'élastique. Ce calcul ne pourrait, comme précédemment, être fait une fois pour toutes qu'au prix de complications extrêmes, puisqu'il diffère suivant la fonction $h = h(x)$.

Toutes ces raisons nous font écarter cette deuxième méthode.

La première méthode, au contraire, est d'une application très simple et *toujours la même* quelle que soit la fonction $h = h(x)$ réelle, sitôt que l'on a calculé les valeurs à choisir pour les paramètres a et b. En outre, les écarts entre les épaisseurs $h = (a + bx)^2$ « équivalentes » et les épaisseurs $h = h(x)$ réelles nous permettront de nous faire à priori une idée de l'approximation des résultats.

12. Choix des paramètres *a* et *b* pour l'approximation d'une loi quelconque de variations d'épaisseur.

On pourrait être tenté de calculer a et b par la méthode des moindres carrés, mais en plus du fait que les calculs seraient très longs et parfois même inextricables, ce principe présenterait une erreur fondamentale pour le cas qui nous occupe. En effet, la méthode des moinbres carrés donne, pour un même écart, une importance égale à chaque section du tube, quelle que soit son abscisse. Or, dans le cas du tube axialement illimité par exemple, les sections situées très loin de la section origine sollicitée par les efforts donnés ne jouent qu'un rôle absolument négligeable sur la forme de l'élastique, parce que l'amortissement des oscillations de la ligne élastique est très rapide à partir de la section origine et par conséquent les sections jouent ici un rôle d'autant plus important qu'elles sont plus près de la section origine.

Le procédé de calcul des paramètres doit donc être assez souple pour permettre d'utiliser l'idée que l'on a à priori de la marche du phénomène élastique. C'est pourquoi le plus judicieux semble être de tracer à vue la courbe $y = (a + bx)^2$ imitant le mieux, au sens précédent, la courbe des épaisseurs réelles.

Nous indiquons maintenant deux manières de surmonter la difficulté provenant du fait que la courbe $y = (a + bx)^2$ dépend de deux paramètres arbitraires :

1. Nous écrivons $y = a^2(1 + px)^2$ avec $p = \dfrac{b}{a}$ puis nous passons aux logarithmes :

$$\eta = \log y = \log a^2 + 2 \log |1 + px|.$$

Une simple translation le long de l'axe des η permettra de tenir compte du terme $\log a^2$ et il suffit par conséquent de tracer le faisceau des courbes

$$\eta = 2 \log |1 + px| ;$$

toutes ces courbes se coupent à l'origine des (η, x).

Ce faisceau étant tracé à une certaine échelle sur du papier (logarithmique), on trace à la même échelle la courbe $\eta = \log h(x)$, où $h = h(x)$ est la courbe des épaisseurs réelles, sur du papier transparent. Puis superposant les deux dessins, les axes des η étant maintenus en coïncidence, on amène la courbe $\eta = \log h(x)$ à se superposer, dans la région la plus importante du tube, à la courbe du faisceau dont l'allure se rapproche le plus de cette courbe $\eta = \log h(x)$ dans cette région. On trouve ainsi la valeur de p (cote de la courbe considérée du faisceau) et la valeur de l'épaisseur a^2 à l'origine du tube équivalent (ordonnée sur le graphique $\eta = \log h(x)$ de l'axe des abscisses relatif au faisceau de courbes). Remarquons encore que la distance $\triangle$ des deux courbes $\eta = \log (a + bx)^2$ et $\eta = h(x)$ mesure en quelque sorte la précision relative puisque :

$$\triangle = \log \left[1 + \frac{(a + bx)^2 - h(x)}{h(x)} \right].$$

Ce procédé présente l'inconvénient d'exiger le tracer, une fois pour toutes il est vrai, d'un assez grand nombre de courbes $\eta = 2 \log (1 + px)$. Il ne sera donc avantageux que si l'on a un grand nombre de tubes à calculer.

2. Considérons la région du tube réel dont on peut dire *à priori* qu'elle présente le maximum d'importance pour la recherche de l'élastique. Prenons dans cette région une section d'abscisse $x = L$. Nous calculons a et b de façon que le tube équivalent ait tout d'abord même épaisseur et même pente dans cette région que le tube réel. Il est facile de voir qu'alors

$$\begin{cases} a = \sqrt{h_L} - b.L \\ b = \dfrac{h'}{2\sqrt{h_L}} \end{cases}$$

où h_L = épaisseur du tube réel dans la section $x = L$,
h'_L = pente du tube réel dans cette section.

Donnons maintenant à a et b, à partir de ces valeurs, des accroissements da et db. Ils entraînent une variation de l'épaisseur du tube équivalent :

$$dh = 2(a + bx) \left(x + \frac{da}{db} \right) .db.$$

La variation dh sera donc nulle en $x = -\dfrac{da}{db}$.

Il n'y a en général pas de motif de déplacer la section (admise en $x = L$) où l'épaisseur réelle et l'épaisseur

équivalente sont identiques. On posera par conséquent $\frac{da}{db} = -L$ ce qui permet d'écrire :

$$dh = 2(a + bx)(x - L)\,db,$$

ce qui dirige le choix de db tel que la courbe des épaisseurs équivalentes s'approche « le plus possible » de la courbe des épaisseurs réelles.

Ainsi, grâce à l'une de ces deux méthodes, il est possible de trouver rapidement le « tube équivalent » d'un tube donné quelconque.

13. Résumé de la marche à suivre pour la recherche de l'élastique d'un tube cylindrique de révolution d'épaisseur variable quelconque.

Ce tube sera sollicité dans la section origine par des efforts pouvant se réduire à l'action d'un moment fléchissant et d'un effort tranchant répartis uniformément sur toute la circonférence du tube.

On cherche tout d'abord le tube équivalent par l'un des deux procédés du paragraphe 12, ce qui nous donne les valeurs de a et b. Ceci permet de calculer (§ 8) les valeurs des constantes c, γ et δ. Calculant alors successivement (§ 10) les symboles nécessaires, de ϵ_1, ϵ_2, C_1, C_2, ... jusqu'à V_1, V_2, W_1, W_2, l'écriture symbolique des déterminants (§ 10) permet de calculer les constantes A_1, A_2, B_1 et B_2 pour les conditions aux limites envisagées. Introduisant les valeurs ainsi trouvées dans l'expression générale (§ 10) de l'élastique, et s'il y a lieu dans l'expression de sa première dérivée (§ 10), il est possible de calculer directement les déformations radiales et les rotations en des points quelconques du tube équivalent. Les valeurs ainsi trouvées seront adoptées comme valeurs approchées pour le tube réel. L'approximation sera d'autant meilleure que les courbes des épaisseurs équivalentes et réelles se confondront plus exactement dans la région utile.

Le calcul de l'argument $t = \delta \operatorname{Lg} h$ est simplifié par les considérations faisant l'objet du paragraphe suivant.

