

Zeitschrift: Bulletin technique de la Suisse romande
Band: 70 (1944)
Heft: 23

Artikel: Sur la généralisation d'une analogie entre cinq phénomènes de mécanique
Autor: Favre, Henry
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-53267>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 26.01.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

BULLETIN TECHNIQUE

DE LA SUISSE ROMANDE

ABONNEMENTS :

Suisse : 1 an, 13.50 francs

Etranger : 16 francs

Pour sociétaires :

Suisse : 1 an, 11 francs

Etranger : 13.50 francs

Prix du numéro :

75 centimes.

Pour les abonnements

s'adresser à la librairie

F. Rouge & C^{ie}, à Lausanne.

Paraissant tous les 15 jours

Organe de la Société suisse des ingénieurs et des architectes, des Sociétés vaudoise et genevoise des ingénieurs et des architectes, de l'Association des anciens élèves de l'Ecole d'ingénieurs de l'Université de Lausanne et des Groupes romands des anciens élèves de l'Ecole polytechnique fédérale.

COMITÉ DE PATRONAGE. — Président : R. NEESER, ingénieur, à Genève ; Vice-président : † M. IMER, à Genève ; secrétaire : J. CALAME, ingénieur, à Genève. Membres : *Fribourg* : MM. L. HERTLING, architecte ; P. JOYE, professeur ; *Vaud* : MM. F. CHENAUX, ingénieur ; E. ELSKES, ingénieur ; EPITAUX, architecte ; E. JOST, architecte ; A. PARIS, ingénieur ; CH. THÉVENAZ, architecte ; *Genève* : MM. L. ARCHINARD, ingénieur ; E. MARTIN, architecte ; E. ODIER, architecte ; *Neuchâtel* : MM. J. BÉGUIN, architecte ; R. GUYE, ingénieur ; A. MÉAN, ingénieur ; *Valais* : M. J. DUBUIS, ingénieur ; A. DE KALBERMATTEN, architecte.

RÉDACTION : D. BONNARD, ingénieur, Case postale Chauderon 475, LAUSANNE.

Publicité : TARIF DES ANNONCES

Le millimètre

(larg. 47 mm.) 20 cts.

Tarif spécial pour fractions de pages.

En plus 20 % de majoration de guerre.

Rabais pour annonces répétées.



ANNONCES-SUISSSES S.A.

5, Rue Centrale,

LAUSANNE

& Succursales.

CONSEIL D'ADMINISTRATION DE LA SOCIÉTÉ ANONYME DU BULLETIN TECHNIQUE

A. STUCKY, ingénieur, président ; M. BRIDEL ; G. EPITAUX, architecte.

SOMMAIRE : Sur la généralisation d'une analogie entre cinq phénomènes de Mécanique, par HENRY FAVRE, professeur à l'Ecole polytechnique fédérale, Zurich. — Notes sur Jean-Rodolphe Perronet, à l'occasion du 150^e anniversaire de sa mort, par J.-P. DAXEL-HOFER, ingénieur. — BIBLIOGRAPHIE. — Erratum. — SERVICE DE PLACEMENT.

Sur la généralisation d'une analogie entre cinq phénomènes de Mécanique,

par HENRY FAVRE

professeur à l'Ecole polytechnique fédérale, Zurich.

Introduction.

Plusieurs phénomènes physiques sont dits *analogues* lorsqu'ils sont régis par le même système d'équations. Voici un exemple d'analogie bien connu des ingénieurs.

L'équilibre d'un fil flexible homogène sollicité par une surcharge verticale répartie, est régi par l'équation différentielle

$$\frac{d^2\zeta}{dx^2} = -\frac{p(x)}{H},$$

où x et ζ désignent les coordonnées d'un point du fil, $p(x)$ la surcharge par unité de longueur et H la composante horizontale de la traction du fil¹.

