

**Zeitschrift:** Bulletin technique de la Suisse romande  
**Band:** 71 (1945)  
**Heft:** 15-16: 25me anniversaire du Laboratoire d'essai des matériaux de l'Ecole d'ingénieurs de Lausanne  
  
**Artikel:** Poutres formant radier sur sol compressible  
**Autor:** Paris, A.  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-54100>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 26.01.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

sollicitations au gel, les déchets provoqués par celui-ci n'ont que très rarement atteint 25 gr/dcm<sup>2</sup>, souvent ils ont été inférieurs à 1 gr. Or 25 gr/dcm<sup>2</sup> correspondent à une pellicule de béton de 1 mm d'épaisseur. En mettant les choses au pire, le béton sera détérioré sur une épaisseur de 2 à 3 cm après une trentaine d'années. A ce moment, il suffira de munir le parement amont d'un enduit gunité pour le restaurer complètement. Quant à la chute de résistance à la compression, de 10 à 20 %, elle sera largement compensée par le durcissement normal du béton.

Les plus beaux raisonnements ne tiennent pas devant la réalité. Le gel peut attaquer le béton dans toute la masse gelée, c'est-à-dire sur une épaisseur dépassant 0,80 à 1,00 m. Il provoque le déchaussement des graviers, une fissuration, souvent imperceptible, de la pâte liante, ce qui a pour conséquence de diminuer très sensiblement, non pas la résistance à la compression qui est peu modifiée, mais la résistance à la traction et le module d'élasticité apparent.

Depuis 1931, nous avons modifié en conséquence l'essai de gélivité ; ce que nous déterminons maintenant c'est la chute de la résistance à la flexion et du module d'élasticité du béton sous l'action du gel. Cette méthode, mise au point par le Laboratoire de Lausanne, a été aussi adoptée depuis par le Laboratoire fédéral de Zurich.

Les recherches entreprises sur ces nouvelles bases ont abouti aux conclusions suivantes :

Contrairement à ce que l'on croit généralement, la gélivité d'un béton ne dépend ni de sa porosité, ni de sa résistance, mais essentiellement de sa fissuration, souvent microscopique, due au retrait et aux variations locales de température, ainsi qu'aux vides laissés sous les gros graviers par la remontée de l'excès d'eau de gâchage. A égalité de résistance un mortier sera moins gélif qu'un béton contenant des gros graviers. Toute fissure est une amorce d'attaque par le gel<sup>1</sup>.

Pour réaliser un béton non gélif, il faut le gâcher avec peu d'eau pour réduire le retrait et les effets de la remontée d'eau de gâchage. Pour atténuer les inconvénients de cette dernière, il ne faut pas utiliser, pour les bétons exposés au gel, un gravier dont les grains dépassent 30 mm de diamètre.

Par analogie, les briques et les tuiles, bien que toujours très poreuses et à résistance modérée, ne sont gélives que si elles ont une texture feuilletée due à un défaut dans le rebattage de l'argile.

\* \* \*

Il y a encore une autre forme très importante de la gélivité du béton que nous avons constatée, en 1938, lors des essais d'un bloc de béton au dosage de 300 kg

prélevé dans le parement du barrage de Barberine.

Le béton altéré tend à se détacher en feuillets verticaux parallèles au parement ; les graviers ne sont pas déchaussés comme cela paraîtrait normal, mais certains ont été cisailés par des *efforts tangentiels parallèles au parement*. Tandis que la résistance à la flexion reste notable pour les prismes horizontaux ou verticaux parallèles au parement, elle est tombée à zéro pour les prismes normaux à celui-ci.

Cette fissuration spéciale dans des plans parallèles au parement, alors que la pâte liante n'est pas détruite, est due au gonflement du béton gelé par rapport au même béton non gelé. Il se produit des efforts tangentiels intenses au point de contact du béton gelé avec celui qui ne l'est pas encore, efforts qui peuvent provoquer le cisaillement du béton. A mesure que le gel pénètre dans la masse du béton, il se forme une série de fissures parallèles au parement. Ces fissures s'élargissent progressivement sous l'action du gel et du dégel jusqu'à ce que se produise la chute de feuillets de béton.

Ce phénomène de dilatation du béton gelé est très étroitement apparenté au soulèvement des chaussées. Dans certains cas, suivant la nature du sous-sol et du revêtement, celui-ci peut se dilater sous l'action du gel. Il se produit des compressions tangentielles dans le plan du revêtement qui peuvent provoquer son soulèvement par flambage. C'est pour cette raison que le soulèvement est généralement plus marqué au milieu de la chaussée que sur ses bords.

La dilatation du béton gelé peut atteindre 0,1 à 0,2 mm/m<sup>3</sup> pour du béton coulé, comme celui du barrage de Barberine ; elle est pratiquement nulle pour du béton vibré.

Lausanne, février 1945.

## Poutres formant radier sur sol compressible

par A. PARIS, professeur à l'Ecole d'ingénieurs  
de l'Université de Lausanne.

Les phénomènes de déformation des sols de fondation, sollicités par la charge des bâtiments ou autres ouvrages, sont affectés de deux facteurs qui influencent défavorablement la fidélité des efforts à la loi de Navier. D'une part l'homogénéité, généralement locale, empêche l'élasticité supposée de se manifester par une loi simple, qu'on admet quand même par nécessité de calcul. D'autre part, cette élasticité, jointe à l'impossibilité de réactions négatives sous les ondes de soulèvement, fait que la déformation se manifeste par des cuvettes localisées, que le calcul suppose finir brusquement à leur point d'émergence, tandis qu'un raccordement s'impose en réalité avec les surfaces primitives du sol, demeurées telles dans les régions non affectées.

<sup>1</sup> Voir : « Etude des parements des barrages en béton et en maçonnerie », par J. BOLOMEY. Publication du « Second congress on large dams », Washington, 1936. — « Module d'élasticité du béton », par J. BOLOMEY. *Bulletin technique* nos 17 et 18, 1939. — « Destruction des bétons par voie chimique, physique ou mécanique », par J. BOLOMEY. *Bulletin technique* n° 21, 1940.

Adapter l'analyse des déformations à ces faits réels conduirait à des complications sans proportion avec les avantages théoriques, restés hypothétiques en présence d'une élasticité imparfaite.

On base donc les calculs habituels sur la condition des déformations linéaires

$$s = (B)v \quad (1)$$

qui lie entre eux, sur le sol de fondation, les réactions spécifiques  $s$  toujours positives, l'indice de compressibilité  $(B)$  du terrain et les ordonnées  $v$  des surfaces d'enfoncement élastique de contact. Ce problème a déjà été fort étudié ; nous croyons néanmoins utile de rechercher ici une solution mathématique capable de satisfaire à toutes les conditions, que la nature des faits impose aux limites du radier.

Considérons une poutre rectangulaire de section constante  $F = d.e$  ; on connaît sa raideur  $(E.J)$ , produit du module d'élasticité du béton par le moment d'inertie censé constant malgré la solidarité avec les bases monolithes des colonnes solidaires. La résistance du fondement aux déformations élastiques s'incarne dans la caractéristique du professeur Dr M. Ritter

$$k = \sqrt[4]{\frac{(B)d}{4(EJ)}} \quad (2)$$

indice simple de la solidarité de déformation entre sol et poutre.

Nous admettons pouvoir négliger l'effet du poids propre du sommier en béton, portion de la charge totale faible en soi et capable de s'équilibrer par une réaction immédiate. Restent les charges de construction.

Celles-ci se présentent localement comme charges concentrées  $P$  agissant sur une largeur  $2b$  censée négligeable ; ailleurs, les charges réparties  $p$  uniformes ou variables affectent des espaces finis tels que  $a$  (fig. 1). Le sol leur répond par des réactions montantes

$$q = s.d = d.(B).v$$

qui ont un diagramme continu sur toute la longueur de la poutre, si l'on suppose momentanément l'absence de soulèvement.

Il se forme ainsi deux sortes de sollicitations de la poutre :

Les régions I, telles que  $A - B_1$ ,  $B_2 - C$ , etc., où agissent seulement les réactions du sol, où la poutre tend donc à remonter et qui peuvent donner lieu à

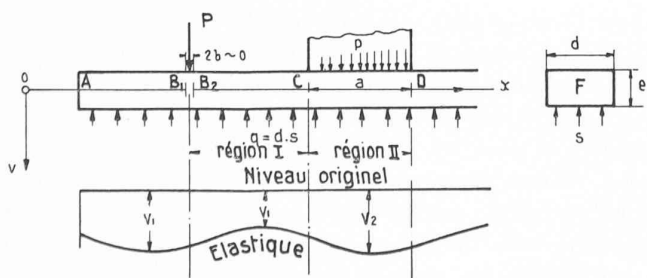


Fig. 1. — Types de charge.

des soulèvements locaux ; la réaction du sol, seule en cause, introduit en analyse une *équation différentielle homogène*, où la déformation élastique  $v$  apparaît simplement proportionnelle à la réaction  $q$ .

$$q = -(EJ) \frac{d^4 v}{dx^4} = d.(B).v \quad (3)$$

Les régions II, telles que  $CD$ , se placent entre les domaines de pure réaction ; la résultante variable

$$r = q - p = d.(B).v - \frac{P}{2b}$$

conduit à une *équation différentielle avec membre de charge* du type

$$r = -(EJ) \frac{d^4 v}{dx^4} = d.(B).v - p. \quad (4)$$

Ces régions I et II ne sont nettement tranchées que dans la conception théorique ; en réalité, la poutre, résistante au cisaillement, répartit les charges  $P$  ou  $p.a$  sur des longueurs difficiles à préciser, et pour lesquelles l'Ordonnance donne des mesures, arbitraires du reste puisqu'elles ne font pas intervenir le rapport des raideurs de la poutre et du sol. En réalité, l'action transmise par la poutre au sol s'efface progressivement en dehors des charges, et sur des longueurs que des mesures au laboratoire de statique permettraient de comparer aux résultats du calcul théorique ; une conception plus claire en résulterait peut-être.