14. Calcul numérique de l'argument t au moyen de l'excédent fractionnaire.

La valeur de l'argument t telle que nous l'avons donnée au paragraphe 10 :

$$t = 4,6 \ldots \delta \log (a + bx)$$

est exprimée en radians et peut très souvent sortir du domaine tabulaire $-\frac{\pi}{2}$ à $+\frac{\pi}{2}$. Les tables usuelles étant en degrés, grades ou minutes, il s'agit de transformer l'expression de t de façon à donner en degrés, grades ou minutes la valeur comprise entre $-\frac{\pi}{2}$ et $+\frac{\pi}{2}$, équivalente pour le calcul de $\cos t$ et $\sin t$.

Voici les résultats auxquels on est conduit :

Appelons « excédent fractionnaire » d'un nombre (par exemple 2,314 ou 3,827) :

a) sa partie fractionnaire elle-même si celle-ci est inférieure à $\frac{1}{2}$ (exemple 0,314) ;

b) le complément à l'unité, *changé de signe*, de sa partie fractionnaire si celle-ci est supérieure à $\frac{1}{2}$ (exemple $-1 + 0,827 = -0,173$).

Posons $\beta = 1,465 \cdot 871 \cdot 3 . \delta$.

Désignons par K l'excédent fractionnaire de la valeur de

$$[\beta \log (a + bx)]$$

où le signe log indique le logarithme décimal.

La valeur équivalente de t, pour le calcul de $\cos t$ et $\sin t$ est alors :

en radians : $t = |K| . \pi$
en degrés : $t = |K| . 180$
en grades : $t = |K| . 200$
en minutes : $t = |K| . 10\,800$

Le sinus ($\sin t$) sera positif si la partie entière du nombre $[\beta \log (a + bx)]$ est paire, et négatif dans le cas contraire.

Le signe du cosinus ($\cos t$) est celui de K si la partie entière du nombre $[\beta \log (a + bx)]$ est paire et le signe contraire de K si cette partie entière est impaire.

Ces règles seront rendues automatiques par l'emploi du tableau de calcul du paragraphe suivant.

15. Tableau pour le calcul des déformations à partir de l'expression de l'élastique.

Le mode de calcul exposé dans les pages précédentes est résumé dans un tableau. Une ligne intitulée *parité* y figure, dans laquelle on marquera le signe + si la partie entière du nombre $[\beta \log (a + bx)]$ est paire et le signe — si elle est impaire. Le signe de $\sin t$ est alors le signe indiqué sous « parité » ; le signe de $\cos t$ est le signe résultant du produit du signe indiqué sous « parité » avec le signe de K.

$a =$	$b =$ ou $p =$	$\beta =$		$\epsilon_1 =$		$\epsilon_2 =$	
$A_1 =$		$B_1 =$		$A_2 =$		$B_2 =$	
$x =$					.....		
$a(1+px) = a+bx =$							
$\log (a + bx) =$							
$\beta . \lg (a + bx) =$							
« parité » $=$							
$K =$							
$t =$							
$\cos t =$							
$\sin t =$							
$-\epsilon_1 \lg (a + bx) =$							
$(a + bx)^{-\epsilon_1} =$							
$A_1 \cos t + B_1 \sin t =$							
$y_1 =$							
$+\epsilon_2 \lg (a + bx) =$							
$(a + bx)^{+\epsilon_2} =$							
$A_2 \cos t + B_2 \sin t =$							
$y_2 =$							
$y = y_1 + y_2 =$					.....		

Remarque : Il est nécessaire de calculer avec précision la valeur de $[\beta \log (a + bx)]$, puisque seule la partie fractionnaire de ce nombre sera utilisée.

Exemples numériques.

Afin que le lecteur puisse se faire une idée exacte de la marche du calcul, nous développons maintenant trois exemples numériques, dont deux seront exposés en détail, sans omettre la moindre opération : il s'agit du premier exemple, traitant du cas le plus simple, et du troisième exemple, montrant l'application de la méthode au cas le plus compliqué de calcul de tube. Nous avons choisi, pour les deuxième et troisième exemples, deux cas de tubes à épaisseurs variables limités axialement car ce sont là les problèmes pour lesquels la méthode développée plus haut présente ses principaux avantages.

16. Exemple 1 (avec exposé des calculs complets).

Tube cylindrique de révolution axialement illimité, de rayon moyen $r = 50$ cm, à épaisseur variant linéairement suivant la loi

$$h^{\text{cm}} = 5 \text{ cm} \pm 0{,}02\, x^{\text{cm}}$$

et sollicité dans la section origine soit par un moment fléchissant uniformément réparti sur la section et dont la valeur est telle que $M_{or} = 1$, soit par un effort tranchant uniformément réparti sur la section et dont la valeur est telle que $T_{or} = 1$.

L'utilisation du deuxième procédé du paragraphe 12 est ici tout indiqué pour trouver les valeurs de a et b. En effet, par analogie avec la solution du tube à épaisseur constante axialement illimité, on sait que la ligne élastique s'amortit très rapidement à partir de la section origine. Calculons donc le tube équivalent en exigeant simplement qu'il ait même épaisseur et même pente à l'origine. La comparaison des épaisseurs réelles et équivalentes fournit le tableau suivant :

$$a = \sqrt{h_o} = 2{,}236.068 \; ; \quad b = \frac{h'_o}{2\sqrt{h_o}} = \pm 0{,}004.472.136.$$

Tube croissant.

x cm	0	5	10	15	20	30	50
Epaisseur réelle cm	5,000.0	5,100.0	5,200.0	5,300.0	5,400.0	5,600.0	6,000.0
équival. cm	5,000.0	5,100.5	5,202.0	5,304.5	5,408.0	5,618.0	6,050.0

Tube décroissant.

x cm	0	5	10	15	20	30	50
Epaisseur réelle cm	5,000.0	4,900.0	4,800.0	4,700.0	4,600.0	4,400.0	4,000.0
équival. cm	5,000.0	4,900.5	4,802.0	4,704.5	4,608.0	4,418.0	4,050.0

Ce tableau montre que même dans la section d'abscisse $x = 50$ cm, la différence relative des épaisseurs réelle et équivalente ne dépasse pas 0,85 et 1,25 %. Or nous avons des raisons de penser à priori que cette section est sans influence sur la forme de l'élastique.

Adoptons donc ce tube équivalent. Nous effectuons les calculs comme indiqué au paragraphe 13 :

$a = 2{,}236.068$
$b = \pm 0{,}004.472.136$
$c = \dfrac{10{,}920}{r^2 b^4} = 10{,}920.10^6$ (pr l'acier)

$$\gamma = \frac{1}{4\sqrt{2}} \sqrt{17 + \sqrt{225 + 16c}} = 20{,}337.14$$

$$\delta = \frac{1}{4\sqrt{2}} \sqrt{-17 + \sqrt{225 + 16c}} = 20{,}311.00$$

$\beta \log a = 10{,}405.327$
parité (de 10) = +
$K = +\,0{,}405.327$
$t_o = |K| . 10.800' = 4.377{,}53'$
$\cos t_o = +\,0{,}293.059$
$\sin t_o = +\,0{,}956.094$

$\log a = 0{,}349.485.0$
$\beta = 1{,}465.871 \times \delta = 29{,}773.32$

A partir d'ici, nous devons (cf. Remarque 1 du § 10) traiter séparément le cas du tube à épaisseur croissante et celui du tube décroissant.

