Zeitschrift: Bulletin technique de la Suisse romande

Band: 70 (1944)

Heft: 24

Artikel: Sur la généralisation d'une analogie entre cinq phénomènes de mécanique

Autor: Favre, Henry

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-53269

70e année 25 novembre 1944 N° 24

BULLETIN TECHNIQUE
DE LA SUISSE ROMANDE

Paraissant tous les 15 jours

ABONNEMENTS :
Suisse : 1 an, 13.50 francs
Etranger : 16 francs
Pour sociétaires :
Suisse : 1 an, 11 francs
Etranger : 13.50 francs
Prix du numéro :
75 centimes.
Pour les abonnements s'adresser à la librairie F. Rouge & Cie, à Lausanne.

Organe de la Société suisse des ingénieurs et des architectes, des Sociétés vaudoise et genevoise des ingénieurs et des architectes, de l'Association des anciens élèves de l'Ecole d'ingénieurs de l'Université de Lausanne et des Groupes romands des anciens élèves de l'Ecole polytechnique fédérale.

COMITÉ DE PATRONAGE. — Président : R. Neeser, ingénieur, à Genève ; Vice-président : G. Epitaux, architecte, à Lausanne ; secrétaire : J. Calame, ingénieur, à Genève. Membres : *Fribourg :* MM. L. Hertling, architecte ; P. Joye, professeur ; *Vaud :* MM. F. Chenaux, ingénieur ; E. Elskes, ingénieur ; E. Jost, architecte ; A. Paris, ingénieur ; Ch. Thévenaz, architecte ; *Genève :* MM. L. Archinard, ingénieur ; E. Martin, architecte ; E. Odier, architecte ; *Neuchâtel :* MM. J. Béguin, architecte ; R. Guye, ingénieur ; A. Méan, ingénieur ; *Valais :* M. J. Dubuis, ingénieur ; A. de Kalbermatten, architecte.

Rédaction : D. Bonnard, ingénieur, Case postale Chauderon 475, Lausanne.

CONSEIL D'ADMINISTRATION DE LA SOCIÉTÉ ANONYME DU BULLETIN TECHNIQUE
A. Stucky, ingénieur, président ; M. Bridel ; G. Epitaux, architecte.

Sur la généralisation d'une analogie entre cinq phénomènes de Mécanique,

par Henry FAVRE
professeur à l'Ecole polytechnique fédérale, Zurich.

(Suite) [1]

§ 2. Systèmes d'équations régissant les cinq phénomènes dans le cas des caractéristiques variables.

(Suite.)

5° *Petits mouvements non permanents d'un liquide dans un canal découvert de profil variable (ondes de translation engendrant des intumescences de très faible hauteur).*

Soit un canal découvert d'axe rectiligne ou légèrement courbe et possédant une faible pente. Nous supposerons les profils en travers de forme quelconque et variable le long de l'axe. Nous admettrons toutefois que les éléments de surface des parois et du fond fassent des angles faibles avec cet axe (fig. 5).

Supposons qu'un liquide immobile, par exemple de l'eau, remplisse d'abord ce canal, puis qu'une perturbation à une de ses extrémités engendre un régime non permanent. Nous admettrons que cette perturbation soit suffisamment faible et lente pour que les variations de niveau en un profil quelconque soient très petites et lentes. Le profil en long de la surface du liquide sera, quel que soit le temps, une ligne de très faible courbure, voisine du niveau primitif (mouvement très graduellement varié).

Considérons au temps t deux profils voisins d'abscisses x et $x + dx$. Soient F et v la surface mouillée et la vitesse moyenne au profil x. Le petit volume de liquide compris, au temps t, entre les deux profils, a une masse égale à $\rho\, F\, dx$, si ρ désigne la masse spécifique du liquide.

Equation dynamique. L'accélération de tous les points de la masse considérée est approximativement horizontale et égale à

$$\frac{\partial v}{\partial x} v + \frac{\partial v}{\partial t}.$$

La projection horizontale de la résultante des pressions agissant sur cette masse est

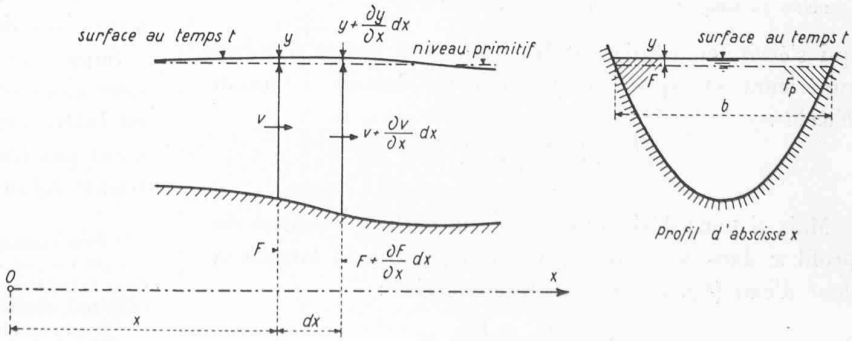

Fig. 5. — Petits mouvements non-permanents d'un liquide dans un canal découvert de profil variable.

[1] Voir *Bulletin technique* du 11 novembre 1944 p. 297.

$$-\rho g F \frac{\partial y}{\partial x}\, dx,$$

où y désigne la surélévation du niveau au profil x et g l'accélération de la pesanteur [1].