Ceci admis, les conditions d'élasticité s'expriment par les formules habituelles de réaction et de moment

$$r = \frac{d^2 M}{dx^2} \quad M = -(EJ) \frac{d^2 v}{dx^2}$$

c'est-à-dire

$$r = -(EJ) \frac{d^4 v}{dx^4}.$$

Les deux régions de charge, constatées ci-dessus, se comportent comme suit dans l'analyse de la stabilité.

Convenant du symbole

$$\varphi = k.x \quad (5)$$

qui remplace l'abscisse linéaire  $x$  par le nombre pur  $k.x$ , on établit les équations différentielles et leurs dérivées.

Régions I (sans charge directe). L'équation homogène

$$(B)d.v_1 - (EJ) \frac{d^4 v_1}{dx^4} = 0$$

que la caractéristique (équation 2) permet d'écrire

$$\frac{d^4 v_1}{dx^4} + 4k^4 v_1 = 0 \quad (6)$$

admet l'intégrale

$$\left. \begin{aligned} v_1 = & + A e^{+\varphi} \cos \varphi + B e^{-\varphi} \cos \varphi + \\ & + C e^{+\varphi} \sin \varphi + D e^{-\varphi} \sin \varphi \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

avec les dérivées

$$\left. \begin{aligned} \frac{dv_1}{dx} = & k [e^{+\varphi} \cos \varphi (+A+C) + e^{-\varphi} \cos \varphi (-B+D) + \\ & + e^{+\varphi} \sin \varphi (-A+C) + e^{-\varphi} \sin \varphi (-B-D)] \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2 v_1}{dx^2} = 2k^2 [ &+ C.e^{+\varphi} \cos \varphi - D.e^{-\varphi} \cos \varphi - \\ &- A.e^{+\varphi} \sin \varphi + B.e^{-\varphi} \sin \varphi ] \end{aligned} \right\} 9)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^3 v_1}{dx^3} = 2k^3 [ &e^{+\varphi} \cos \varphi (-A + C) + \\ &+ e^{-\varphi} \cos \varphi (+B + D) + \\ &+ e^{+\varphi} \sin \varphi (-A - C) + e^{-\varphi} \sin \varphi (-B + D) ] \end{aligned} \right\} 10)$$

dont la quatrième

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^4 v_1}{dx^4} = -k^4 [ &+ A.e^{+\varphi} \cos \varphi + B.e^{-\varphi} \cos \varphi + \\ &+ C.e^{+\varphi} \sin \varphi + D.e^{-\varphi} \sin \varphi ] = -4k^4 v_1 \end{aligned} \right\} 11)$$

satisfait à la condition 6.

L'amortissement des ondes de déformation réduit en général les facteurs  $A$  et  $C$  des puissances positives de  $e$  à de petites fractions de  $B$  et  $D$ , dans les régions extérieures aux charges du moins ; les conditions aux limites les empêchent toutefois de s'annuler régulièrement.

*Régions II* (sous charge répartie). Les charges dites concentrées ne l'étant jamais que relativement, on traitera d'une manière analogue les secteurs II, qui supportent une charge fortement localisée ; nous en étudierons néanmoins le passage à la limite  $2b = 0$ .

L'équation 4 devient

$$\frac{d^4 v_2}{dx^4} + 4k^4 v_2 = \frac{P}{(EJ)} \quad 12)$$

Elle admet, si la charge est uniforme, l'intégrale

$$v_2 = v_0 + \frac{P}{4k^4(EJ)}$$

où  $v_0$  représente l'intégrale générale de l'équation homogène ; on écrit donc l'équation de l'élastique

$$\left. \begin{aligned} v_2 = &+ E.e^{+\varphi} \cos \varphi + F.e^{-\varphi} \cos \varphi + G.e^{+\varphi} \sin \varphi + \\ &+ H.e^{-\varphi} \sin \varphi + \frac{P}{4k^4(EJ)} \end{aligned} \right\} 13)$$

puis ses dérivées

$$\left. \begin{aligned} \frac{dv_2}{dx} = &k [e^{+\varphi} \cos \varphi (+E + G) + e^{-\varphi} \cos \varphi (-F + H) + \\ &+ e^{+\varphi} \sin \varphi (-E + G) + e^{-\varphi} \sin \varphi (-F - H)] \end{aligned} \right\} 14)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2 v_2}{dx^2} = &2k^2 [ + G.e^{+\varphi} \cos \varphi - H.e^{-\varphi} \cos \varphi - \\ &- E.e^{+\varphi} \sin \varphi + F.e^{-\varphi} \sin \varphi ] \end{aligned} \right\} 15)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^3 v_2}{dx^3} = &2k^3 [e^{+\varphi} \cos \varphi (-E + G) + e^{-\varphi} \cos \varphi (+F + H) + \\ &+ e^{+\varphi} \sin \varphi (-E - G) + e^{-\varphi} \sin \varphi (-F + H)] \end{aligned} \right\} 16)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^4 v_2}{dx^4} = &-4k^4 [ + E.e^{+\varphi} \cos \varphi + F.e^{-\varphi} \cos \varphi + \\ &+ G.e^{+\varphi} \sin \varphi + H.e^{-\varphi} \sin \varphi ] = -4k^4 \left[ v_2 - \frac{P}{4k^4(EJ)} \right] \end{aligned} \right\} 17)$$

$$\text{c'est-à-dire } \frac{d^4 v_2}{dx^4} + 4k^4 v_2 - \frac{P}{(EJ)} = 0$$

résultat conforme à l'équation 12.

Ces développements s'appliquent à divers cas particuliers, dont nous examinerons deux formes habituelles.

### 1. Poutre de fondation de longueur limitée.

Si la poutre supporte des charges théoriquement concentrées, donc de largeur réputée nulle, toutes les régions sont du type I à équation homogène ; ainsi les deux secteurs terminaux et les intervalles, qui séparent les charges. Chaque secteur introduit quatre constantes d'intégration, les seules inconnues du problème.

#### a) Deux charges égales et symétriques.

Considérons le support de deux charges égales et symétriques. La verticale médiane  $M$ , sur laquelle nous plaçons l'origine 0, divise la poutre en deux parties équivalentes ; chacune d'elles comporte deux domaines d'intégration du premier type, sans charge extérieure. Les équations différentielles appartiennent au groupe 7 à 11 ; nous les rapportons néanmoins à des ordonnées  $v_1$  et  $v_2$ , et désignons les constantes par  $A..D$  et  $E..H$ . Deux d'entre elles,  $E$  et  $G$  dans les régions extérieures, coefficients de puissances à exposants positifs, sont très petites mais non nulles, car elles doivent contribuer à satisfaire aux huit conditions d'extrémités exprimées par ordonnées  $v$ , tangentes  $dv/dx$ , moment  $M$  ou effort tranchant  $Q$

$$\text{en } A \quad M_2 = 0 \quad (1) \quad Q_2 = 0 \quad (2)$$

$$\text{en } B \quad v_2 = v_1 \quad (3) \quad \text{tg } v_1 = \text{tg } v_2 \quad (4)$$

$$M_2 = M_1 \quad (5) \quad P + Q_1 - Q_2 = 0 \quad (6)$$

$$\text{en } M \quad \text{tg horizont.} \quad (7) \quad Q_1 = 0 \quad (8)$$

Nous trouvons ainsi, conformément aux équations 7 à 11, les conditions aux limites (simplifiées par les facteurs communs).

*Extrémité A* ( $x = a$  ;  $\varphi = k.a = \alpha$  connu) :

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2 v_2}{dx^2} = &+ C.e^{+\alpha} \cos \alpha - H.e^{-\alpha} \cos \alpha - E.e^{+\alpha} \sin \alpha + \\ &+ F.e^{-\alpha} \sin \alpha = 0. \end{aligned} \right\} (1)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^3 v_2}{dx^3} = &e^{+\alpha} \cos \alpha (-E + G) + e^{-\alpha} \cos \alpha (+F + H) + \\ &+ e^{+\alpha} \sin \alpha (-E - G) + e^{-\alpha} \sin \alpha (-F + H) = 0 \end{aligned} \right\} (2)$$

*Section B* (sous charge) ( $x = b$  ;  $\varphi = kb = \beta$ ) :

$$v_1 = v_2 \quad \text{c'est-à-dire} \quad (3)$$

$$\begin{aligned} &e^{+\beta} \cos \beta (+A - E) + e^{-\beta} \cos \beta (+B - F) + \\ &+ e^{+\beta} \sin \beta (+C - G) + e^{-\beta} \sin \beta (+D - H) = 0. \end{aligned}$$

$$\frac{dv_1}{dx} = \frac{dv_2}{dx} \quad \text{soit} \quad (4)$$

$$\begin{aligned} &e^{+\beta} \cos \beta (+A + C - E - G) + e^{-\beta} \cos \beta (-B + D + F - H) + \\ &+ e^{+\beta} \sin \beta (-A + C + E - G) + \\ &+ e^{-\beta} \sin \beta (-B - D + F + H) = 0. \end{aligned}$$

$$\frac{d^2 v_1}{dx^2} = \frac{d^2 v_2}{dx^2} \quad \text{c'est-à-dire} \quad (5)$$

$$\begin{aligned} &e^{+\beta} \cos \beta (+C - G) + e^{-\beta} \cos \beta (-D + H) + \\ &+ e^{+\beta} \sin \beta (-A + E) + e^{-\beta} \sin \beta (+B - F) = 0. \end{aligned}$$

$$\text{Equilibre général} \quad P - d \cdot \int_0^b s \cdot dx - d \cdot \int_b^a s \cdot dx = 0 \quad (6)$$

c'est-à-dire la condition

$$+ P - d \cdot (B) \left[ \int_0^b v_1 dx + \int_b^a v_2 dx \right] = 0$$

que l'équation générale (3) transforme en

$$+ P + (EJ) \left[ \int_0^b \frac{d^4 v_1}{dx^4} dx + \int_b^a \frac{d^4 v_2}{dx^4} dx \right] = 0$$

ou bien

$$+ P + (EJ) \left\{ \left[ \frac{d^3 v_1}{dx^3} \right]_0^b + \left[ \frac{d^3 v_2}{dx^3} \right]_b^a \right\} = 0 ;$$

$$+ P + (EJ) \left\{ \left[ \frac{d^3 v_1}{dx^3} \right]_{x=b} - \left[ \frac{d^3 v_1}{dx^3} \right]_{x=0} + \left[ \frac{d^3 v_2}{dx^3} \right]_{x=a} - \left[ \frac{d^3 v_2}{dx^3} \right]_{x=b} \right\} = 0.$$