I. Tube croissant.

$\epsilon_1 = 2\left(\gamma + \dfrac{3}{4}\right) = 42{,}174.28$ $\qquad F_1 = -\,133.297{,}3$
$\qquad G_1 = +\,160.087{,}6$
$C_1 = +\,170.697.2$
$D_1 = +\,3.467{,}030$

Nous sommes dans le deuxième cas des conditions aux limites du paragraphe 10, avec valeurs encadrées. Il ne nous faut donc calculer que R_1, S_1, V_1, W_1, M_{or} et T_{or} :

$$-(\epsilon_1 + 2) \log a = \begin{cases} -15{,}438.249 \\ \overline{16}{,}561.751 \end{cases}$$

Nombre correspondant $= 3{,}645.449.10^{-16}$

$R_1 = +0{,}245.326.3.10^{-16}$
$S_1 = -0{,}062.179.7.10^{-16}$
$V_1 = -0{,}016.622.5.10^{-16}$
$W_1 = +0{,}025.424.8.10^{-16}$

$-(\epsilon_1 + 3) \log a = \overline{16}{,}212.266$
nombre $= 1{,}630.294.10^{-16}$

I A. Effort tranchant $T_o = 0$ et $M_{or} = 1$:

$$\text{Posons } \overline{y} = \frac{y}{M_{or}} ; \; \overline{A}_1 = \frac{A_1}{M_{or}} ; \; \overline{B}_1 = \frac{B_1}{M_{or}} \text{ et}$$

$$\overline{T}_{or} = \frac{T_{or}}{M_{or}} = -\,6\,\frac{b}{a} = -\,0{,}012.000$$

d'où la notation symbolique (§ 10) pour le calcul de $\overline{A}_1$ et $\overline{B}_1$:

$$\overbrace{\begin{vmatrix} +\,0{,}245.326.3.10^{-16} & -\,0{,}062.179.7.10^{-16} \\ -\,0{,}016.622.5.10^{-16} & +\,0{,}025.424.8.10^{-16} \end{vmatrix}}^{\Delta} \quad \begin{vmatrix} +\,1 \\ -\,0{,}012.000 \end{vmatrix}$$
$$\qquad \overline{A}_1 \qquad\qquad \overline{B}_1$$

ce qui donne :

$$\overline{A}_1 = \frac{\begin{vmatrix} +\,1 & -\,0{,}062.179.7.10^{-16} \\ -\,0{,}012.000 & +\,0{,}025.424.8.10^{-16} \end{vmatrix}}{\Delta} = +\,4{,}742.43 . 10^{+16}$$

$$\overline{B}_1 = \frac{\begin{vmatrix} +\,0{,}245.326.3.10^{-16} & +\,1 \\ -\,0{,}016.622.5.10^{-16} & -\,0{,}012.000 \end{vmatrix}}{\Delta} = +\,2{,}628.58 . 10^{+16}$$

I B. Moment fléchissant $M_o = 0$ et $T_{or} = 1$:

Seule la colonne séparée dans la notation symbolique change :

$$\begin{vmatrix} 0 \\ +\,1 \end{vmatrix}$$

ce qui donne :

$$\overline{A}_1 = +\,11{,}948.9 . 10^{+16} \qquad \overline{B}_1 = +\,47{,}143.8 . 10^{+16}$$

Remarque : dans ce cas $\overline{A}_1 = \dfrac{A_1}{T_{or}}$ et $\overline{B}_1 = \dfrac{B_1}{T_{or}}$

II. Tube décroissant.

$\epsilon_2 = \epsilon_1 - 3 = 39{,}174.28$ $\qquad D_2 = +\,3.142{,}054$

$C_2 = -\,154{,}697.1$ $\qquad F_2 = -\,133.387{,}3$

$G_2 = +\,110.519{,}5$

Nous ne devons calculer que R_2, S_2, V_2 et W_2 :

$(\epsilon_2 - 2)\log a = +\,12{,}991.854$ $\qquad R_2 = -\,0{,}598.553.7\,.\,10^{12}$

nombre $= 9{,}814.180\,.\,10^{+12}$ $\qquad S_2 = +\,0{,}151.707.8\,.\,10^{12}$

$(\epsilon_2 - 3)\log a = +\,12{,}642.369$ $\qquad V_2 = +\,0{,}056.826.96\,.\,10^{12}$

nombre $= 4{,}389.034\,.\,10^{+12}$ $\qquad W_2 = +\,0{,}037.349.64\,.\,10^{12}$

II A. Effort tranchant $T_o = 0$ et $M_{or} = 1$.

$$\begin{vmatrix} -\,0{,}598.553.7\,.\,10^{12} & +\,0{,}151.707.8\,.\,10^{12} \\ +\,0{,}056.826.96\,.\,10^{12} & +\,0{,}037.349.64\,.\,10^{12} \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} 1 \\ +\,0{,}012.000 \end{vmatrix}$$

$\overline{A}_2 \qquad \overline{B}_2$

d'où

$\overline{A}_2 = -\,1{,}146.958\,.\,10^{-12}$ $\qquad \overline{B}_2 = +\,2{,}066.369\,.\,10^{-12}$

II B. Moment fléchissant $M_o = 0$ et $T_{or} = 1$:

Seule la colonne séparée dans la notation symbolique change :

$$\begin{vmatrix} 0 \\ +\,1 \end{vmatrix}$$

d'où

$\overline{A}_2 = +\,4{,}897.456\,.\,10^{-12}$ $\qquad \overline{B}_2 = +\,19{,}322.61\,.\,10^{-12}$

Nous avons alors calculé un certain nombre de points de l'élastique pour les cas A et seule la déformation à l'origine pour les cas B. Nous utilisons pour cela le tableau du paragraphe 15.

A : $T_o = 0$; $M_{or} = 1$. (Voir le tableau au bas de la page).

B. en $x = 0$; $M_o = 0$; $T_{or} = 1$.

	Tube croissant	*Tube décroissant*
$\overline{A}\cos t + \overline{B}\sin t =$	$+\,48{,}575.6\,.\,10^{16}$	$19{,}909.5\,.\,10^{-12}$
$\overline{y}_o = \dfrac{y_o}{T_{or}} =$	$+\,894{,}040$	$+\,968{,}203$

La figure 1 représente les deux élastiques des tubes croissant et décroissant dans le cas de charge A : $T_o = 0$; $M_{or} = 1$. Le tracé de l'élastique du tube à épaisseur constante $= 5$ cm conduit à des comparaisons intéressantes.