L'équation dynamique s'écrit :

$$\underbrace{\rho\, F\, dx}_{\text{masse}}\ \underbrace{\left(\frac{\partial v}{\partial x} v + \frac{\partial v}{\partial t}\right)}_{\text{accélération}} = \underbrace{-\rho\, g\, F \frac{\partial y}{\partial x}\, dx,}_{\text{force}}$$

ou bien, en remarquant que $\frac{\partial v}{\partial x} v$ est négligeable par rapport à $\frac{\partial v}{\partial t}$, puisque le mouvement est très graduellement varié :

$$\frac{\partial v}{\partial t} + g \frac{\partial y}{\partial x} = 0.$$

Si nous désignons par p la *pression du liquide à un niveau déterminé*, nous aurons

$$p = \rho g y + \text{const.}, \quad \text{d'où} \quad \frac{\partial p}{\partial x} = \rho g \frac{\partial y}{\partial x}$$

et l'équation dynamique devient

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = 0 \qquad (14')$$

Equation de continuité. A l'instant $t + \delta t$, les molécules qui étaient au temps t sur les profils x et $x + dx$ seront respectivement sur deux nouveaux profils d'abscisses $x + v\,\delta t$ et $x + dx + \left(v + \frac{\partial v}{\partial x} dx\right) \delta t$, dont la distance est $dx + \frac{\partial v}{\partial x} dx\, \delta t$. D'autre part l'augmentation, pendant l'intervalle δt, de l'aire d'un profil transporté avec les molécules de liquide, et qui était situé au temps t entre les profils x et $x + dx$, sera sensiblement $\frac{\partial F}{\partial t} \delta t + \frac{\partial F}{\partial x} v \delta t$.

A la fin de cet intervalle, la masse considérée aura donc pour expression

$$\rho\left(F + \frac{\partial F}{\partial t} \delta t + \frac{\partial F}{\partial x} v \delta t\right)\left(dx + \frac{\partial v}{\partial x} dx\, \delta t\right).$$

Comme elle est constante quel que soit t, nous aurons l'équation de continuité suivante :

$$\underbrace{\rho\, F\, dx}_{\text{masse au temps } t} = \underbrace{\rho\left(F + \frac{\partial F}{\partial t} \delta t + \frac{\partial F}{\partial x} v \delta t\right)\left(dx + \frac{\partial v}{\partial x} dx\, \delta t\right)}_{\text{masse au temps } t + \delta t}$$

qui s'écrit, en négligeant les infiniment petits d'ordres supérieurs et après suppression du facteur commun $F\, dx\, \delta t$:

$$\frac{\partial F}{\partial t} + F \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial F}{\partial x} = 0.$$

Mais si nous désignons par F_p la surface mouillée du profil x dans le régime primitif et par b la largeur à fleur d'eau (fig. 5), nous pouvons écrire :

$$F = F_p + by,$$

[1] Nous négligeons les frottements du liquide.

d'où

$$\frac{\partial F}{\partial t} = b \frac{\partial y}{\partial t} = b \frac{1}{\rho g} \frac{\partial p}{\partial t}.$$

D'autre part, dans les deux derniers termes de l'équation de continuité, nous pouvons remplacer F par F_p puisque le régime est très graduellement varié. Cette équation devient ainsi :

$$\frac{b}{\rho g} \frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(F_p\, v) = 0$$

ou, en introduisant la *profondeur moyenne* $\frac{F_p}{b} = H$:

$$\frac{1}{\rho g H} \frac{\partial p}{\partial t} + \frac{1}{F_p} \frac{\partial}{\partial x}(F_p v) = 0. \qquad (13)$$

Les *petits mouvements non permanents d'un liquide dans un canal de profil variable* sont donc régis par le système [1] :

$$\boxed{\begin{aligned} &\frac{1}{\rho g H} \frac{\partial p}{\partial t} + \frac{1}{F_p} \frac{\partial}{\partial x}(F_p v) = 0 \quad \text{(équation de continuité)} \quad (13) \\ &\frac{1}{g H} \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{1}{\rho g H} \frac{\partial p}{\partial x} = 0 \quad \text{(équation dynamique)} \quad (14) \end{aligned}}$$

où p, v sont des fonctions inconnues des variables indépendantes x, t ; ρ, F_p, H sont des fonctions données de x [2].

§ 3. L'analogie dans le cas des caractéristiques variables.

La comparaison des systèmes d'équations établies au paragraphe précédent montre immédiatement que les cinq phénomènes seront encore analogues si leurs caractéristiques varient convenablement en fonction de x. Ils satisfont, en effet, aux deux équations

$$\boxed{\begin{aligned} &\alpha \frac{\partial z_1}{\partial t} + \frac{1}{\beta} \frac{\partial}{\partial x}(\beta z_2) = 0, \qquad \text{(I)} \\ &\frac{1}{\omega^2} \frac{\partial z_2}{\partial t} + \alpha \frac{\partial z_1}{\partial x} = 0, \qquad \text{(II)} \end{aligned}}$$

où les fonctions inconnues z_1, z_2, les variables indépendantes x, t et les coefficients α, β, ω^2 ont les significations indiquées au tableau 2. *Si chacun des coefficients α, β, ω^2 est la même fonction de x pour les cinq phénomènes, ces derniers seront analogues.*

Supposons que ce soit le cas. Les grandeurs analogues sont alors celles d'une même colonne du tableau 2. Il est intéressant de constater que ces grandeurs analogues n'ont pas toujours les mêmes dimensions. Dans la quatrième colonne, z_1 représente une vitesse pour les trois

[1] Pour obtenir l'équation (14), nous avons divisé les deux termes de (14') par gH. Ceci est nécessaire pour l'analogie, comme nous le verrons plus loin. C'est dans le même but que nous avons écrit l'équation de continuité avant l'équation dynamique.