Des quatre efforts tranchants de la grande accolade, ceux du milieu ( $x = 0$ ) et de l'extrémité ( $x = a$ ) s'annulent ; il reste ainsi

$$+ P + (EJ) \left[ \frac{d^3 v_1}{dx^3} \right]_{x=b} - (EJ) \left[ \frac{d^3 v_2}{dx^3} \right]_{x=b} = 0$$

c'est-à-dire  $P - Q_1 + Q_2 = 0$

expression de l'équilibre de la section B où l'effort tranchant du côté A est négatif, puisqu'on le compte en sens des  $x$  décroissants. Le développement de ces dérivées troisièmes conduit à

$$+ \frac{P}{(EJ)} + 2k^3 [ + e^{+\beta} \cos \beta (-A + C) + e^{-\beta} \cos \beta (+B + D) +$$

$$+ e^{+\beta} \sin \beta (-A - C) + e^{-\beta} \sin \beta (-B + D) ] -$$

$$- 2k^3 [ + e^{+\beta} \cos \beta (-E + G) + e^{-\beta} \cos \beta (+F + H) +$$

$$+ e^{+\beta} \sin \beta (-E - G) + e^{-\beta} \sin \beta (-F + H) ] = 0.$$

$$\frac{2kP}{(B)d} + e^{+\beta} \cos \beta (-A + C + E - G) +$$

$$+ e^{-\beta} \cos \beta (+B + D - F - H) +$$

$$+ e^{+\beta} \sin \beta (-A - C + E + G) +$$

$$+ e^{-\beta} \sin \beta (-B + D + F - H) = 0.$$

Section M médiane ( $x = 0$  ;  $\varphi = k \cdot x = 0$ ) ;

$\sin \varphi = 0$  ;  $\cos \varphi = 1$  ;  $e^{+\varphi} = e^{-\varphi} = 1$ .

$$\frac{dv_1}{dx} = 0 \quad \text{c'est-à-dire} \quad + A + C - B + D = 0 \quad (7)$$

$$\frac{d^3 v_1}{dx^3} = 0 \quad \text{c'est-à-dire} \quad - A + C + B + D = 0 \quad (8)$$

Les équations (7) et (8) donnent les solutions

$$+ A = + B \quad + C = - D$$

qui permettent d'écrire, en mettant en évidence les inconnues  $A$  à  $H$ ,

$$\left. \begin{aligned} - e^{+\alpha} \sin \alpha \cdot E + e^{-\alpha} \sin \alpha \cdot F + e^{+\alpha} \cos \alpha \cdot G - \\ - e^{-\alpha} \cos \alpha \cdot H = 0 \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

$$\left. \begin{aligned} (- e^{+\alpha} \cos \alpha - e^{+\alpha} \sin \alpha) E + (+ e^{-\alpha} \cos \alpha - \\ - e^{-\alpha} \sin \alpha) F + (+ e^{+\alpha} \cos \alpha - e^{+\alpha} \sin \alpha) G + \\ + (+ e^{-\alpha} \cos \alpha + e^{-\alpha} \sin \alpha) H = 0 \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

$$\left. \begin{aligned} (+ e^{+\beta} \cos \beta + e^{-\beta} \cos \beta) A + (+ e^{+\beta} \sin \beta - e^{-\beta} \sin \beta) C - \\ - e^{+\beta} \cos \beta \cdot E - e^{-\beta} \cos \beta \cdot F - e^{+\beta} \sin \beta \cdot G - e^{-\beta} \sin \beta \cdot H = 0 \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

$$\left. \begin{aligned} + (+ e^{+\beta} \cos \beta - e^{-\beta} \cos \beta - e^{+\beta} \sin \beta - e^{-\beta} \sin \beta) A + \\ + (+ e^{+\beta} \cos \beta - e^{-\beta} \cos \beta + e^{+\beta} \sin \beta + e^{-\beta} \sin \beta) C + \\ + (- e^{+\beta} \cos \beta + e^{+\beta} \sin \beta) E + (+ e^{-\beta} \cos \beta + \\ + e^{-\beta} \sin \beta) F + (- e^{+\beta} \cos \beta - e^{+\beta} \sin \beta) G + \\ + (- e^{-\beta} \cos \beta + e^{-\beta} \sin \beta) H = 0 \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

$$\left. \begin{aligned} (- e^{+\beta} \sin \beta + e^{-\beta} \sin \beta) A + (+ e^{+\beta} \cos \beta + e^{-\beta} \cos \beta) C + \\ + e^{+\beta} \sin \beta \cdot E - e^{-\beta} \sin \beta \cdot F - e^{+\beta} \cos \beta \cdot G + e^{-\beta} \cos \beta \cdot H = 0 \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

$$\left. \begin{aligned} (- e^{+\beta} \cos \beta + e^{-\beta} \cos \beta - e^{+\beta} \sin \beta - e^{-\beta} \sin \beta) A + \\ + (+ e^{+\beta} \cos \beta - e^{-\beta} \cos \beta - e^{+\beta} \sin \beta - e^{-\beta} \sin \beta) C + \\ + (+ e^{+\beta} \cos \beta + e^{-\beta} \sin \beta) E + (- e^{-\beta} \cos \beta + \\ + e^{+\beta} \sin \beta) F + (- e^{+\beta} \cos \beta + e^{+\beta} \sin \beta) G + \\ + (- e^{-\beta} \cos \beta - e^{-\beta} \sin \beta) H + \frac{2kP}{(B)d} = 0 \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

Les racines de ces équations, encore littérales, résolvent le problème.

*Exemple numérique.* — Deux colonnes distantes de 450 cm chargent chacune de  $P = 90$  t une poutre, dont voici les dimensions :

longueur  $l = 2a = 650$  cm ; largeur  $d = 75$  cm ;  
épaisseur  $e = 50$  cm ; moment d'inertie  $J = 780\,000$  cm<sup>4</sup>  
module d'élasticité  $E = 293\,100$  kg/cm<sup>2</sup> ;  
raideur  $(EJ) = 2286 \cdot 10^8$  kg.cm<sup>2</sup>.

Le sol de fondation répond par un indice de compressibilité  $(B) = 5$  kg/cm<sup>3</sup> qui conduit à la caractéristique

$$k = \sqrt[4]{\frac{5 \text{ kg/cm}^3 \times 75 \text{ cm}}{4 \times 2286 \cdot 10^8 \text{ kg.cm}^2}} = 4,50 \cdot 10^{-3} \text{ cm}^{-1} = 0,0045 \text{ cm}^{-1}.$$

Les deux nombres  $\varphi$  donnent aux produits des fonctions trigonométriques et exponentielles les grandeurs suivantes :

$$x = a = 325 \text{ cm} \quad \alpha = 1,4625 = 83^\circ 48'$$

$$e^{+\alpha} \cos \alpha = + 0,46621 \quad e^{+\alpha} \sin \alpha = + 4,29125$$

$$e^{-\alpha} \cos \alpha = + 0,02501 \quad e^{-\alpha} \sin \alpha = + 0,23025$$

$$x = b = 225 \text{ cm} \quad \beta = 1,0125 = 58^\circ 10'$$

$$e^{+\beta} \cos \beta = + 1,45181 \quad e^{+\beta} \sin \beta = + 2,33850$$

$$e^{-\beta} \cos \beta = + 0,19162 \quad e^{-\beta} \sin \beta = + 0,30866$$

Le terme de charge  $\frac{2k}{d \cdot (B)} P = 2,16$  intervient dans la sixième condition.

Les six équations d'élasticité se chiffrent dès lors facilement et leurs racines sont :

$$A = + 0,26337 \quad C = + 0,20601 \quad E = - 0,00677$$

$$F = - 0,21546 \quad G = + 0,14281 \quad H = + 1,84074$$

auxquelles on ajoute les deux solutions antérieures

$$B = A + 0,26337 \quad + D = - C = - 0,20601$$

Cet ensemble conduit aux équations des élastiques des deux secteurs et à leurs dérivées ; au secteur intérieur d'abord :

$$\begin{aligned}
v_1 &= +0,26337 e^{+\varphi} \cos \varphi + 0,26337 e^{-\varphi} \cos \varphi + \\
&\quad + 0,20601 e^{+\varphi} \sin \varphi - 0,20601 e^{-\varphi} \sin \varphi \\
\frac{dv_1}{dx} &= 0,0045 (+0,46938 e^{+\varphi} \cos \varphi - 0,46938 e^{-\varphi} \cos \varphi - \\
&\quad - 0,05736 e^{+\varphi} \sin \varphi - 0,05736 e^{-\varphi} \sin \varphi) \\
\frac{d^2v_1}{dx^2} &= 2 \cdot 0,0045^2 (+0,20601 e^{+\varphi} \cos \varphi + 0,20601 e^{-\varphi} \cos \varphi - \\
&\quad - 0,26337 e^{+\varphi} \sin \varphi + 0,26337 e^{-\varphi} \sin \varphi) \\
\frac{d^3v_1}{dx^3} &= 2 \cdot 0,0045^3 (-0,05736 e^{+\varphi} \cos \varphi + 0,05736 e^{-\varphi} \cos \varphi - \\
&\quad - 0,46938 e^{+\varphi} \sin \varphi - 0,46938 e^{-\varphi} \sin \varphi)
\end{aligned}$$

puis au secteur extérieur :

$$\begin{aligned}
v_2 &= -0,00677 e^{+\varphi} \cos \varphi - 0,21546 e^{-\varphi} \cos \varphi + \\
&\quad + 0,14281 e^{+\varphi} \sin \varphi + 1,84074 e^{-\varphi} \sin \varphi \\
\frac{dv_2}{dx} &= 0,0045 (+0,13604 e^{+\varphi} \cos \varphi + 2,05622 e^{-\varphi} \cos \varphi + \\
&\quad + 0,14958 e^{+\varphi} \sin \varphi - 1,62528 e^{-\varphi} \sin \varphi) \\
\frac{d^2v_2}{dx^2} &= 2 \cdot 0,0045^2 (+0,14281 e^{+\varphi} \cos \varphi - 1,84074 e^{-\varphi} \cos \varphi + \\
&\quad + 0,00677 e^{+\varphi} \sin \varphi - 0,21546 e^{-\varphi} \sin \varphi) \\
\frac{d^3v_2}{dx^3} &= 2 \cdot 0,0045^3 (+0,14958 e^{+\varphi} \cos \varphi + 1,62528 e^{-\varphi} \cos \varphi - \\
&\quad - 0,13604 e^{+\varphi} \sin \varphi + 2,05622 e^{-\varphi} \sin \varphi).
\end{aligned}$$