Pour terminer cet exemple, indiquons, pour permettre la comparaison des tubes croissant, décroissant et à épaisseur constante $= 5$ cm pour le cas de charge B : $M_o = 0$; $T_{or} = 1$, que la déformation radiale du tube à épaisseur constante a la valeur :

$$\overline{y}_o = \frac{y_o}{T_{or}} = +\,930{,}589.$$

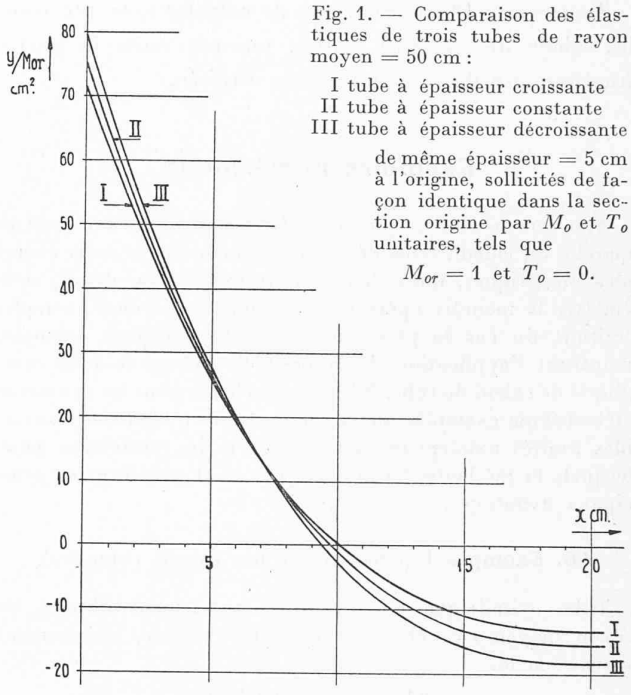

Fig. 1. — Comparaison des élastiques de trois tubes de rayon moyen = 50 cm :

I tube à épaisseur croissante
II tube à épaisseur constante
III tube à épaisseur décroissante

de même épaisseur = 5 cm à l'origine, sollicités de façon identique dans la section origine par M_o et T_o unitaires, tels que

$M_{or} = 1$ et $T_o = 0$.

17. Exemple 2 (résumé).

Soit à calculer la ligne élastique d'un tube tel que le montre la figure 2. Ce tube se compose d'une première partie cylindrique de révolution dont l'épaisseur varie suivant la loi $h = (a + bx)^2$ de 56 mm à 19 mm sur une longueur de 90 mm, et d'une deuxième partie cylindrique de révolution à épaisseur constante 19 mm illimitée axialement. Le rayon moyen du tube est $r = 1150$ mm.

Les sollicitations dans la section origine du tube sont telles que l'on ait

$$\frac{M_o}{E_b} = 1\ \text{mm}^3/\text{mm de circonf.} \quad \text{et} \quad \frac{T_o}{E_b} = 1\ \text{mm}^2/\text{mm de circonf.}$$

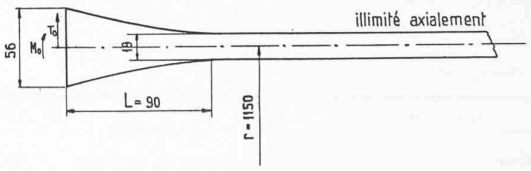

Fig. 2. — Tube cylindrique de révolution à épaisseur variable, objet du calcul de l'exemple 2.

x cm	0	5	10	15	20	0	5	10	15	20
$a + bx$	+2,236.068	2,258.429	2,280.789	2,303.150	2,325.511	+2,236.068	2,213.707	2,191.347	2,168.986	2,146.625
$\lg(a + bx)$	0,349.385	0,353.807	0,358.085	0,362.322	0,366.518	0,349.385	0,345.120	0,340.711	0,336.257	0,331.756
$\beta.\lg(a + bx)$	10,405.327	10,533.992	10,661.380	10,787.536	10,912.468	10,405.327	10,275.372	10,144.102	10,011.480	9,877.482
parité	+	+	+	+	+	+	+	+	+	—
K	+0,405.327	—0,466.008	—0,338.620	—0,212.464	—0,087.532	+0,405.327	+0,275.372	+0,144.102	+0,011.480	—0,122.518
t	4.377,53'	5.032,89'	3.657,10'	2.294,61'	945,35'	4.377,53'	2.974,02'	1.556,30'	123,98'	1.323,19'
$\cos t$	+0,293.059	—0,105.585	—0,485.547	—0,785.387	—0,962.426	+0,293.059	+0,648.558	+0,899.264	+0,999.349	+0,926.835
$\sin t$	+0,956.094	+0,994.303	+0,874.210	+0,619.004	+0,271.538	+0,956.094	+0,761.164	+0,437.403	+0,036.056	—0,375.467
$-\epsilon_1.\lg(a + bx)$	$\overline{15}$,264.938	$\overline{15}$,078.465	$\overline{16}$,898.018	$\overline{16}$,719.317	$\overline{16}$,542.350	13,686.907	13,519.836	13,347.117	13,172.619	12,996.311
10^{+16}.nombre	18,405.110	11,980.220	7,907.113	5,239.829	3,486.178	48,630.26	33,100.62	22,239.07	14,880.544	9,915.418
$10^{-16}.(\overline{A}_1\cos t + \overline{B}_1\sin t)$	+3,902.981	+2,112.876	—0,004.742	—2,097.541	—3,850.479	+1,639.517	+0,828.977	—0,127.582	—1,071.706	—1,838.894
$\overline{y} = \dfrac{J}{M_{or}}$	+71,834.8	+25,312.7	—0,037.50	—10,990.8	—13,423.5	+79,730.1	+27,439.7	— 2,837.3	—15,947.6	—18,233.4
	Tube croissant					Tube décroissant				

Nous indiquons le principe de calcul et résumons les résultats obtenus.

Le premier tube, à épaisseur variable, satisfait aux conditions aux limites suivantes :

en $x = 0$ M_o, T_o
en $x = L$ y_L, y'_L où y_L et y'_L sont à considérer comme deux variables paramétriques.

Le deuxième tube, à épaisseur constante, satisfait aux conditions aux limites :

en $x = L$ y_L, y'_L — même remarque que ci-dessus.
en $x =$ infini $y = 0$

On écrira enfin que les sollicitations M_L et T_L dans la section d'abscisse $x = L$ sont les mêmes pour les deux tubes, ce qui permettra de calculer y_L et y'_L.

Le problème est ainsi complètement déterminé.

La marche du calcul est la même que pour l'exemple suivant (exemple 3), qui est traité en détail. Nous n'indiquons ici que les résultats des calculs.

x et y étant exprimés en mm, on obtient :

$a = 7{,}483.315$
$b = -0{,}034.716$
$\epsilon_1 = +3{,}585$
$2\delta = +0{,}311$
$\epsilon_2 = +0{,}585$

Les constantes du tube à épaisseur variable sont :

$A_1 = +7.967{,}041$; $B_1 = +1.755{,}782$
$A_2 = -304{,}250$; $B_2 = +780{,}374$
et si $t = 2\delta \operatorname{Lg}(a + bx)$

l'élastique s'écrit :

$$y = (a + bx)^{-\epsilon_1}[A_1 \cos t + B_1 \sin t] + (a + bx)^{+\epsilon_2}[A_2 \cos t + B_2 \sin t].$$

La ligne élastique du tube illimité à épaisseur constante se calcule par l'expression :

$$y = e^{-0{,}008.69\,(x-90)}[211{,}252 \cos(0{,}008.69\,\overline{x-90}) - 306{,}871 \sin(0{,}008.69\,\overline{x-90})]$$

Le calcul d'un certain nombre de points de l'élastique fournit le tableau suivant :

x mm	y mm	x mm	y mm
0	+ 689,294	90	+ 211,251
10	+ 633,200	100	+ 168,526
20	+ 578,868	110	+ 130,199
30	+ 522,206	120	+ 96,229
40	+ 467,608	130	+ 66,336
50	+ 414,142	140	+ 40,423
60	+ 359,024	150	+ 18,110
70	+ 308,441	200	— 49,523
80	+ 258,685	250	— 65,734

La figure 3 permet la comparaison de la ligne élastique de ce tube avec les lignes élastiques des tubes à épaisseurs constantes :

$h = 19$ mm $h = 56$ mm

sollicités de façon identique dans la section origine.