[2] ρ sera en général une constante. Toutefois on peut imaginer, s'il s'agit de l'eau, que ρ varie le long du canal par suite de la présence de matières en suspension ou de matières dissoutes.

TABLEAU 2.

Analogie dans le cas des caractéristiques variables.

Signification des différentes grandeurs figurant dans les équations (I) et (II) pour les cinq phénomènes.

	Objet	x	t	z_1	z_2	α	β	ω^2	$\alpha.\omega^2$	$\gamma = \alpha.\beta.\omega^2$
		cm	sec.	lignes 1. 2 3 : cm.sec^{-1} lignes 4, 5 : dyne . cm^{-2}	lignes 1, 2, 3 : dyne.cm^{-2} lignes 4, 5 : cm.sec^{-1}	lignes 1, 2, 3 : gr .cm^{-3} lignes 4, 5 : gr^{-1}.cm.sec^2	lignes 1, 2, 4, 5 : cm^2 ligne 3 : cm^4	cm^2.sec^{-2}	dyne.cm^{-2} et gr^{-1}.cm^3	dyne, gr^{-1}.cm^5 et dyne. cm^2
1	*Corde* (vibrations transversales).	Abscisse d'un profil.	Temps	*Vitesse* v d'un point de la corde.	*Composante* τ suivant la direction des vibrations, de la « traction de la corde par unité de surface ϵ ».	*Masse spécifique* ρ de la matière constituant la corde.	*Aire* F du profil.	$\frac{\epsilon}{\rho}$ quotient de la « traction de la corde par unité de surface ϵ », par la masse spécifique ρ.	ϵ	$\epsilon.F$
2	*Barre* (vibrations longitudinales).	»	»	*Vitesse* v des points d'un profil de la barre.	*Tension normale* σ agissant dans un profil.	*Masse spécifique* ρ de la matière constituant la barre.	*Aire* F du profil.	$\frac{E}{\rho}$ quotient du module d'élasticité E de la barre, par la masse spécifique ρ.	E	$E.F$
3	*Barre* de rotation (vibrations de torsion).	»	»	*Vitesse* v des points d'un profil situés à la distance 1 de l'axe.	*Tension tangentielle* τ agissant aux points du profil situés à la distance 1 de l'axe.	*Masse spécifique* ρ de la matière constituant la barre	*Moment d'inertie polaire* J du profil.	$\frac{G}{\rho}$ quotient du module de cisaillement G de la barre par la masse spécifique ρ.	G	$G.J$
4	*Conduite forcée* circulaire (coups de bélier).	»	»	*Pression* p du liquide, évaluée à l'axe.	*Vitesse* v du liquide dans la conduite.	$\frac{1}{\rho.a^2}$ Inverse du produit de la masse spécifique ρ par le carré de a.	*Aire* F du profil.	$\frac{\frac{1}{\rho}}{\frac{1}{\epsilon_0}+\frac{1}{E}\cdot\frac{D}{e}}=a^2$ [1]	$\frac{1}{\rho}$	$\frac{F}{\rho}$
5	*Canal découvert* (ondes de translation).	»	»	*Pression* p du liquide, évaluée à un niveau déterminé.	*Vitesse* v du liquide dans le canal.	$\frac{1}{\rho g.H}$ inverse du produit de la masse spécifique ρ par l'accélération de la pesanteur g et la profondeur moyenne H.	*Aire* F_p du profil, dans le régime primitif.	$g.H$ produit de l'accélération de la pesanteur g par la profondeur moyenne H du canal.	$\frac{1}{\rho}$	$\frac{F_p}{\rho}$
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

[1] ϵ_0 désigne le coefficient de compressibilité du liquide, D le diamètre de la conduite, e l'épaisseur des parois, E leur module d'élasticité.

premiers phénomènes (cm · sec^{-1}), une pression pour les deux derniers (dyne · cm^{-2}). Dans la cinquième, z_2 est une tension normale ou tangentielle (dyne · cm^{-2}) pour les trois premiers phénomènes et une vitesse (cm · sec^{-1}) pour les deux derniers. α représente une masse spécifique pour les trois premiers (gr.cm^{-3}), l'inverse du produit d'une masse spécifique par le carré d'une vitesse pour les deux derniers (gr^{-1}.cm · sec^2, colonne 6). Dans la septième colonne, les grandeurs β sont des surfaces (cm^2), sauf pour le troisième phénomène où β est un moment d'inertie (cm^4). Par contre, tous les ω^2 ont les dimensions du carré d'une vitesse (cm^2 · sec^{-2}, colonne 8). On peut formuler des remarques analogues au suje des colonnes 9 et 10, où nous avons indiqué la correspondance des produits $\alpha \cdot \omega^2$ et $\alpha \cdot \beta\omega^2$.