Ces expressions satisfont aux conditions d'extrémités et de contiguïté des deux secteurs ; on trouve en effet :

$$\text{Extrémité } A \quad (\varphi = \alpha) \quad M = 0 \quad Q = 0$$

ce qui donne :

$$\frac{d^2v_2}{dx^2} = 2k^2 (+0,09563 - 0,09565) \cong 0 ;$$

$$\frac{d^3v_2}{dx^3} = 2k^3 (+0,58383 - 0,58378) \cong 0.$$

Pied de la charge ( $\varphi = \beta$ )

$$v_1 = v_2 \quad \text{tg } v_1 = \text{tg } v_2 \quad M_1 = M_2 \quad Q_1 - Q_2 - P = 0$$

c'est-à-dire :

$$v_1 = v_2 \cong +0,85100 \text{ cm} ;$$

$$\frac{dv_1}{dx} = \frac{dv_2}{dx} \text{ c. a. d. après division par } k : +0,43967 \sim +0,43964 ;$$

$$\frac{d^2v_1}{dx^2} = \frac{d^2v_2}{dx^2} \text{ c. a. d. pour } k^2 = 20,25 \cdot 10^{-6} : \\ -7,93922 \cdot 10^{-6} \sim -7,94044 \cdot 10^{-6} ;$$

$$Q_1 - Q_2 - P = 0 \quad \text{donc} \quad -(EJ) \left( \frac{d^3v_1}{dx^3} - \frac{d^3v_2}{dx^3} \right) - P = 0$$

c'est-à-dire pour  $2k^3 = 182,25 \cdot 10^{-9}$ , et

$$Q_1 = +54\,778 \text{ kg} \quad Q_2 = -35\,211 \text{ kg} \\ \text{donne l'équilibre} \quad +89\,989 - 90\,000 \cong 0.$$

Section médiane ( $\varphi = 0$ ).

$$v_1 = +0,52674 \text{ cm} ;$$

$$\frac{dv_1}{dx} = k (+0,46938 - 0,46938) = 0 ;$$

$$\frac{d^2v_1}{dx^2} = +16,68681 \cdot 10^{-6} ;$$

$$\frac{d^3v_1}{dx^3} = 2k^3 (-0,05736 + 0,05736) = 0.$$

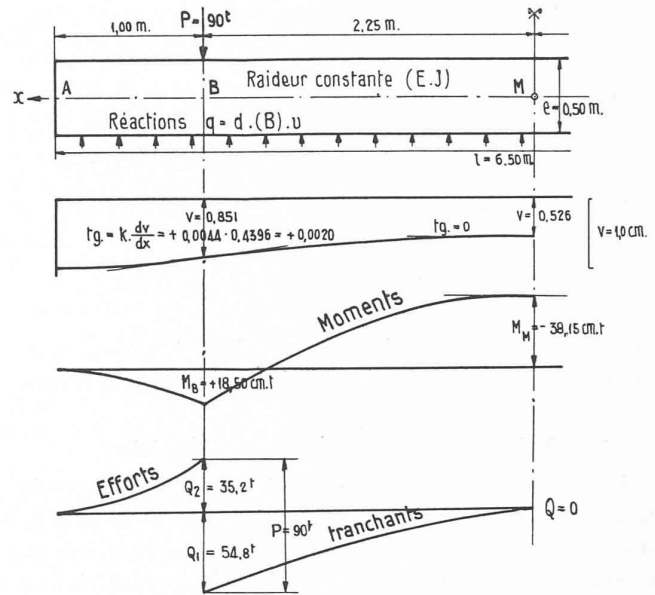


Fig. 2. — Charges symétriques d'une poutre de longueur limitée.

La poutre en béton armé, qui établit ainsi l'équilibre général en satisfaisant à toutes les conditions d'extrémités, subit les moments fléchissants caractéristiques suivants :

$$\text{sous la charge : contrainte du sol } (B)\rho = 5 \text{ k/cm}^3 \cdot 0,851 \text{ cm} = 4,25 \text{ k/cm}^2 ;$$

$$M_B = -(EJ) \frac{d^2v}{dx^2} = +1\,815\,000 \text{ kg.cm} = +18,150 \text{ mt}$$

au milieu de la portée :

$$M_M = -2286 \cdot 10^8 \times 16,68681 \cdot 10^{-6} = -38,146 \text{ mt}.$$

Si l'on supposait la poutre rigide, sollicitant le sol d'une manière uniforme par  $p = 90 \text{ t} : 3,25 \text{ m} = 27,7 \text{ t/m}$ , donc  $3,7 \text{ kg/cm}^2$ , on trouverait sous la charge un moment

$$M_B = +27,7 \text{ t/m} \cdot \frac{1,0^2}{2} = +13,85 \text{ mt}$$

et au milieu de la poutre

$$M_M = 90 \text{ t} \left( \frac{3,25}{2} - 2,25 \right) \text{ m} = -56,3 \text{ mt}$$

une sollicitation sensiblement plus défavorable du profil de béton armé.

b) Les deux colonnes se confondent.

Si maintenant les deux colonnes se confondent en une seule, faisant  $2P = 180 \text{ t}$ , l'annulation de l'espacement,  $2b = 0$ , conduit à

$$e^{+\beta} = e^{-\beta} = \cos \beta = 1 \quad \sin \beta = 0$$

ce qui donne aux équations la forme simplifiée

$$\left. \begin{aligned} -e^{+\alpha} \sin \alpha \cdot E + e^{-\alpha} \sin \alpha \cdot F + e^{+\alpha} \cos \alpha \cdot G - \\ -e^{-\alpha} \cos \alpha \cdot H = 0. \end{aligned} \right\} (1)$$

$$\left. \begin{aligned} (-e^{+\alpha} \cos \alpha - e^{+\alpha} \sin \alpha) E + (+e^{-\alpha} \cos \alpha - \\ -e^{-\alpha} \sin \alpha) F + (+e^{+\alpha} \cos \alpha - e^{+\alpha} \sin \alpha) G + \\ + (+e^{-\alpha} \cos \alpha + e^{-\alpha} \sin \alpha) H = 0. \end{aligned} \right\} (2)$$

$$+2A - E - F = 0. \quad (3)$$



$$-E + F - G - H = 0. \quad (4)$$

$$+ 2C - G + H = 0. \quad (5)$$

$$+ E - F - G - H + \frac{2kP}{(B)d} = 0. \quad (6)$$

On évalue  $E, F, G, H$  en fonction de  $A$  et  $C$  :

$$E = +A - \frac{1}{2} \frac{kP}{(B)d} \quad F = +A + \frac{1}{2} \frac{kP}{(B)d}$$

$$G = +C + \frac{1}{2} \frac{kP}{(B)d} \quad H = -C + \frac{1}{2} \frac{kP}{(B)d}$$

expressions qu'on introduit dans les deux équations en  $a$ , ce qui donne la solution finale du problème numérique.

## 2. Poutre-radier de longueur illimitée.

Dans le cas le plus simple, où l'on suppose que la proximité des charges exclut entre elles la possibilité d'un soulèvement du sommier, la courbe élastique en contact permanent avec le sol s'exprime, pour chaque charge prise isolément, par les seules puissances négatives du nombre  $e$ , car l'amortissement commence au pied de la charge considérée et se continue indéfiniment<sup>1</sup>.

Si par contre la charge reste isolée, les demi-ondes bombées dépassent le niveau du sol et, interrompant le contact, rendent fragmentaire le diagramme des réactions ; la pénétration de l'élastique dans le sol se bornant à une cuvette de longueur finie, mais inconnue au préalable, le nombre des conditions aux limites du diagramme demande le retour des termes à exposants positifs. On fait alors abstraction de la possibilité d'ondes d'enfoncement subséquentes.

### a) Charge localisée.

Une charge localisée de longueur donnée conditionnera une région du groupe II (équat. 13 à 17), qui se continuera par deux régions I (équations homogènes 7 à 11) jusqu'à une émergence  $A$ , dont l'abscisse  $\alpha = k \cdot a$  constitue une nouvelle inconnue. Seule la partie de la courbe théorique comprise entre ces deux limites  $A$  compte comme réaction du sol et participe à l'équilibre de la charge localisée (fig. 3).

Supposons que la force  $P$ , localisée sur une longueur  $2b$ , la charge d'une manière uniforme. La solution du problème doit alors satisfaire aux conditions suivantes :

Extrémité  $A$  de la cuvette :  $v_1 = 0$  ;  $M_1 = 0$  ;  $Q_1 = 0$ .

Bord  $B$  de la charge :  $v_2 = v_1$  ;  $\text{tg } v_2 = \text{tg } v_1$  ;  $M_2 = M_1$ .

$$\text{Equilibre général : } \frac{P}{2} - \int_0^a q \cdot dx = 0.$$

Milieu  $M$  :  $\text{tg } v_2 = 0$  ;  $Q_2 = 0$ ,

ce qui fait neuf conditions pour les neuf inconnues : deux fois quatre constantes d'intégration et l'amplitude  $2a$  de la cuvette.