18. Exemple 3 (avec exposé complet des détails du calcul).

Dans ce dernier exemple, nous nous proposons de calculer le moment fléchissant et l'effort N radial agissant à l'angle A d'une pièce dont la forme (fig. 4) rappelle celle de certains pistons de pompe. La figure donne les dimensions et les forces appliquées : le moment agissant à l'extrémité libre du tube proviendrait, par exemple, d'un couple de frottement.

1° Calcul de la plaque :

Pour l'exposé du calcul des plaques, se reporter, par exemple, à l'ouvrage de Timoshenko : *Strength of Materials*,

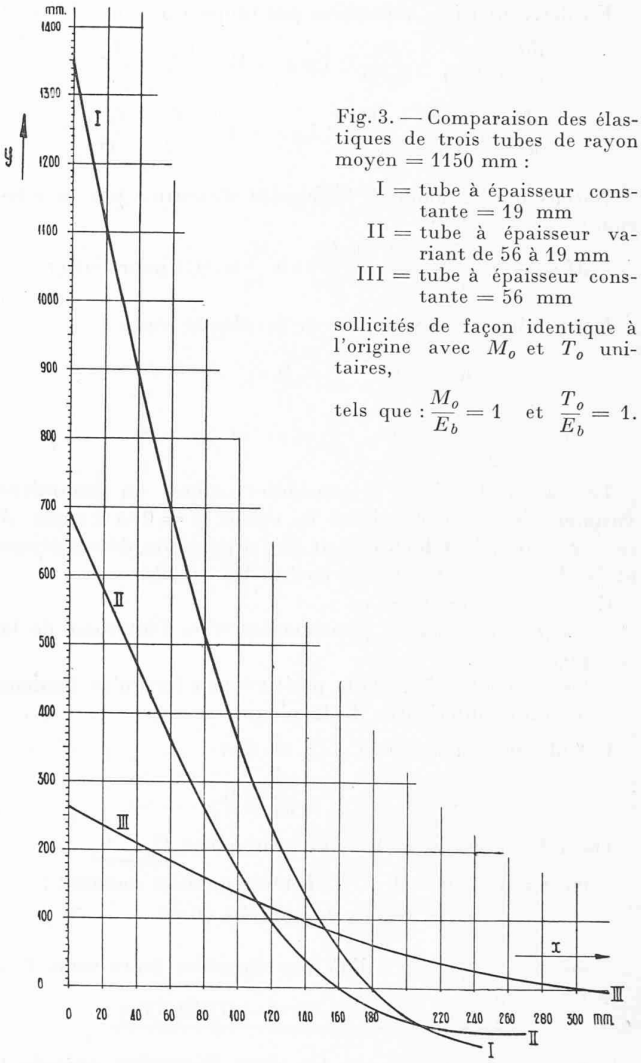

Fig. 3. — Comparaison des élastiques de trois tubes de rayon moyen = 1150 mm :

I = tube à épaisseur constante = 19 mm
II = tube à épaisseur variant de 56 à 19 mm
III = tube à épaisseur constante = 56 mm

sollicités de façon identique à l'origine avec M_o et T_o unitaires,

tels que : $\frac{M_o}{E_b} = 1$ et $\frac{T_o}{E_b} = 1$.

Mac Millan, London 1936, 3e édition, pages 488 ss., en particulier l'équation 85, page 492.

L'équation de la ligne élastique de la plaque s'écrit :

$$y = \frac{px^4}{64D} + \frac{Px^2}{8\pi D}[\operatorname{Lg} x - 1] - \frac{C_1 x^2}{4} - C_2 \operatorname{Lg} x + C_3$$

avec $D = \frac{h^3}{12} \cdot E_b = 6{,}181.319 \,.\, 10^6$ kg.mm ;

Lg = symbole du logarithme népérien ;
C_1, C_2, C_3 = constantes à déterminer par les conditions aux limites.

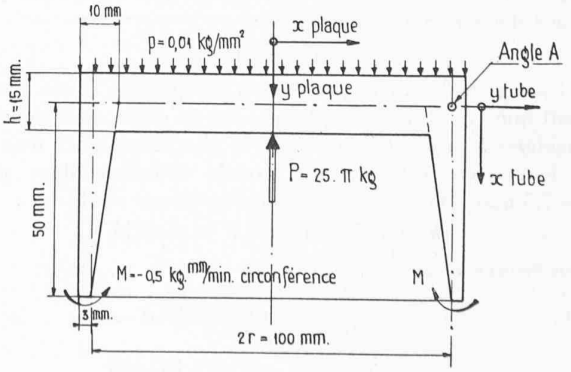

Fig. 4.

En dérivant cette expression par rapport à x, on obtient :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{px^3}{16D} + \frac{Px}{8\pi D}(2 \operatorname{Lg} x - 1) - \frac{C_1 x}{2} - \frac{C_2}{x}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{3px^2}{16D} + \frac{P}{8\pi D}(2 \operatorname{Lg} x + 1) - \frac{C_1}{2} + \frac{C_2}{x^2}$$

Notons que le moment fléchissant s'exprime par la relation :

$$M = -D\left(\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{1}{m}\cdot\frac{1}{x}\frac{dy}{dx}\right) \text{ où } \frac{1}{m} = 0{,}3 \text{ pour l'acier.}$$

Les conditions aux limites de la plaque sont :

$$\text{en } x = 0 : \quad \frac{dy}{dx} = 0 \ ;$$

$$\text{en } x = r : \quad \frac{dy}{dx} = y' \quad \text{et} \quad y = 0.$$

La valeur de y' est à considérer comme un paramètre variable. Nous avons choisi la valeur $y = 0$ à l'angle A ($x = r$), car il faut bien choisir une origine des déformations et le choix de cette origine facilite les calculs.

Conventions de signes :

les y sont comptés positivement vers l'intérieur de la pièce ;

les moments fléchissants positivement lorsqu'ils tendent les fibres inférieures de la plaque.