On peut encore remarquer ceci. Dans les trois premiers phénomènes, la relation (I) représente l'équation dynamique [voir (5), (7), (9)], tandis que (II) est l'équation de continuité [voir (6), (8), (10)]. Le contraire a lieu pour les deux derniers : (I) représente l'équation de continuité [voir (11), (13)] tandis que (II) est l'équation dynamique [voir (12), (14)].

En résumé, nous voyons que si chacun des coefficients α, β, ω^2 est la même fonction de x pour les cinq phéno-

mènes, ceux-ci sont analogues. Ils satisfont à la définition de l'analogie que nous avons donnée au début de ce mémoire. Mais les grandeurs analogues n'ont pas toujours les mêmes dimensions. On peut donc dire que *l'analogie est mathématique sans être physique.*

Par contre, les trois premiers phénomènes (vibrations transversales d'une corde, vibrations longitudinales et de torsion d'une barre) sont analogues au point de vue mathématique et physique [1]. Il en est de même des deux derniers (coups de bélier dans une conduite forcée et ondes de translation dans un canal découvert).

Nous avons ainsi généralisé l'analogie rappelée au paragraphe 1.

Remarque. La propriété de permutation des grandeurs v et p indiquée à la fin du paragraphe 1 ne se laisse pas généraliser. Il n'est plus possible de permuter *à volonté* deux grandeurs figurant, sur la même ligne, dans les colonnes (4) et (5). Ceci est dû au fait que z_1 et z_2 ne jouent pas des rôles symétriques dans le système (I), (II), tandis que c'était le cas pour v et p dans le système (1), (2). La permutation des grandeurs v et p (resp. τ) que nous remarquons en passant de la ligne 3 à la ligne 4 est en quelque sorte imposée par la généralisation.

§ 4. Première application. Formules pour les périodes des vibrations propres.

Dans un mémoire paru ici-même, nous avons étudié la *résonance des conduites à caractéristiques linéairement variables* [2]. Nous voulons maintenant, en utilisant l'analogie établie au paragraphe 3, déduire d'une proposition établie dans ce mémoire des conséquences valables pour les phénomènes analogues.

Soit une conduite dont l'extrémité amont est en communication avec un bassin à niveau constant et qui possède, à l'aval, un obturateur que nous supposerons fermé. Désignons par a_0 et a_m les valeurs de a à l'extrémité aval et au milieu de la conduite, par D_0 et D_A son diamètre aux extrémités aval et amont (fig. 6). Nous admettrons que D, c'est-à-dire $\sqrt{F}$ et a varient linéairement en fonction de x.

Posons :

$$\nu = \frac{a_0 - a_m}{a_m}, \qquad \mu = \frac{D_A - D_0}{D_0}, \tag{15}$$

$$\sigma = \left(1 + \frac{\nu}{2}\right)\left[\mu\left(1 + \frac{\nu}{2}\right) + \nu\right]. \tag{16}$$

Les *périodes apparentes* ou *périodes propres* de la conduite sont données par la formule

$$T_a = \overline{\theta} \cdot \frac{4L}{a_m}, \tag{17}$$

où L est la longueur et où $\overline{\theta}$ désigne les différentes racines de l'équation transcendante

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2\overline{\theta}}\right) = -\frac{\pi}{2\overline{\theta}\sigma}. \tag{18}$$

Ces formules sont valables pour des valeurs quelconques de μ (pourvu que $\frac{\partial D}{\partial x}$ soit petit par rapport à 1) et pour de faibles valeurs de ν.

Si ν et μ sont petits par rapport à 1, on a approximativement :

$$\sigma = \mu + \nu \tag{19}$$

et les différentes périodes propres ont les valeurs suivantes :

$$\left.\begin{aligned} &\text{fondamental :} && (T_a)_1 = \left(1 - \frac{4\sigma}{\pi^2}\right)\frac{4L}{a_m}, \\ &3^{\text{e}}\text{ harmonique :} && (T_a)_3 = \frac{1}{3}\left(1 - \frac{4\sigma}{9\pi^2}\right)\frac{4L}{a_m}, \\ &5^{\text{e}}\text{ harmonique :} && (T_a)_5 = \frac{1}{5}\left(1 - \frac{4\sigma}{25\pi^2}\right)\frac{4L}{a_m}, \end{aligned}\right\} \tag{20}$$

. . . . . .

Remarquons maintenant qu'une conduite à caractéristiques linéairement variables est telle que $\sqrt{F}$ et a sont des fonctions linéaires de x, tandis que ρ est constant. Ceci signifie, d'après la 4e ligne du tableau 2, que pour une telle conduite, $\sqrt{\beta}$ et ω (racines carrées des termes des 7e et 8e colonnes) varient linéairement le long de l'axe, tandis que la grandeur $\alpha\omega^2$ figurant à la 9e colonne est constante.

Les résultats relatifs aux coups de bélier que nous venons de rappeler seront donc immédiatement applicables aux quatre autres phénomènes, pourvu que ces derniers soient tels que les grandeurs $\sqrt{\beta}$ et ω varient linéairement et que $\alpha\omega^2$ soit constant.

Dans ces conditions, si nous affectons des indices O, m, A les grandeurs relatives à une extrémité, au milieu et à l'autre extrémité d'un des cinq phénomènes, nous aurons les formules générales suivantes, applicables aux cordes, aux barres comprimées, aux barres tordues, aux conduites forcées et aux canaux découverts :

$$\nu = \frac{\omega_0 - \omega_m}{\omega_m}, \qquad \mu = \frac{\sqrt{\beta_A} - \sqrt{\beta_0}}{\sqrt{\beta_0}}. \tag{15'}$$

Les périodes propres se calculeront ensuite à l'aide des formules (16) à (20) [1]. Bien entendu, ceci suppose que pour les cinq phénomènes les conditions aux limites correspondent à celles admises pour la conduite (fig. 6).