Nous disposons ainsi des neuf équations suivantes, où les constantes sont analogues aux précédentes mais dont seule la première a une forme nouvelle :

Extrémité  $A$  ( $x = a$  ;  $\varphi = \alpha = ka$ ).

$$v_1 = 0 \quad + A \cdot e^{+\alpha} \cos \alpha + B \cdot e^{-\alpha} \cos \alpha + C \cdot e^{+\alpha} \sin \alpha + D \cdot e^{-\alpha} \sin \alpha = 0. \quad (1)$$

$$\frac{d^2 v_1}{dx^2} = 0 \quad + C \cdot e^{+\alpha} \cos \alpha - D \cdot e^{-\alpha} \cos \alpha - A \cdot e^{+\alpha} \sin \alpha + B \cdot e^{-\alpha} \sin \alpha = 0. \quad (2)$$

$$\frac{d^3 v_1}{dx^3} = 0 \quad e^{+\alpha} \cos \alpha (-A + C) + e^{-\alpha} \cos \alpha (+B + D) + e^{+\alpha} \sin \alpha (-A - C) + e^{-\alpha} \sin \alpha (-B + D) = 0 \quad (3)$$

Jonction  $B$  des régions ( $x = b$  ;  $\varphi = \beta = kb$ ).

$$v_1 = v_2 \quad e^{+\beta} \cos \beta (+A - E) + e^{-\beta} \cos \beta (+B - F) + e^{+\beta} \sin \beta (+C - G) + e^{-\beta} \sin \beta (+D - H) - \frac{P}{4k^4(EJ)} = 0. \quad (4)$$

$$\frac{dv_1}{dx} = \frac{dv_2}{dx} \quad e^{+\beta} \cos \beta (+A + C - E - G) + e^{-\beta} \cos \beta (-B + D + F + H) + e^{+\beta} \sin \beta (-A + C + E - G) + e^{-\beta} \sin \beta (-B - D + F + H) = 0. \quad (5)$$

$$\frac{d^2 v_1}{dx^2} = \frac{d^2 v_2}{dx^2} \quad e^{+\beta} \cos \beta (+C - G) + e^{-\beta} \cos \beta (-D + H) + e^{+\beta} \sin \beta (-A + E) + e^{-\beta} \sin \beta (+B - F) = 0. \quad (6)$$

$$\text{Equilibre général : } \int_0^a q \cdot dx - \frac{P}{2} = 0,$$

équation que  $q = (B)d \cdot v$  transforme en

$$(B) \cdot d \left[ \int_0^b v_2 dx + \int_b^a v_1 dx \right] - \frac{P}{2} = 0.$$

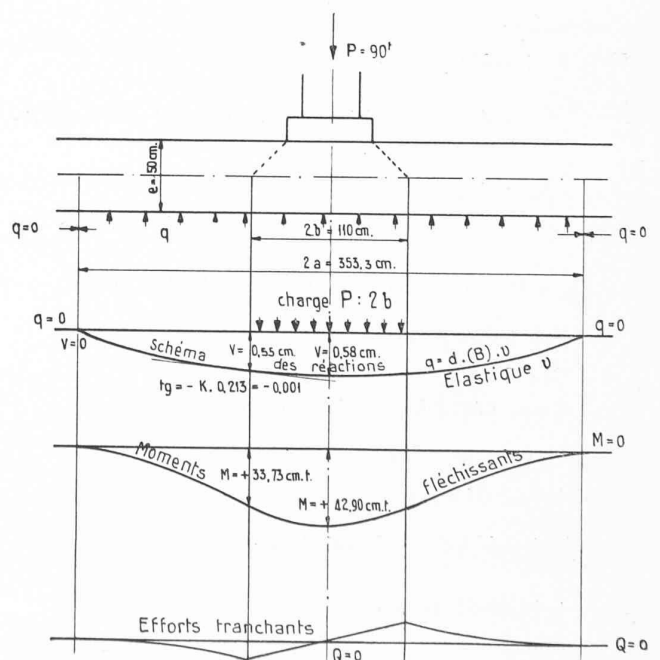


Fig. 3. — Poutre de longueur illimitée.

<sup>1</sup> Voir notre *Cours de béton armé*, volume I, Ed. Rouge & Cie, Lausanne.

Les deux intégrales définies se résolvent par remplacement des pénétrations  $v_1$  et  $v_2$  en fonction des relations 6 et 12 et du rapport (équation 2)  $\frac{1}{4k^4} = \frac{(EJ)}{(B)d}$

$$v_1 = -\frac{(EJ)}{(B)d} \frac{d^4 v_1}{dx^4}$$

$$v_2 = \frac{1}{(B)d} \left[ +p - (EJ) \frac{d^4 v_2}{dx^4} \right]$$

ce qui donne sous la charge

$$(B)d \cdot \int_0^b v_2 dx = \int_0^b p dx - (EJ) \int_0^b \frac{d^4 v_2}{dx^4} dx =$$

$$= +\frac{P}{2} - (EJ) \left[ \frac{d^3 v_2}{dx^3} \right]_{x=b} + (EJ) \left[ \frac{d^3 v_2}{dx^3} \right]_{x=0}$$

et en région extérieure à la charge

$$(B)d \cdot \int_b^a v_1 dx = - (EJ) \left[ \frac{d^3 v_1}{dx^3} \right]_{x=a} + (EJ) \left[ \frac{d^3 v_1}{dx^3} \right]_{x=b}$$

L'effort tranchant s'annulant aux limites  $x=0$  et  $x=a$ , deux parenthèses s'effacent, et l'on écrit l'équation d'équilibre (7) :

$$\left\{ +\frac{P}{2} - (EJ) \left[ \frac{d^3 v_2}{dx^3} \right]_{x=b} \right\} + \left\{ (EJ) \left[ \frac{d^3 v_1}{dx^3} \right]_{x=b} \right\} - \frac{P}{2} = 0,$$

condition qui se réduit à la simple égalité des efforts tranchants en  $B$  :

$$- \left[ \frac{d^3 v_2}{dx^3} \right]_{x=b} + \left[ \frac{d^3 v_1}{dx^3} \right]_{x=b} = 0.$$

Section médiane ( $x=0$  ;  $\varphi=0$ ).

$$\frac{dv_2}{dx} = 0 \quad 1. (+E + G) + 1. (-F + H) = 0 \quad (8)$$

$$\frac{d^3 v_2}{dx^3} = 0 \quad 1. (-E + G) + 1. (+F + H) = 0 \quad (9)$$

Les deux dernières équations donnent immédiatement deux solutions

$$+E = +F \quad +G = -H$$

que nous introduisons dans les sept autres ; nous obtenons ainsi quatre équations algébriques où paraissent les constantes d'intégration comme seules inconnues ; ce sont :

$$\left\{ \begin{aligned} &+ A \cdot e^{+\beta} \cos \beta + B \cdot e^{-\beta} \cos \beta + C \cdot e^{+\beta} \sin \beta + \\ &+ D \cdot e^{-\beta} \sin \beta + E (-e^{+\beta} \cos \beta - e^{-\beta} \cos \beta) + \\ &+ G (-e^{+\beta} \sin \beta + e^{-\beta} \sin \beta) - \frac{P}{4k^4(EJ)} = 0. \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

$$\left\{ \begin{aligned} &+ A (+e^{+\beta} \cos \beta - e^{+\beta} \sin \beta) + B (-e^{+\beta} \cos \beta - \\ &- e^{-\beta} \sin \beta) + C (+e^{+\beta} \cos \beta + e^{+\beta} \sin \beta) + \\ &+ D (+e^{-\beta} \cos \beta - e^{-\beta} \sin \beta) + E (-e^{+\beta} \cos \beta + \\ &+ e^{-\beta} \cos \beta + e^{+\beta} \sin \beta + e^{-\beta} \sin \beta) + \\ &+ G (-e^{+\beta} \cos \beta + e^{-\beta} \cos \beta - e^{+\beta} \sin \beta - e^{-\beta} \sin \beta) = 0 \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

$$\left\{ \begin{aligned} &- A \cdot e^{+\beta} \sin \beta + B \cdot e^{-\beta} \sin \beta + C \cdot e^{+\beta} \cos \beta - \\ &- D \cdot e^{-\beta} \cos \beta + E (+e^{+\beta} \sin \beta - e^{-\beta} \sin \beta) + \\ &+ G (-e^{+\beta} \cos \beta - e^{-\beta} \cos \beta) = 0. \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

$$\left\{ \begin{aligned} &A (-e^{+\beta} \cos \beta - e^{+\beta} \sin \beta) + B (+e^{-\beta} \cos \beta - \\ &- e^{-\beta} \sin \beta) + C (+e^{+\beta} \cos \beta - e^{+\beta} \sin \beta) + \\ &+ D (+e^{-\beta} \cos \beta + e^{-\beta} \sin \beta) + E (+e^{+\beta} \cos \beta - \\ &- e^{-\beta} \cos \beta + e^{+\beta} \sin \beta + e^{-\beta} \sin \beta) + G (-e^{+\beta} \cos \beta + \\ &+ e^{-\beta} \cos \beta + e^{+\beta} \sin \beta + e^{-\beta} \sin \beta) = 0. \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

On a ensuite trois équations transcendantes à cinq inconnues  $A$  à  $D$  et  $\alpha$ , et que nous classons suivant les constantes :

$$\left\{ \begin{aligned} &+ A \cdot e^{+\alpha} \cos \alpha + B \cdot e^{-\alpha} \cos \alpha + C \cdot e^{+\alpha} \sin \alpha + \\ &+ D \cdot e^{-\alpha} \sin \alpha = 0. \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

$$\left\{ \begin{aligned} &- A \cdot e^{+\alpha} \sin \alpha + B \cdot e^{-\alpha} \sin \alpha + C \cdot e^{+\alpha} \cos \alpha - \\ &- D \cdot e^{-\alpha} \cos \alpha = 0. \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

$$\left\{ \begin{aligned} &+ A (-e^{+\alpha} \cos \alpha - e^{+\alpha} \sin \alpha) + B (+e^{-\alpha} \cos \alpha - \\ &- e^{-\alpha} \sin \alpha) + C (+e^{+\alpha} \cos \alpha - e^{+\alpha} \sin \alpha) + \\ &+ D (+e^{-\alpha} \cos \alpha + e^{-\alpha} \sin \alpha) = 0. \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