Calculs des constantes C_1, C_2 et C_3 :

$$\text{en } x = 0 \ ; \quad \frac{dy}{dx} = 0.$$

On a $(x \operatorname{Lg} x)_{x=0} = 0$ par conséquent $\underline{C_2 = 0}$

en $x = r$; $y = 0$ d'où une équation donnant :

$$C_3 = 625\, C_1 + 3{,}522.48 \,.\, 10^{-3}$$

en $x = r$; $\frac{dy}{dx} = y'$ d'où une équation fournissant C_1 :

$$\underline{C_1 = -6{,}394.307 \,.\, 10^{-6} - 0{,}040.000\, y'}$$

et par élimination de C_1, dans l'équation précéda t celle-ci :

$$\underline{C_3 = -478{,}96 \,.\, 10^{-6} - 25{,}000.00\, y'.}$$

Calculons alors le moment M_A, à l'angle A de la plaque, en fonction de y' :

$$M = -\frac{3{,}3}{16}\, px^2 - \frac{P}{8\pi}(2{,}6 \operatorname{Lg} x + 0{,}7) + 0{,}65 \,.\, D \,.\, C_1 - 0{,}7\, D \,.\, \frac{C_2}{x^2}$$

d'où : en $x = r = 50$ mm

$$\underline{M_A = -64{,}820.326 - 16{,}071.43 \,.\, 10^4\, y'} \qquad \text{(I).}$$

2° Calcul du tube :

Il s'agit tout d'abord de chercher le tube équivalent.

Le tube réel a une épaisseur :

$$h = 10 - 0{,}14\, x.$$

Utilisons le deuxième procédé du paragraphe 12, en remarquant que vu les forces appliquées sur la pièce, nous pouvons considérer à priori que la section la plus importante du tube est la section réelle de plus grande épaisseur, donc pour $x = 7{,}5$ mm. Dans cette section, l'épaisseur réelle est :

$$h = 8{,}95 \text{ mm} \quad \text{et} \quad h' = -0{,}14$$

on trouve alors :

$$b = \frac{h'}{2\sqrt{h}} = -0{,}023.398.4$$

$$a = \sqrt{h} - b \,.\, 7{,}5 = +3{,}167.148$$

Calculons l'épaisseur équivalente à l'extrémité libre du tube : on trouve $3{,}989 = (a + bx)^2$ à la place de l'épaisseur réelle $= 3{,}000$ mm. La différence nous paraît un peu grande. Introduisons donc une variation db ; il vient :

$$dh = 169{,}745\, db \quad \text{dans la section } x = 50 \text{ mm.}$$

A une variation $db = -0{,}000.589$ correspond une variation $dh = -0{,}1$ mm.

Sur cette base, nous adoptons alors $b = -0{,}027$ d'où :

$$\underline{a = +3{,}194.160} \qquad \underline{b = -0{,}027.000}$$

ce qui permet de calculer le tableau de comparaison des épaisseurs :

x	mm	0	7,5	20	30	40	50
h réel	mm	10,000	8,950	7,200	5,800	4,400	3,000
h équivalent	mm	10,202	8,950	7,045	5,684	4,470	3,401

La loi équivalente nous semble être suffisamment voisine de la loi réelle ; les résultats du calcul confirmeront ce point de vue, car ils montreront l'importance primordiale de la section d'abscisse $x = 7{,}5$ mm.

Calculons alors successivement, suivant le schéma habituel :

$$c = 8.219{,}18 \ ; \quad E_b = \frac{2 \,.\, 10^4}{0{,}91} = 2{,}197.802 \,.\, 10^4$$

$\gamma = 6{,}891.56$; $\delta = 6{,}576.08$; $\beta = 9{,}639.687$

$\epsilon_1 = 15{,}283.12$ $\qquad \epsilon_2 = 12{,}283.12$

$C_1 = +75{,}877.6$ $\qquad C_2 = -34{,}387.4$

$D_1 = +415{,}164.2$ $\qquad D_2 = +309{,}947.0$

$F_1 = -4.148{,}904$ $\qquad F_2 = -4.430{,}082.3$

$G_1 = +8.173{,}287$ $\qquad G_2 = +2.734{,}953.6$

pour $x = 0$		*pour* $x = 50$	
$a + bx$	$= +3{,}194.160$	$a + bx$	$= 1{,}844.160$
$\log(a + bx)$	$= 0{,}504.430.1$	$\log(a + bx)$	$= 0{,}265.926$
$\beta.\log(a + bx)$	$= 4{,}862.548$	$\beta \lg(a + bx)$	$= 2{,}563.439$
parité	$= +$	parité	$= +$
K	$= -0{,}137.452$	K	$= -0{,}436.561$
t	$= 1.484{,}48'$	t	$= 4.714{,}86'$
$\cos t$	$= -0{,}908.205$	$\cos t$	$= -0{,}197.982$
$\sin t$	$= +0{,}418.522$	$\sin t$	$= +0{,}980.204$
$-\epsilon_1 \lg(a+bx)$	$= -7{,}709.266$	$-(\epsilon_1+2)\lg(a+bx)$	$= -4{,}596.022$
nombre	$= +1{,}953.144 \,.\, 10^{-8}$	nombre	$= 2{,}534.998.10^{-5}$
$-(\epsilon_1+1)\lg(a+bx)$	$= -8{,}213.696$	$-(\epsilon_1+3)\lg(a+bx)$	$= -4{,}861.948$
nombre	$= +6{,}113.701 \,.\, 10^{-9}$	nombre	$= 1{,}374.207.10^{-5}$
$+\epsilon_2 \lg(a + bx)$	$= +6{,}195.975$	$+(\epsilon_2-2)\lg(a+bx)$	$= +2{,}734.544$
nombre	$= 1{,}570.274 \,.\, 10^6$	nombre	$= 5{,}426.800 \,.\, 10^2$
$+(\epsilon_2-1)\lg(a+bx)$	$= +5{,}691.545$	$+(\epsilon_2-3)\lg(a+bx)$	$= +2{,}468.618$
nombre	$= 4{,}915.247 \,.\, 10^5$	nombre	$= 2{,}941.835 \,.\, 10^2$

$H_1 = -1{,}773.855 \ 10^{-8}$ $\qquad R_1 = +0{,}724.279 \,.\, 10^{-5}$

$K_1 = +0{,}817.434 \ 10^{-8}$ $\qquad S_1 = +0{,}289.345 \,.\, 10^{-5}$

$P_1 = -1{,}382.583 \ 10^{-9}$ $\qquad V_1 = +0{,}238.917 \,.\, 10^{-5}$

$Q_1 = +3{,}027.577 \ 10^{-9}$ $\qquad W_1 = -0{,}066.231 \,.\, 10^{-5}$

$H_2 = -1{,}426.130 \,.\, 10^6$ $\qquad R_2 = -1{,}174.985 \,.\, 10^2$

$K_2 = +0{,}657.194 \ 10^6$ $\qquad S_2 = -0{,}376.112 \,.\, 10^2$

$P_2 = +2{,}210.984 \ 10^5$ $\qquad V_2 = +0{,}104.444 \,.\, 10^2$

$Q_2 = +0{,}902.984 \,.\, 10^5$ $\qquad W_2 = +0{,}282.796 \,.\, 10^2$

$(a + bx)^6 = 1.062{,}038$

$\frac{(a+bx)^6 E_b}{12} = +194{,}512.4 \,.\, 10^4$

$6\,\frac{b}{a + bx} = -0{,}050.717.6$

utiles plus loin

$(a + bx)^6 = 39{,}336.13$

$\frac{12}{E_b(a+bx)^6} = 0{,}138.803.7 \,.\, 10^{-4}$

$-\frac{12}{E_b(a+bx)^6} \cdot \frac{6b}{a + bx} = +0{,}012.193.19 \,.\, 10^{-4}$