Prenons comme *premier exemple* le canal découvert de profil rectangulaire indiqué à la figure 7. D'un côté, il débouche dans un bassin à niveau constant. De l'autre, il est fermé. Supposons que $\frac{\Delta b}{b}$ et $\frac{\Delta H}{H_m}$ soient petits par rapport à 1. Ce canal satisfait à toutes les conditions indiquées. $\sqrt{F_p}$ et $\sqrt{gH}$ (racines carrées des termes des 7e et 8e colonnes) sont approximativement des fonctions

[1] Le fait que le moment d'inertie polaire n'a pas les mêmes dimensions qu'une surface ne contredit pas cette assertion, car les dimensions de β ne jouent aucun rôle dans les équations (I), (II).

[2] Voir les numéros des 7 et 21 mars 1942 du *Bulletin technique.*

[1] Comme nous l'avons déjà fait remarquer, ces formules ne sont valables que pour de faibles valeurs de ν.

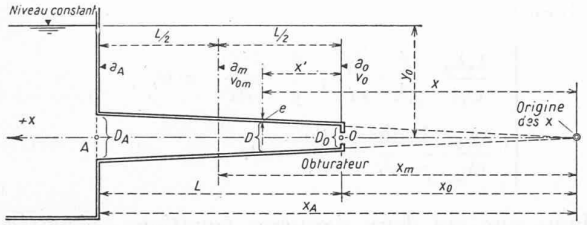

Fig. 6. — Schéma d'une conduite dont les caractéristiques varient linéairement le long de l'axe.

linéaires de x, et $\frac{1}{\rho}$ (colonne 9) est constant. D'autre part, les conditions aux limites correspondent à celles supposées pour la conduite.

Nous aurons donc d'après (15') :

$$\nu = \frac{\omega_0}{\omega_m} - 1 = \frac{\sqrt{g(H_m - \Delta H)}}{\sqrt{gH_m}} - 1 =$$

$$= \sqrt{1 - \frac{\Delta H}{H_m}} - 1 \simeq -\frac{1}{2}\frac{\Delta H}{H_m},$$

$$\beta_A = F_A = (H_m + \Delta H)(b + \Delta b) \simeq bH_m + H_m\Delta b + b\Delta H,$$

$$\beta_0 = F_0 = (H_m - \Delta H)(b - \Delta b) \simeq bH_m - H_m\Delta b - b\Delta H,$$

$$\mu = \sqrt{\frac{\beta_A}{\beta_0}} - 1 = \sqrt{\frac{1 + \frac{\Delta b}{b} + \frac{\Delta H}{H_m}}{1 - \frac{\Delta b}{b} - \frac{\Delta H}{H_m}}} - 1 \simeq \frac{\Delta b}{b} + \frac{\Delta H}{H_m}.$$

Puisque μ et ν sont petits par rapport à 1, on peut appliquer (19) ; d'où

$$\sigma = \mu + \nu = \frac{\Delta b}{b} + \frac{1}{2}\frac{\Delta H}{H_m}$$

et les périodes propres sont données par les formules approximatives (20) :

$$\left.\begin{aligned} &\text{fondamental :} && (T_a)_1 = \left\{1 - \frac{4}{\pi^2}\left(\frac{\Delta b}{b} + \frac{1}{2}\frac{\Delta H}{H_m}\right)\right\}\frac{4L}{\sqrt{gH_m}}, \\ &3^e \text{ harmonique :} && (T_a)_3 = \frac{1}{3}\left\{1 - \frac{4}{9\pi^2}\left(\frac{\Delta b}{b} + \frac{1}{2}\frac{\Delta H}{H_m}\right)\right\}\frac{4L}{\sqrt{gH_m}}, \\ &5^e \text{ harmonique :} && (T_a)_5 = \frac{1}{5}\left\{1 - \frac{4}{25\pi^2}\left(\frac{\Delta b}{b} + \frac{1}{2}\frac{\Delta H}{H_m}\right)\right\}\frac{4L}{\sqrt{gH_m}}. \end{aligned}\right\} \quad (21)$$

. . . . . .

Ces formules montrent les influences de Δb et ΔH sur les différentes périodes.

Prenons comme *second exemple* une barre homogène légèrement conique, de profil circulaire, encastrée à une extrémité et libre à l'autre (fig. 8). $\frac{\Delta D}{D_m}$ est donc supposé petit par rapport à 1. Cette barre satisfait à toutes les conditions requises. En effet :

1° J (7e colonne) est approximativement une fonction linéaire de x, $\frac{G}{\rho}$ (8e colonne) et G (9e colonne) sont constants ;

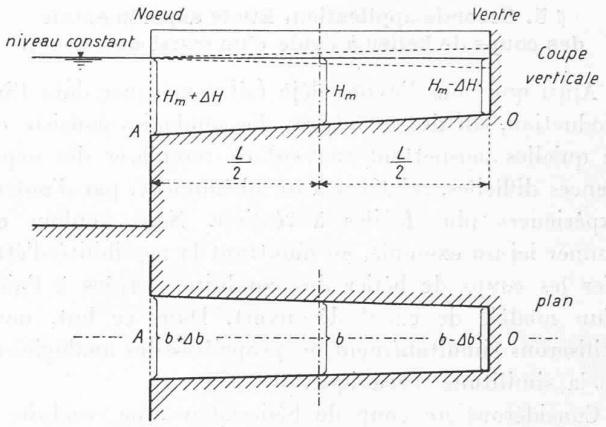

Fig. 7. — Canal découvert de profil rectangulaire dont la largeur et la profondeur varient linéairement.