Nous simplifions l'écriture des quatre équations algébriques en symbolisant les grandeurs connues :

$$[N] = \frac{P}{4k^4(EJ)} = \frac{P}{2b(B)d}$$

$$\begin{aligned} r &= e^{+\beta} \cos \beta & s &= e^{-\beta} \cos \beta \\ t &= e^{+\beta} \sin \beta & u &= e^{-\beta} \sin \beta \end{aligned}$$

ce qui conduit à

$$\left\{ \begin{aligned} &+ r \cdot A + s \cdot B + t \cdot C + u \cdot D + E (-r - s) + \\ &+ G (-t + u) - [N] = 0. \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

$$\left\{ \begin{aligned} &A (+r - t) + B (-s - u) + C (+r + t) + \\ &+ D (+s - u) + E (-r + s + t - u) + \\ &+ G (-r + s - t - u) = 0. \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

$$\left\{ \begin{aligned} &- t \cdot A + u \cdot B + r \cdot C - s \cdot D + E (+t - u) + \\ &+ G (-r - s) = 0. \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

$$\left\{ \begin{aligned} &A (-r - t) + B (+s - u) + C (+r - t) + \\ &+ D (+s + u) + E (+r - s + t + u) + \\ &+ G (-r + s + t + u) = 0. \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

Les quatre constantes ainsi obtenues en fonction des deux restantes ramènent les trois équations transcendantes à trois inconnues.

La résolution littérale des équations algébriques (4) à (7) conduit à des calculs disproportionnés avec leur utilité pratique. Cette résolution aurait un seul intérêt, celui de montrer que la longueur  $2a$  de la cuvette est indépendante de la grandeur de la charge, dans la supposition d'élasticité linéaire mise à la base des développements théoriques. Cette indépendance paraît du reste évidente.

L'exemple numérique, qui suit, le montre. L'équation (4) étant seule à contenir le terme de charge, tous les facteurs numériques des solutions ultérieures résultent proportionnels à ce seul terme de charge ; c'est



donc le cas également des constantes d'intégration, que donne la résolution.

Par contre, l'équation homogène issue de l'équation (3) donnera une grandeur  $\alpha$  indépendante de ce terme de charge, puisque la proportionnalité des facteurs numériques en affecte également chaque terme.

*Exemple numérique.* — Nous reprenons les données de l'exemple précédent en les appliquant à une poutre sans poids notable, de longueur illimitée et de profil

$$d = 75 \text{ cm} \quad e = 50 \text{ cm}$$

supportant la charge unique

$$P = 90\,000 \text{ k.}$$

Sa raideur

$$(EJ) = 2286 \cdot 10^8 \text{ kg.cm}^2$$

conduit avec

$$(B) = 5 \text{ kg/cm}^3$$

à la caractéristique

$$k = 0,0045 \text{ cm}^{-1}.$$

On admet, selon Ordonnance, une répartition de la charge de la colonne de 60 cm de base sur

$$2b = 60 + 50 = 110 \text{ cm.}$$

La section limite entre les régions I, hors charge, et II sous la charge, se place à

$$\beta = kb = 0,0045 \text{ cm}^{-1} \cdot 55 \text{ cm} = 0,2475 = 14^\circ 11'$$

à quoi correspondent

$$\text{Sh } \beta = 0,2500 \quad \text{Ch } \beta = 1,0308 \quad e^{+\beta} = 1,2808 \quad e^{-\beta} = 0,7808$$

Les symboles introduits ci-dessus se chiffrent par :

$$[N] = \frac{90\,000 \text{ kg}}{110 \text{ cm} \times 5 \text{ k/cm}^3 \times 75 \text{ cm}} = 2,18181 \text{ cm} ;$$

$$\begin{aligned} r = e^{+\beta} \cos \beta &= +1,24176 & t = e^{+\beta} \sin \beta &= +0,31382 \\ s = e^{-\beta} \cos \beta &= +0,75700 & u = e^{-\beta} \sin \beta &= +0,19131 \end{aligned}$$

D'où résultent les quatre équations algébriques (4), (5), (6) et (7), dont on tire les solutions provisoires :

$$\begin{aligned} A &= +B - 0,52881 & C &= -D + 0,55102 \\ E &= +B - 1,35460 & G &= -D + 0,34233 \end{aligned}$$

L'élimination de ces constantes donne aux trois équations transcendentes la forme

$$B(+e^{+\alpha} \cos \alpha + e^{-\alpha} \cos \alpha) + D(-e^{+\alpha} \sin \alpha + e^{-\alpha} \sin \alpha) - \left\{ \begin{aligned} &0,52881 e^{+\alpha} \cos \alpha + 0,55102 e^{+\alpha} \sin \alpha = 0. \end{aligned} \right. \quad (1)$$

$$B(-e^{+\alpha} \sin \alpha + e^{-\alpha} \sin \alpha) + D(-e^{+\alpha} \cos \alpha - e^{-\alpha} \cos \alpha) + \left\{ \begin{aligned} &0,55102 e^{+\alpha} \cos \alpha + 0,52881 e^{+\alpha} \sin \alpha = 0. \end{aligned} \right. \quad (2)$$

$$B(-e^{+\alpha} \cos \alpha + e^{-\alpha} \cos \alpha - e^{+\alpha} \sin \alpha - e^{-\alpha} \sin \alpha) + D(-e^{+\alpha} \cos \alpha + e^{-\alpha} \cos \alpha + e^{+\alpha} \sin \alpha + e^{-\alpha} \sin \alpha) + \left\{ \begin{aligned} &1,07983 e^{+\alpha} \cos \alpha - 0,02221 e^{+\alpha} \sin \alpha = 0. \end{aligned} \right. \quad (3)$$

Les équations (1) et (2) donnent

$$B = \frac{+0,52881 e^{+2\alpha} - 0,55102 \sin 2\alpha + 0,52881 \cos 2\alpha}{+e^{+2\alpha} + e^{-2\alpha} + 2 \cos 2\alpha}$$

$$D = \frac{+0,55102 e^{+2\alpha} + 0,52881 \sin 2\alpha + 0,55102 \cos 2\alpha}{+e^{+2\alpha} + e^{-2\alpha} + 2 \cos 2\alpha}$$

réduisant la (3) à la forme simple

$$\begin{aligned} &e^{+\alpha} (+1,07983 \cos \alpha + 0,02221 \sin \alpha) + \\ &+ e^{-\alpha} (+1,07983 \cos \alpha - 0,02221 \sin \alpha) = 0 \end{aligned}$$

dont la solution

$$\alpha = 91^\circ 05' = 1,5897$$

correspond à une amplitude de la cuvette de

$$2a = 2 \frac{\alpha}{k} = 2 \frac{1,5897}{0,0045 \text{ cm}^{-1}} = 353,3 \text{ cm.}$$

On trouve conséquemment par les fonctions de l'angle

$$B = +0,55270$$

$$D = +0,57402$$

et par rétrogression

$$A = +0,02389$$

$$C = -0,02300$$

$$E = -0,80190$$

$$G = -0,23169$$

$$F = -0,80190$$

$$H = +0,23169$$

Les deux fractions de la ligne élastique se figurent dès lors comme voici :

*Région I* (sans charge, entre  $x = b$  et  $x = a$ ) :

$$\begin{aligned} v_1 &= +0,02389 e^{+\varphi} \cos \varphi + 0,055270 e^{-\varphi} \cos \varphi - \\ &- 0,02300 e^{+\varphi} \sin \varphi + 0,57402 e^{-\varphi} \sin \varphi \end{aligned}$$

avec les dérivées

$$\begin{aligned} \frac{dv_1}{dx} &= +0,0045 (+0,00089 e^{+\varphi} \cos \varphi + 0,02132 e^{-\varphi} \cos \varphi - \\ &- 0,04689 e^{+\varphi} \sin \varphi - 1,12674 e^{-\varphi} \sin \varphi) ; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2v_1}{dx^2} &= +2,20,25 \cdot 10^{-6} (-0,02300 e^{+\varphi} \cos \varphi - \\ &- 0,57402 e^{-\varphi} \cos \varphi - 0,02389 e^{+\varphi} \sin \varphi + \\ &+ 0,55270 e^{-\varphi} \sin \varphi) ; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{d^3v_1}{dx^3} &= 2,91,125 \cdot 10^{-9} (-0,04689 e^{+\varphi} \cos \varphi + \\ &+ 1,12674 e^{-\varphi} \cos \varphi - 0,00089 e^{+\varphi} \sin \varphi + \\ &+ 0,02132 e^{-\varphi} \sin \varphi). \end{aligned}$$

*Région II* (sous charge, entre  $x = 0$  et  $x = b$ ) :

$$\begin{aligned} v_2 &= -0,80190 e^{+\varphi} \cos \varphi - 0,80190 e^{-\varphi} \cos \varphi - \\ &- 0,23169 e^{+\varphi} \sin \varphi + 0,23169 e^{-\varphi} \sin \varphi + 2,18181 \end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned} \frac{dv_2}{dx} &= +4,5 \cdot 10^{-3} (-1,03359 e^{+\varphi} \cos \varphi + 1,03359 e^{-\varphi} \cos \varphi + \\ &+ 0,57021 e^{+\varphi} \sin \varphi + 0,57021 e^{-\varphi} \sin \varphi) ; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2v_2}{dx^2} &= 2,20,25 \cdot 10^{-6} (-0,23169 e^{+\varphi} \cos \varphi - \\ &- 0,23169 e^{-\varphi} \cos \varphi + 0,80190 e^{+\varphi} \sin \varphi - \\ &- 0,80190 e^{-\varphi} \sin \varphi) ; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{d^3v_2}{dx^3} &= 2,91,125 \cdot 10^{-9} (+0,57021 e^{+\varphi} \cos \varphi - \\ &- 0,57021 e^{-\varphi} \cos \varphi + 1,03359 e^{+\varphi} \sin \varphi \\ &+ 1,03359 e^{-\varphi} \sin \varphi). \end{aligned}$$

Ces équations satisfont comme suit aux conditions posées.