$M_{Lr} = -0{,}694.018.5 \,.\, 10^{-5}$

$T_{Lr} = -0{,}060.966.0 \,.\, 10^{-5}$

A_1	B_1	A_2	B_2	$\times 10^{-5}$ — Cte	y'			
$-1{,}773.855.10^{-8}$	$+0{,}817.433.8.10^{-8}$	$-1.426{,}130.6.10^{3}$	$+657{,}194.2.10^{3}$	0		$+7{,}582.017.10^{-9}$	0	y'
$-0{,}138.258.2.10^{-8}$	$+0{,}302.757.7.10^{-8}$	$+221{,}098.4.10^{3}$	$+90{,}298.36.10^{3}$			$-8{,}724.792.10^{-9}$	$-3{,}419.578$	y'
$+724{,}279.5.10^{-8}$	$+289{,}334.6.10^{-8}$	$-0{,}117.498.5.10^{3}$	$-0{,}037.611.23.10^{3}$	$+0{,}694.018.5$		$-8{,}635.217.10^{-9}$	$+3{,}419.578$	y'
$+238{,}916.8.10^{-8}$	$-66{,}231.3.10^{-8}$	$+0{,}010.444.38.10^{3}$	$+0{,}028.279.55.10^{3}$	$+0{,}060.966.0$		$-9{,}635.217.10^{-9}$	$+0$	y'
	$+0{,}239.045.1.10^{-8}$	$+332{,}254.2.10^{3}$	$+39{,}075.17.10^{3}$		y'	$+4{,}508.083.10^{-10}$	$+1$	y'
	$+623{,}109.5.10^{-8}$	$-582.300{,}8.10^{3}$	$+268.337{,}7.10^{3}$	$+0{,}694.018.5$		$+20{,}326.673.10^{-10}$	$-0{,}203.320$	y'
	$+43{,}867.1.10^{-8}$	$-192.082{,}5.10^{3}$	$+88.516{,}1.10^{3}$	$+0{,}060.966.0$		$+24{,}834.756.10^{-10}$	$-0{,}796.680$	y'
		$-1.448.374{,}9.10^{3}$	$+166.481{,}99.10^{3}$	$+0{,}694.018.5$	$-2.606{,}661\ y'$	$+0{,}694.018.5.10^{-5}$	$+0$	y'
		$-253.054{,}38.10^{3}$	$+81.345{,}45.10^{3}$	$+0{,}060.966.0$	$-183{,}509.7\ y'$	$+0{,}192.069.4.10^{-5}$	$-2.606{,}661$	y'
			$+52.258{,}37.10^{3}$	$-0{,}060.290.2$	$+271{,}915.9\ y'$	$+0{,}886.087.9.10^{-5}$	$-866{,}256$	y'
							$-3.472{,}917$	y'

$A_1 = -0{,}543.179.5$

$B_1 = -1{,}038.915$

$A_2 = +0{,}611.780.7.10^{-14} - 2{,}397.803.10^{-6}\,y'$

$B_2 = +1{,}153.695.10^{-14} - 5{,}203.299.10^{-6}\,y'$

Les conditions aux limites de ce tube sont les suivantes :

$$\underline{\text{en } x = 0} \quad \frac{dy}{dx} = y', \text{ paramètre variable ;} \quad y = 0.$$

En posant $y = 0$, nous considérons que la rigidité radiale de la plaque est si grande par rapport à la rigidité radiale du tube que la déformation radiale de la plaque peut être négligée.

$$\underline{\text{en } x = 50} \quad \frac{d^2y}{dx^2} = M_{Lr} \quad \text{et} \quad \frac{d^3y}{dx^3} = T_{Lr}.$$

Rapportons-nous maintenant au tableau des conditions aux limites du paragraphe 10. Nous voyons que nous sommes dans le deuxième cas, avec inversion des indices. La solution s'écrit symboliquement :

$$\begin{vmatrix} \begin{pmatrix} H_1 & K_1 & H_2 & K_2 \\ P_1 & Q_1 & P_2 & Q_2 \end{pmatrix}_0 \\ \begin{pmatrix} R_1 & S_1 & R_2 & S_2 \\ V_1 & W_1 & V_2 & W_2 \end{pmatrix}_{50} \\ A_1 \quad B_1 \quad A_2 \quad B_2 \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} \begin{pmatrix} y \\ y' \end{pmatrix}_0 \\ \begin{pmatrix} M_r \\ T_r \end{pmatrix}_{50} \end{vmatrix}$$

Nous calculons ce système de quatre équations à quatre inconnues suivant le schéma de Runge et Kœnig *(loc. cit.)*, ce qui donne les résultats du tableau ci-contre :

Calculons maintenant y_0'' et y_0''' :

$$y_0'' = \underset{0}{R_1} A_1 + \underset{0}{S_1} B_1 + \underset{0}{R_2} A_2 + \underset{0}{S_2} B_2 \qquad \text{et}$$

$$y_0''' = \underset{0}{V_1} A_1 + \underset{0}{W_1} B_1 + \underset{0}{V_2} A_2 + \underset{0}{W_2} B_2.$$

Calculons successivement $R_{1_0} \ldots W_{2_0}$ $\underline{\text{en } x = 0}$

$-(\epsilon_1 + 2)\log(a + bx)$	$+(\epsilon_2 - 2)\log(a + bx)$
$= -8{,}718.126$	$= +5{,}187.115$
nombre $= 1{,}913.701.10^{-9}$	nombre $= 1{,}538.563.10^{5}$
$-(\epsilon_1 + 3)\log(a + bx)$	$+(\epsilon_2 - 3)\log(a + bx)$
$= -9{,}222.556$	$= 4{,}682.685$
nombre $= 5{,}990.237.10^{-10}$	nombre $= 4{,}815.984.10^{4}$
$R_1 = +0{,}146.265.10^{-9}$	$R_2 = -0{,}110.466.10^{5}$
$S_1 = +0{,}570.327.10^{-9}$	$S_2 = -0{,}331.871.10^{5}$
$V_1 = +0{,}847.596.10^{-10}$	$V_2 = -0{,}272.889.10^{4}$
$W_1 = +0{,}670.485.10^{-10}$	$W_2 = +0{,}411.211.10^{4}$

d'où :

$$y_0'' = -1{,}122.43.10^{-9} + 0{,}199.170.y'$$
$$y_0''' = -0{,}849.510.10^{-10} - 0{,}014.853.2\ y'$$

Or

$$\underline{M_A} = M_0 = \frac{a^6 E_b}{12}\, y_0'' =$$
$$\underline{= -2{,}183.26.10^{-3} + 38{,}741.0.10^{4}\, y'} \qquad \text{(II).}$$

Egalant maintenant les relations (I) (M_A plaque) et (II), il vient :

$$y_A' = -1{,}182.54.10^{-4} \text{ radians } (= -24{,}39'')$$

d'où $y_0''' = +1{,}756.37.10^{-6}$ et enfin :

$$\boxed{\begin{aligned} M_A &= -45{,}815 \quad \text{kg mm/mm circonférence} \\ N_A &= +\ 5{,}740 \quad \text{kg/mm circonférence} \end{aligned}}$$

Le signe de N_A correspond à une compression radiale de la plaque.