2° à l'extrémité libre, on a $\tau = 0$ (pour la conduite, la grandeur correspondante ν, indiquée par la 5e colonne, était effectivement nulle). A l'extrémité encastrée, $\nu = 0$ (pour la conduite, p était constant ou nul).

Nous aurons donc d'après (15') :

$$\nu = \frac{\omega_0 - \omega_m}{\omega_m} = 0 \quad \left(\text{car } \omega = \sqrt{\frac{G}{\rho}} \text{ est constant}\right),$$

$$\mu = \sqrt{\frac{\beta_A}{\beta_0}} - 1 = \sqrt{\frac{J_A}{J_0}} - 1 = \left(\frac{D_A}{D_0}\right)^2 - 1 =$$

$$= \left(\frac{D_m + \Delta D}{D_m - \Delta D}\right)^2 - 1 = 4\frac{\Delta D}{D_m}.$$

Puisque ν est nul et μ petit par rapport à 1, on peut appliquer (19) ; d'où

$$\sigma = \mu + \nu = 4\frac{\Delta D}{D_m}$$

et les périodes propres ont les valeurs suivantes, données par (20) :

$$\left.\begin{aligned} &\text{fondamental :} && (T_a)_1 = \left(1 - \frac{16}{\pi^2}\frac{\Delta D}{D_m}\right)\frac{4L}{\sqrt{\frac{G}{\rho}}}, \\ &3^e \text{ harmonique :} && (T_a)_3 = \frac{1}{3}\left(1 - \frac{16}{9\pi^2}\frac{\Delta D}{D_m}\right)\frac{4L}{\sqrt{\frac{G}{\rho}}}, \\ &5^e \text{ harmonique :} && (T_a)_5 = \frac{1}{5}\left(1 - \frac{16}{25\pi^2}\frac{\Delta D}{D_m}\right)\frac{4L}{\sqrt{\frac{G}{\rho}}}, \end{aligned}\right\} \quad 22$$

. . . . . .

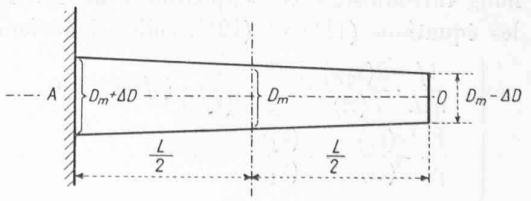

Fig. 8. — Barre légèrement conique, de profil circulaire.

§ 5. Seconde application. Etude expérimentale des coups de bélier à l'aide d'un canal découvert.

Ainsi que nous l'avons déjà fait remarquer dans l'introduction, un des avantages des analogies consiste en ce qu'elles permettent souvent de remplacer des expériences difficiles, relatives à un phénomène, par d'autres expériences plus faciles à réaliser. Nous voulons en donner ici un exemple, en montrant la possibilité d'étudier les coups de bélier des conduites forcées à l'aide d'un modèle de canal découvert. Dans ce but, nous utiliserons simultanément les propriétés des analogies et de la similitude mécanique.

Considérons un coup de bélier dans une conduite à caractéristiques variables. Nous appellerons ce phénomène le *premier mouvement* ou *mouvement donné*. Il satisfait au système d'équations (11) et (12). Ce système s'écrit, si nous remplaçons la pression p par $\rho\, g\, y$ et en choisissant les majuscules V, Y, X et T pour désigner la vitesse, la surpression évaluée en hauteur de liquide, l'abscisse et le temps :

$$\text{coup de bélier (1}^{\text{er}}\text{ mouvement)} \quad \begin{cases} \dfrac{F}{a^2}\dfrac{\partial Y}{\partial T} + \dfrac{1}{g}\dfrac{\partial}{\partial X}(FV) = 0, & (11^*) \\[2ex] \dfrac{1}{g}\dfrac{\partial V}{\partial T} + \dfrac{\partial Y}{\partial X} = 0. & (12^*) \end{cases}$$

Soit d'autre part un liquide animé d'un petit mouvement non permanent dans un canal découvert de profil rectangulaire variable. Nous appellerons ce phénomène le *second mouvement* ou *le modèle*. Il satisfait au système d'équations (13) et (14). Nous écrirons ce système en remplaçant la pression p par $\rho g y$, où y désigne la différence de niveau indiquée à la figure 5, et en écrivant h et f à la place de H et F_p :

$$\text{canal découvert (2}^{\text{e}}\text{ mouvement)} \quad \begin{cases} \dfrac{f}{gh}\dfrac{\partial y}{\partial t} + \dfrac{1}{g}\dfrac{\partial}{\partial x}(fv) = 0, & (13^*) \\[2ex] \dfrac{1}{g}\dfrac{\partial v}{\partial t} + \dfrac{\partial y}{\partial x} = 0. & (14^*) \end{cases}$$

De cette façon, toutes les grandeurs se rapportant au premier mouvement sont désignées par des majuscules (à l'exception de g et a) et toutes celles se rapportant au second par des minuscules.