*Milieu M*  $x = 0$  ;  $\varphi = 0$ .

$$v_2 = +0,57801 \text{ cm} ;$$

$$\text{tg } v_2 = 0 ; \quad Q_2 = 0.$$

*Section B* de jonction I-II ( $x = b$  ;  $\varphi = \beta$ ) :

$$v_1 = v_2) \quad +0,55066 - 0,55081 \cong 0 ;$$

$$\text{tg } v_1 = \text{tg } v_2) \quad -0,21303 + 0,21294 \cong 0 ;$$

$$M_1 = M_2) \quad -0,36485 + 0,36485 = 0 ;$$

$$Q_1 = Q_2) \quad +0,79851 - 0,79851 = 0.$$

Section A (extrémité de la cuvette,  $x=0$ ;  $\varphi = \alpha = 91^{\circ}05'$ )

$$\begin{aligned} e^{+\alpha} \cos \alpha &= -0,09270 & e^{+\alpha} \sin \alpha &= +4,90126 \\ e^{-\alpha} \cos \alpha &= -0,00386 & e^{-\alpha} \sin \alpha &= +0,20417 \end{aligned}$$

ce qui fait

$$\begin{aligned} v_1 &= +0,11720 - 0,11707 \cong 0 ; \\ M_1 &= 0) + 0,11719 - 0,11709 \cong 0 ; \\ Q_1 &= 0) + 0,00870 - 0,00871 \cong 0. \end{aligned}$$

Les constantes d'intégration répondant exactement aux conditions du problème, on constate les sollicitations suivantes le long de la cuvette :

au milieu M ( $x=0$ ) :

$$\begin{aligned} v_2 &= +0,57801 \text{ cm} ; \\ s &= (B)v = 5 \text{ kg/cm}^3 \cdot 0,57801 \text{ cm} = 2,89 \text{ kg/cm}^2 ; \\ M &= -(EJ) \frac{d^2 v_2}{dx^2} = 4\,290\,111 \text{ cm kg} = +42,90 \text{ mt} ; \end{aligned}$$

à la limite B de la charge transmise sur le sol :

$$\begin{aligned} s &= 2,75 \text{ kg/cm}^2 ; \\ M &= +3\,377\,890 \text{ cmkg} = +33,78 \text{ mt}. \end{aligned}$$

#### b) Charge ponctuelle.

On simplifie volontiers le calcul de la poutre en supposant la charge extérieure  $P$  concentrée sur un espace infiniment petit

$$2b \rightarrow \text{zéro}.$$

Cela n'a pas d'importance dans le cas d'une poutre reposant sur des appuis extérieurs fixes ; il pourrait n'en être pas de même ici, puisque l'équilibre du secteur II chargé traduit des efforts unitaires infiniment grands sur ce court espace où

$$\sin \beta \cong \beta = kb \rightarrow 0 ; \quad e^{+\beta} = e^{-\beta} = 1 ; \quad \cos \beta = 1.$$

L'équation différentielle de l'élastique

$$v = +E e^{+\varphi} \cos \varphi + F e^{-\varphi} \cos \varphi + G e^{+\varphi} \sin \varphi + H e^{-\varphi} \sin \varphi + \frac{P}{2b(B)d}$$

satisfait à ces limites aux mêmes conditions, quelle que soit la longueur  $2b$  (équat. 8 et 9 de la section médiane), donc aux égalités

$$+E = +F \quad +G = -H$$

ce qui conduit à l'équation simplifiée

$$v_2 = E(+e^{+\varphi} + e^{-\varphi}) \cos \varphi + G(+e^{+\varphi} - e^{-\varphi}) \sin \varphi + \frac{P}{2b(B)d}$$

avec ses dérivées

$$\frac{dv_2}{dx} = k[(+E + G)(+e^{+\varphi} - e^{-\varphi}) \cos \varphi + (-E + G)(+e^{+\varphi} + e^{-\varphi}) \sin \varphi] ;$$

$$\frac{d^2 v_2}{dx^2} = 2k^2[+G(e^{+\varphi} + e^{-\varphi}) \cos \varphi + E(-e^{+\varphi} + e^{-\varphi}) \sin \varphi] ;$$

$$\frac{d^3 v_2}{dx^3} = 2k^3[(-E + G)(+e^{+\varphi} - e^{-\varphi}) \cos \varphi - (+E + G)(+e^{+\varphi} + e^{-\varphi}) \sin \varphi].$$

La limite  $2b \rightarrow 0$  réduit l'équation de l'élastique à  $2b v_2 = 2b E(+1 + 1) + 2b G(+1 - 1)kb + \frac{P}{(B)d}$  c'est-à-dire à

$$0 = 4b E + \frac{P}{(B)d}$$

ce qui donne à la constante  $E$  une grandeur infinie

$$E = -\frac{P}{4b(B)d} \rightarrow \infty.$$

La constante  $G$  reste, par contre, finie en même temps que le moment fléchissant, inconnu du reste avant calcul

$$\begin{aligned} M_M &= -(EJ) \frac{d^2 v_2}{dx^2} = -(EJ) 2k^2[+G(+1 + 1) - \frac{P}{4b(B)d}(+1 - 1)kb] = -4k^2(EJ) G. \end{aligned}$$

La tangente au bord extérieur du secteur II introduit l'indétermination (voir ci-dessus) :

$$\begin{aligned} &+E(+e^{+\varphi} - e^{-\varphi}) \cos \varphi - E(+1 + 1)kb = \\ &= -\frac{P}{4b(B)d}[(+e^{+\varphi} - e^{-\varphi}) - 2kb] = \\ &= \frac{P}{2(B)d} \left[ \frac{+e^{-\varphi} - e^{+\varphi}}{2b} + k \right] \end{aligned}$$

qu'on résoudra en développant les exponentielles

$$e^{+\varphi} = +1 + \frac{\varphi}{1!} + \frac{\varphi^2}{2!} \dots \quad e^{-\varphi} = +1 - \frac{\varphi}{1!} + \frac{\varphi^2}{2!} \dots$$

ce qui fait

$$e^{-\varphi} - e^{+\varphi} = -2\varphi = -2kb$$

et conduit à

$$\frac{dv_2}{dx} = k \cdot \frac{P}{2(B)d} (-k + k) = 0.$$

Les efforts locaux infiniment grands n'empêchent donc pas le secteur I de partir sur une tangente horizontale. On peut désormais l'étudier indépendamment en tenant compte de l'équilibre général et des conditions aux limites

$$\text{insertion } B=M \quad x=0 ; \quad \frac{dv}{dx} = 0 ;$$

$$\text{extrémité } A \quad x=a ; \quad \frac{d^2 v}{dx^2} = 0, \quad \frac{d^3 v}{dx^3} = 0.$$

L'équation différentielle (7)

$$v = +Ae^{+\varphi} \cos \varphi + Be^{-\varphi} \cos \varphi + Ce^{+\varphi} \sin \varphi + De^{-\varphi} \sin \varphi$$

avec ses dérivées (expressions comme 8 à 11) nous donne les cinq équations nécessaires :

Extrémité A de la cuvette  $x=a$  ;  $\varphi = \alpha = k.a$ .

$$v=0) \quad +Ae^{+\alpha} \cos \alpha + Be^{-\alpha} \cos \alpha + Ce^{+\alpha} \sin \alpha + De^{-\alpha} \sin \alpha = 0. \quad (1)$$

$$\frac{d^2 v}{dx^2} = 0) \quad +Ce^{+\alpha} \cos \alpha - De^{-\alpha} \cos \alpha - Ae^{+\alpha} \sin \alpha + Be^{-\alpha} \sin \alpha = 0. \quad (2)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^3 v}{dx^3} = 0) \quad & e^{+\alpha} \cos \alpha (-A - C) + e^{-\alpha} \cos \alpha (+B + D) + \\ & + e^{+\alpha} \sin \alpha (-A - C) + e^{-\alpha} \sin \alpha (-B + D) = 0 \end{aligned} \right\} (3)$$

Equilibre général :

$$\begin{aligned} + \frac{P}{2} - \int_0^a d.s. dx &= + \frac{P}{2} - d.(B) \int_0^a v. dx = \\ &= + \frac{P}{2} + \int_0^a \frac{1}{4k^4} \frac{d^4 v}{dx^4} dx = + \frac{P}{2} + (EJ) \left[ \frac{d^3 v}{dx^3} \right]_{x=0}^a = \\ &= + \frac{P}{2} - (EJ) \left[ \frac{d^3 v}{dx^3} \right]_{x=0} \end{aligned}$$

puisque l'effort tranchant s'annule à la limite  $x = a$  ; on a ainsi la quatrième condition, où  $x = 0$  fait  $\varphi = 0$ .

$$+ \frac{P}{2} - (EJ) 2k^3 (-A + C + B + D) = 0$$

c'est-à-dire

$$-A + B + C + D = + \frac{Pk}{4(EJ)} \frac{4(EJ)}{(B)d}$$

donc

$$-A + B + C + D = + [0] \quad \text{si } [0] = + \frac{Pk}{(B)d} \quad (4)$$

Nous trouvons enfin dans la section médiane ( $x = 0$ )

$$\text{et } \frac{dv}{dx} = 0) \quad + A + C - B + D = 0. \quad (5)$$

Les deux équations algébriques (4) et (5) donnent deux premières solutions

$$C = + \frac{1}{2} [0] - D \quad A = - \frac{1}{2} [0] + B$$

que nous introduisons dans les trois équations transcendantes. La symbolisation des fonctions de l'inconnue  $\alpha$

$$\begin{aligned} m &= e^{+\alpha} \cos \alpha & o &= e^{+\alpha} \sin \alpha \\ n &= e^{-\alpha} \cos \alpha & p &= e^{-\alpha} \sin \alpha \end{aligned}$$

nous conduit à

$$+ Am + Bn + Co + Dp = 0. \quad (1)$$

$$+ Cm - Dn - Ao + Bp = 0. \quad (2)$$

$$\begin{aligned} (-A + C)m + (+B + D)n + (-A - C)o + \\ + (-B + D)p = 0. \end{aligned} \quad (3)$$