Remarque :

On s'aperçoit ainsi que le moment agissant dans la section origine du tube est environ 100 fois plus grand que le moment

agissant sur l'extrémité libre. On peut donc penser que les sollicitations dans la section $x = 50$ mm du tube ne jouent qu'un rôle négligeable sur l'élastique au voisinage de la section $x = 0$, et comme dans ce cas la ligne élastique s'amortit très rapidement à partir de la section origine, il y a lieu d'estimer que ce tube se comporte dans la section origine, à très peu de chose près, comme tube illimité axialement.

Le calcul vérifie d'ailleurs pleinement cette remarque. En effet, nous avons vu (§ 10, Remarque 1) que pour un tube décroissant illimité axialement, les contraintes A_1 et B_1 étaient nulles.

Or introduisons la valeur de y' dans A_2 et B_2 :

$$A_2 = +\,2{,}835.569.10^{-10}\ ;$$
$$B_2 = +\,6{,}153.245.10^{-10}\ ;$$

recalculons y_0'' et y_0''' en séparant les termes d'indices 1 des termes d'indice 2 :

$$y_0'' = -\,[(0{,}000.067.197)_1 + (2{,}355.317)_2].10^{-5}$$
$$y_0''' = +\,[(-\,0{,}000.115.697)_1 + (1{,}756.485)_2].10^{-6}$$

Par conséquent, les termes d'indices « 1 » n'apportent qu'une contribution égale à environ 0,03 ‰ pour M_A, et environ 0,07 ‰ pour N_A, de la contribution des termes d'indice « 2 ». Les termes d'indices « 1 » sont donc négligeables par rapport aux termes d'indice « 2 », ce qui prouve que le tube se comporte, dans la section origine, presque parfaitement comme un tube axialement illimité.

19. Conclusions.

La méthode, exposée systématiquement dans les pages qui précèdent, permet le calcul des déformations, et par conséquent des contraintes, en tous points de tubes cylindriques de révolution à variations quelconques d'épaisseur (variations aussi bien lentes que rapides), les conditions aux limites pouvant être absolument quelconques (par exemple : tube limité axialement), à condition de présenter la symétrie de révolution autour de l'axe du tube.

Les quelques exemples traités montrent la marche du calcul numérique dans tous ses détails.

Bien que ces calculs soient singulièrement plus courts que ceux qu'exige l'application des développements en série des fonctions de Bessel ou de Legendre (seul moyen général d'intégration de toutes les équations différentielles linéaires à coefficients variables, dont celle du tube est un cas particulier), les résultats obtenus sont néanmoins parfaitement rigoureux lorsque la loi réelle de variation d'épaisseur est parabolique. Les résultats ne sont qu'approchés pour toute autre loi de variation d'épaisseur, mais cette approximation dépend simplement de l'écart entre la loi réelle de variation d'épaisseur et la loi parabolique admise pour le calcul. Il sera presque toujours possible de trouver une loi parabolique représentant, dans le domaine utile, les variations réelles avec une approximation bien suffisante, sinon de même ordre de grandeur que les tolérances de fabrication.

Sainte-Croix, le 9 février 1945.

LES CONGRÈS

Association suisse pour l'aménagement des eaux.

Assemblée générale du 14 juillet, 1945 à Aarau.

L'Association suisse pour l'aménagement des eaux a tenu, le 14 juillet 1945, à Aarau, sa trente-quatrième Assemblée générale, sous la présidence de M. le Dr O. Wettstein.

Elle a approuvé les comptes et la gestion de l'exercice 1944 et le rapport annuel de l'Association et a procédé aux nominations statutaires.

Après plus de trente années d'activité, M. le Dr Wettstein, président, a annoncé son intention de céder sa place à une force plus jeune. L'assemblée a désigné pour lui succéder M. le Dr P. Corrodi, conseiller d'Etat à Zurich, jusqu'ici deuxième vice-président. M. le conseiller d'Etat W. Buchs, de Fribourg, a été nommé deuxième vice-président. M. le Dr R. Neeser, de Genève, a été nommé membre du comité et du bureau.

Différents orateurs ont tenu à relever avec quel inlassable dévouement et quelle compétence M. Wettstein s'est dépensé pour la cause de l'aménagement des eaux en Suisse.

La partie administrative fut suivie d'une conférence de M. J. Hug, géologue à Zurich, sur le sujet « Problèmes hydrologiques et juridiques que pose l'utilisation de nappes d'eaux souterraines par les installations de thermopompage ».

Le conférencier exposa succinctement l'origine et la répartition en Suisse des nappes souterraines, les sondages et essais effectués pour déterminer leur température et les variations de celle-ci, et indiqua les problèmes juridiques que pourrait poser leur utilisation pour des thermopompages. Une très belle série de projections lumineuses agrémenta cet exposé.

Au cours du repas qui groupa ensuite les quelque cent cinquante participants dont de nombreux représentants des administrations fédérales et cantonales intéressées aux problèmes de notre économie des eaux et des sociétés et entreprises industrielles spécialisées dans l'aménagement de nos forces hydroélectriques, M. le Dr h. c. A. Zwygart donna quelques renseignements sur l'état actuel des travaux de construction de l'usine hydroélectrique de Rupperswil-Auenstein. Ces travaux sont activement poussés et l'on espère pouvoir mettre en service cette année encore cette importante centrale qui fournira environ 200 millions de kWh dont 90 en hiver et 110 en été.

L'orateur, faisant allusion à certaines résistances, rappela que la création d'usines au fil de l'eau doit nécessairement être accompagnée de celle de grands bassins d'accumulation saisonniers si l'on veut que nos forces hydrauliques soient rationnellement utilisées.

Dans l'après-midi, une visite de l'usine en construction de Rupperswil-Auenstein permit aux participants de se rendre compte des progrès réalisés dans les travaux depuis la visite du 20 août 1943. Le gros œuvre est actuellement terminé et la retenue d'eau atteint deux tiers de sa cote maximum. Un des groupes turbo-alternateurs est entièrement monté, l'autre est en cours de montage ; on travaille aux tableaux de commande et canalisations électriques. Ceux de nos lecteurs qui voudraient se remémorer les caractéristiques de cette usine, qui comprend deux groupes de 25 000 CV, l'un destiné aux C. F. F., l'autre aux N. O. K., en trouveront une description détaillée au numéro d'août 1943 de la revue *Cours d'eau et énergie* ainsi qu'au numéro du 22 décembre 1944