Cherchons maintenant les conditions pour que les grandeurs jouant le même rôle [1] dans les deux systèmes d'équations soient dans un rapport constant. A cet effet posons :

$$X=\lambda_1 x, \quad Y=\lambda_2 y, \quad F=\xi f, \quad T=\tau t, \quad V=\epsilon v, \quad a^2=\eta g h \quad (23)$$

où λ_1, λ_2, ξ, τ, ϵ et η désignent des constantes.

Si nous introduisons ces expressions de X, Y, ... dans les équations (11*) et (12*), celles-ci deviennent :

$$\begin{cases} \dfrac{\xi f}{\eta g h}\cdot\dfrac{\partial(\lambda_2 y)}{\partial(\tau t)} + \dfrac{1}{g}\cdot\dfrac{\partial}{\partial(\lambda_1 x)}(\xi f\cdot\epsilon v) = 0, \\[2ex] \dfrac{1}{g}\cdot\dfrac{\partial(\epsilon v)}{\partial(\tau t)} + \dfrac{\partial(\lambda_2 y)}{\partial(\lambda_1 x)} = 0\,; \end{cases}$$

[1] Ce sont les grandeurs qui seraient égales s'il s'agissait d'une analogie.

ou bien :

$$\begin{cases} \dfrac{\lambda_1\lambda_2}{\epsilon\eta\tau}\cdot\dfrac{f}{gh}\cdot\dfrac{\partial y}{\partial t} + \dfrac{1}{g}\cdot\dfrac{\partial(fv)}{\partial x} = 0, \\[2ex] \dfrac{\epsilon\lambda_1}{\tau\lambda_2}\cdot\dfrac{1}{g}\cdot\dfrac{\partial v}{\partial t} + \dfrac{\partial y}{\partial x} = 0. \end{cases}$$

Pour que ces deux dernières équations soient identiques au système (13*), (14*), il faut et il suffit que

$$\frac{\lambda_1\lambda_2}{\epsilon\eta\tau} = 1 \quad \text{et} \quad \frac{\epsilon\lambda_1}{\tau\lambda_2} = 1.$$

Si ces conditions sont remplies, il est possible de produire dans le canal un mouvement du liquide correspondant à celui dans la conduite. Multiplions membre à membre les deux relations ci-dessus, ce qui donne :

$$\frac{\lambda_1^2}{\tau^2\eta} = 1, \quad \text{d'où} \quad \sqrt{\eta} = \frac{\lambda_1}{\tau}.$$

La seconde relation devient :

$$\frac{\epsilon\sqrt{\eta}}{\lambda_2} = 1, \quad \text{d'où} \quad \sqrt{\eta} = \frac{\lambda_2}{\epsilon}.$$

Les deux conditions obtenues peuvent donc s'écrire

$$\boxed{\frac{\lambda_1}{\tau} = \frac{\lambda_2}{\epsilon} = \sqrt{\eta}.} \qquad (24)$$

Entre les cinq rapports λ_1, λ_2, τ, ϵ, η existent donc deux relations. Trois de ces rapports pourront être choisis arbitrairement. Le rapport des aires des profils ξ n'est astreint à aucune condition et peut toujours être choisi arbitrairement. Pour le modèle, on peut aussi choisir un liquide quelconque.

Remarquons que pour établir les équations (24) nous avons implicitement fait usage des propriétés d'analogie et de similitude. En effet, c'est parce que les deux phénomènes envisagés (coups de bélier, mouvement dans canal découvert) sont régis par le même système d'équations (conditions nécessaires pour une analogie) qu'il a été possible d'utiliser ce système comme s'il s'agissait de similitude mécanique, c'est-à-dire comme si le phénomène du modèle était le même — aux dimensions près — que le mouvement donné.

Les relations (24) peuvent être appelées *conditions de similitude* si l'on étend la définition du mot similitude à la transformation que nous avons utilisée.

L'exemple suivant montrera comment appliquer ces résultats.

Exemple numérique. Soit une conduite forcée de diamètre et d'épaisseur variables, dont les caractéristiques principales sont :

$$L = 1286{,}198 \text{ m}\,;\ D_A = 1{,}40 \text{ m}\,;\ D_0 = 1{,}00 \text{ m}\,;$$
$$a_A = 899 \text{ m/sec}\,;\ a_0 = 1190 \text{ m/sec}.$$

Nous supposerons que D et a varient d'après une loi quelconque de l'amont à l'aval, mais que les valeurs extrêmes de ces grandeurs sont celles indiquées ci-dessus.

Pour fixer les idées, admettons que les conditions aux limites soient celles de la figure 6. L'extrémité amont du canal découvert (modèle) devra alors être reliée à un bassin de niveau constant, comme à la figure 7. L'autre extrémité de ce canal sera munie d'un obturateur réglable.

Choisissons

$$\lambda_1 = 100, \quad \lambda_2 = 2 \cdot 10^4, \quad \epsilon = 40, \; \xi = 5,$$

et prenons un liquide quelconque pour le modèle.