L'élimination de  $A$  et  $C$  donne d'abord

$$B(+m + n) + D(-o + p) + \frac{1}{2} [0] (-m + o) = 0 \quad (1)$$

$$B(-o + p) + D(-m - n) + \frac{1}{2} [0] (+m + o) = 0 \quad (2)$$

équations dont les racines sont, après retour à l'angle  $\alpha$ , et en notant le dénominateur commun

$$\begin{aligned} (d) &= + e^{+2\alpha} + e^{-2\alpha} + 2 \cos 2\alpha \\ B &= \frac{+ e^{+2\alpha} + \cos 2\alpha - \sin 2\alpha}{2(d)} [0] \\ D &= \frac{+ e^{+2\alpha} + \cos 2\alpha + \sin 2\alpha}{2(d)} [0] \end{aligned}$$

et par conséquent

$$A = \frac{- e^{-2\alpha} - \cos 2\alpha - \sin 2\alpha}{2(d)} [0]$$

$$C = \frac{+ e^{-2\alpha} + \cos 2\alpha - \sin 2\alpha}{2(d)} [0].$$

L'équation (3) se transforme en la condition

$$+ 2 \cos \alpha (+ e^{+\alpha} + e^{-\alpha}) = 0$$

dont la solution consiste en

$$\cos \alpha = 0 \quad \alpha = \frac{\pi}{2} = 90^\circ$$

donc à peine moins que  $\alpha = 91^\circ 05'$  obtenu grâce à la répartition à  $45^\circ$  dès les bords du pilier. Ce résultat fait prévoir que l'Ordonnance fédérale est trop sévère et pourrait autoriser une répartition plus large au travers d'un massif de fondation armé. Des mesures au laboratoire de statique le rendront peut-être évident.

Le moment fléchissant au milieu de la poutre se montre, par contre, très sensible au changement de régime.

La solution  $\cos \alpha = 0 \quad \cos 2\alpha = -1 \quad \sin 2\alpha = 0$  simplifie l'expression des constantes qui, avec

$$e^{+2\alpha} = 23,1410 \quad e^{-2\alpha} = 0,00432$$

deviennent pour

$$(d) = + 23,1410 + 0,0432 - 2 = + 21,1842$$

$$\begin{aligned} A &= + 0,02258 [0] & C &= - 0,02258 [0] = - A \\ B &= + 0,52258 [0] & D &= + 0,52258 [0] = + B \end{aligned}$$

et donnent à l'élastique l'équation

$$\begin{aligned} v &= (+ 0,02258 e^{+\varphi} \cos \varphi + 0,52258 e^{-\varphi} \cos \varphi - \\ &- 0,02258 e^{+\varphi} \sin \varphi + 0,52258 e^{-\varphi} \sin \varphi) [0] \end{aligned}$$

où les termes à exposant positif sont très petits en comparaison des termes amortisseurs de la courbe.

*Exemple numérique.* — Nous reprenons les dimensions de la poutre étudiée précédemment et dont le terme de charge devient

$$[0] = \frac{90\,000 \text{ k. } 0,0045 \text{ cm}^{-1}}{5 \text{ k/cm}^3 \cdot 75 \text{ cm}} = 1,08 \text{ cm.}$$

Les constantes

$$A = -C = + 0,02439 \quad B = +D = + 0,56439$$

donnent à l'élastique les équations

$$\begin{aligned} v &= + 0,02439 e^{+\varphi} \cos \varphi + 0,56439 e^{-\varphi} \cos \varphi - \\ &- 0,02439 e^{+\varphi} \sin \varphi + 0,56439 e^{-\varphi} \sin \varphi ; \end{aligned}$$

$$\frac{dv}{dx} = k [- 0,04878 e^{+\varphi} \sin \varphi - 1,12878 e^{-\varphi} \sin \varphi] ;$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2 v}{dx^2} &= 2k^2 [- 0,02435 e^{+\varphi} \cos \varphi - 0,56439 e^{-\varphi} \cos \varphi - \\ &- 0,02439 e^{+\varphi} \sin \varphi + 0,56439 e^{-\varphi} \sin \varphi] ; \end{aligned}$$

$$\frac{d^3 v}{dx^3} = 2k^3 [- 0,04878 e^{+\varphi} \cos \varphi + 1,12878 e^{-\varphi} \cos \varphi]$$

et satisfont comme suit aux conditions de limites :

Extrémité A ( $\varphi = \alpha = 90^\circ$  ;  $\sin \alpha = 1$  ;  $\cos \alpha = 0$ ).

$$v = -0,11733 + 0,11734 \cong 0. \quad (1)$$

$$\frac{d^2v}{dx^2} = -0,11733 + 0,11734 \cong 0. \quad (2)$$

$$\frac{d^3v}{dx^3} = 0. \quad (3)$$

Equilibre général :

$$-0,02439 + 0,56439 - 0,02439 + 0,56439 = 1,08 \text{ cm} \\ 1,08 = 1,08. \quad (4)$$

Section médiane :

$$\frac{dv}{dx} = 0 + 0,02439 - 0,02439 - 0,56439 + 0,56439 = 0. \quad (5)$$

La compression du sol atteint, sous la charge ponctuelle ( $x = 0$  ;  $\varphi = 0$ )

$$v = +0,02439 \cdot 1,1 + 0,56439 \cdot 1,1 = 0,58878 \text{ cm}$$

et le moment fléchissant médian

$$M = -(EJ) \frac{d^2v}{dx^2} = +5\,451\,100 \text{ cm k} = +54,51 \text{ mt}$$

un chiffre naturellement plus fort que sous la base répartitrice.

#### Conclusions.

Supposant l'élasticité parfaite du sol comprimé, mais abstraction faite de l'entraînement dû aux déformations inégales, supposant donc la proportionalité des enfoncements avec les efforts verticaux, qui les provoquent, on montre que les conditions aux extrémités de la poutre de longueur limitée, et celles aux affleurements de la poutre de longueur illimitée, conduisent le calcul à des fonctions trigonométriques amorties par des exponentielles à exposants négatifs et positifs. Les constantes d'intégration donnent aux puissances négatives du nombre  $e$  une influence prépondérante, mais laissent subsister dans tous les cas étudiés les termes à exposant positif ; l'absence de ces derniers aurait empêché de donner satisfaction simultanée à toutes les conditions d'extrémités, de contiguïté et d'équilibre.

On remarque, en passant, que l'élasticité de la poutre abaisse ses moments fléchissants maximums en concentrant la pression du sol aux abords de la charge ; la longueur de la cuvette de pénétration ne dépend toutefois pas de la grandeur de la charge sur le sol censé élastique linéairement, mais seulement de sa disposition.

On voit enfin, à travers un sommier armé, que la transmission des charges se fait probablement sur une largeur plus grande que ne le fait la répartition à  $45^\circ$  généralement admise ; l'élasticité relative du sol et de la poutre influencent cette largeur dans une proportion que le laboratoire de statique pourrait aider à fixer pratiquement.

## Recherche de l'Elastique d'un tube cylindrique de révolution à épaisseur variable,

par JACQUES PASCHOUD, ingénieur E. I. L.,  
ingénieur aux Usines Paillard S. A., Sainte-Croix.

### 1. Introduction.

Dans son article paru dans ce même numéro, M. le professeur A. Dumas expose les difficultés très grandes qui s'opposent à l'intégration algébrique rigoureuse des équations différentielles des enveloppes et il s'attache particulièrement à l'étude du tube cylindrique de révolution à épaisseur variable. Il montre comment, en généralisant la solution de l'équation différentielle du tube à épaisseur constante, on peut obtenir les déformations dans la section origine du tube. Partant de ces déformations, il est alors possible de trouver toute l'élastique par une intégration numérique ou graphique point par point. Cette méthode a l'avantage considérable d'être immédiatement applicable à n'importe quel cas d'enveloppe de révolution. Par contre, elle ne peut être utilisée que pour des enveloppes axialement illimitées dans un sens, ou du moins que l'on peut considérer comme telles en vertu du principe de Saint-Venant. Enfin, pour trouver la déformation en un point quelconque de cette enveloppe, elle exige une intégration point par point numérique ou graphique à partir de la section origine.

Nous attachant au seul cas du tube cylindrique de révolution à épaisseur variable sollicité dans la section origine par un moment fléchissant et un effort tranchant répartis uniformément dans cette section, nous avons cherché à mettre l'élastique de ce tube sous une forme algébrique propre à permettre la détermination suffisamment précise des déformations en un point quelconque, et ceci par simple substitution de nombres aux symboles algébriques. Notre but était encore d'envisager non seulement le problème du tube illimité axialement mais aussi toutes les conditions aux limites possibles pour la section terminale du tube.

### 2. Principe de la méthode.

L'idée développée fut la suivante : chercher une loi régissant la variation d'épaisseur du tube qui permette, par l'intégration rigoureuse de l'équation différentielle proposée d'obtenir l'élastique du tube sous la forme d'une fonction connue ; puis généraliser cette fonction de façon à pouvoir envisager d'autres lois de variation d'épaisseur.

Avant de développer ce principe, nous voudrions attirer l'attention sur le fait que les calculs effectués pour obtenir le résultat algébrique paraîtront probablement un peu longs ; néanmoins l'application de ce résultat, *acquis une fois pour toutes*, à un problème numérique donné sera beaucoup plus courte.