Nous aurons :

longueur du modèle (canal découvert) :

$$l = \frac{L}{\lambda_1} = \frac{1286{,}198}{100} = \mathit{12{,}862\ m.}$$

D'autre part,

$$\sqrt{\eta} = \frac{\lambda_2}{\epsilon} = \frac{2 \cdot 10^4}{40} = 500, \qquad \eta = 2{,}5 \cdot 10^5, \quad \text{d'où :}$$

$$\text{rapport des temps : } \tau = \frac{\lambda_1}{\sqrt{\eta}} = \frac{100}{500} = \mathit{0{,}2.}$$

De $a^2 = \eta g h$ on tire $h = \dfrac{a^2}{g\eta}$;

d'où *pour le modèle* (canal découvert), en affectant de l'indice A les grandeurs relatives à l'extrémité amont, de l'indice 0 celles relatives à l'autre extrémité :

profondeur du liquide, à l'aval : $h_0 = \dfrac{1190^2}{9{,}81 \cdot 2{,}5 \cdot 10^5} = 0{,}575$ m

à l'amont $h_A = \dfrac{899^2}{9{,}81 \cdot 2{,}5 \cdot 10^5} = 0{,}328$ m

surface du profil, à l'aval : $f_0 = \dfrac{F_0}{\xi} = \dfrac{\left(\dfrac{\pi \cdot 1{,}00^2}{4}\right)}{5} = 0{,}1572$ m²

à l'amont : $f_A = \dfrac{F_A}{\xi} = \dfrac{\left(\dfrac{\pi \cdot 1{,}40^2}{4}\right)}{5} = 0{,}3070$ m²

largeur du canal, à l'aval : $b_0 = \dfrac{f_0}{h_0} = \dfrac{0{,}1572}{0{,}575} = 0{,}274$ m

à l'amont : $b_A = \dfrac{f_A}{h_A} = \dfrac{0{,}3070}{0{,}328} = 0{,}934$ m

Les valeurs de h et b aux profils intermédiaires seront données par des calculs analogues. Ce modèle de canal découvert serait facile à exécuter.

Supposons la pression statique à l'extrémité aval de la conduite égale à 280 m de liquide (chute brute). Un coup de bélier créant à cette extrémité une surpression relative de 30 % donnerait :

$$Y = 0{,}30 \cdot 280 = 84 \text{ m},$$

d'où, pour le modèle,

$$y = \frac{Y}{\lambda_2} = \frac{84}{2 \cdot 10^4} = 0{,}0042 \text{ m} = \mathit{4{,}2\ mm.}$$

L'onde de translation du modèle qui correspondrait au coup de bélier dans la conduite aurait donc une hauteur très faible. Elle serait, à l'aval, égale à $\dfrac{0{,}0042}{0{,}575} = 0{,}0073$ soit 0,73 % de la profondeur. Ce serait donc bien une intumescence de très faible hauteur, comme nous l'avons supposé en établissant les équations (13) et (14). Cette intumescence se mesurerait facilement à l'aide d'appareils enregistreurs.

Remarquons en outre que le rapport des temps τ étant égal à 0,2, *les périodes du modèle seraient cinq fois plus grandes que celles du mouvement donné*, ce qui serait très favorable pour l'enregistrement des phénomènes d'oscillation.

Ce modèle de canal découvert permettrait donc de reproduire fidèlement les coups de bélier de la conduite donnée, à l'exception des surpressions produites par des manœuvres brusques de l'obturateur. A ces manœuvres correspondraient, en effet, des ondes de translation dont la tête ne constituerait plus un mouvement très graduellement varié.

On voit ainsi qu'il serait possible d'étudier sur un canal découvert de laboratoire le phénomène du coup de bélier si difficile à enregistrer dans la nature. Cette méthode serait particulièrement avantageuse dans le cas d'un système de conduites. En étendant la théorie que nous avons développée, il est probable que l'on pourrait tenir compte des frottements du liquide, dont jusqu'à présent aucune méthode de calcul n'a permis de déterminer l'influence avec une certaine rigueur.

Dans un remarquable mémoire paru récemment, M. *Karl Lindner*, professeur à l'Ecole polytechnique de Graz, a proposé d'étudier les coups de bélier sur des modèles de conduites ovales [1]. Cette idée, très intéressante, est à mettre en parallèle avec celle que nous donnons ci-dessus. Le but est en effet le même : chercher à réduire autant que possible les vitesses de propagation dans le modèle, afin d'éviter d'avoir à enregistrer des phénomènes trop rapides. *(A suivre.)*

Le projet d'extension de la gare de Berne.

Ce projet, approuvé récemment par le Conseil d'administration des Chemins de fer fédéraux, et dont le début d'exécution (travaux préparatoires) est prévu pour 1945, revêt, tant en ce qui concerne les transformations apportées aux installations ferroviaires que les aménagements des abords de la gare, une importance telle qu'elle doit retenir l'attention aussi bien des milieux techniques que de ceux que préoccupent les problèmes d'urbanisme.

La solution adoptée en définitive fit, en effet, l'objet de longues études auxquelles prirent part non seulement les organes techniques et dirigeants des C. F. F., mais également les autorités de la ville et du canton de Berne. On trouvera plus amples informations au sujet du développement de ces études, qui viennent de conduire à un accord entre les autorités intéressées, au numéro du 4 novembre 1944 de la *Schweizerische Bauzeitung* qui, en plus des documents

[1] « Modellversuche an Druckrohrleitungen. » *Deutsche Wasserwirtschaft*, August 1942.