D'autre part la ligne élastique d'une tige homogène et approximativement horizontale, sollicitée par des forces situées dans le plan vertical de symétrie, satisfait à l'équation

$$\frac{d^2\zeta}{dx^2} = -\frac{M(x)}{EJ},$$

où x et ζ ont les mêmes significations que ci-dessus ; $M(x)$ désigne le moment de flexion, E le module d'élasticité et J le moment d'inertie du profil.

¹ L'axe des x est supposé horizontal, l'axe des ζ vertical, positif vers le bas. Les deux axes sont dans le plan de la courbe.

Si $M(x) \equiv p(x)$ et $EJ = H$, les deux équations sont identiques. Les deux états d'équilibre sont analogues. La courbe décrite par le fil et la ligne élastique seront égales si les conditions aux limites sont les mêmes. Cette analogie est due à Mohr.

Un autre exemple est donné par le potentiel V d'un champ électrostatique, et la somme $\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3$ des tensions principales en un point d'un corps élastique, homogène et isotrope. Ces deux grandeurs satisfont à l'équation de Laplace $\Delta = 0$ ¹. Les deux phénomènes sont analogues pour ces grandeurs.

L'analogie de Prandtl, entre les tensions tangentielles d'une barre sollicitée à la torsion et les pentes d'une membrane tendue uniformément, est une des plus belles que l'on connaisse.

On pourrait citer encore de nombreux exemples².

Toute analogie présente deux avantages.

Un *avantage théorique*, en ce sens qu'une propriété ou une solution du système d'équations régissant un des phénomènes est immédiatement applicable à tous les autres constituant l'analogie, puisque les systèmes d'équations sont identiques.

Un *avantage expérimental*. Il est en effet souvent possible de remplacer des expériences difficiles par d'autres expériences, plus faciles, portant sur un phénomène

¹ Cette équation n'est valable, pour le champ électrostatique, qu'en dehors des masses électrisées et, pour le corps élastique, que là où les forces massiques sont constantes.

² Signalons ici l'intéressant mémoire sur « Le problème de la torsion et l'analogie hydrodynamique de Boussinesq » publié par M. le prof. M. Paschoud, dans le « Bulletin technique » du 7 novembre 1925.

analogue. Si l'on peut en outre utiliser des *lois de similitude*, qui permettent dans de nombreux cas de faire des *expériences sur modèles réduits*, on pourra remplacer des expériences à grande échelle — toujours difficiles à réaliser — relatives à un phénomène, par des expériences à petite échelle — celle du laboratoire — portant sur un phénomène analogue. Nous aurons plus loin l'occasion d'en donner un exemple.

L'application simultanée des propriétés d'analogie et de similitude sera en général commode et pourra souvent conduire à la découverte de lois importantes.

On saisit ainsi l'importance des analogies. Leur champ d'application augmente d'ailleurs avec leur degré de généralité.

C'est pourquoi nous croyons utile de montrer qu'il est possible de généraliser une analogie bien connue en Mécanique. Il s'agit des cinq phénomènes suivants :

- 1° vibrations transversales d'une corde homogène, soumise à une traction constante ;
- 2° vibrations longitudinales d'une barre prismatique homogène (ondes planes) ;
- 3° vibrations de torsion d'une barre cylindrique homogène, de profil circulaire ;
- 4° mouvements non permanents d'un liquide dans une conduite forcée dont les caractéristiques du profil sont constantes (coups de bélier) ;
- 5° petits mouvements non permanents d'un liquide dans un canal découvert d'axe rectiligne et horizontal, de profil constant (ondes de translation engendrant des intumescences de très petite hauteur).

Ces phénomènes sont régis par le même système d'équations différentielles, comme nous le rappellerons plus loin¹. Ils ont ceci de commun que toutes les caractéristiques (masse par unité de longueur, traction de la corde, profils de la barre, de la conduite, du canal, etc.) sont constantes, indépendantes de l'abscisse x mesurée le long de l'axe. Il s'agit donc de phénomènes à caractéristiques constantes dans le temps et dans l'espace.

Nous nous proposons de démontrer que l'analogie entre ces cinq phénomènes subsiste lorsque les caractéristiques varient en fonction de l'abscisse x , pourvu que la loi de variation soit la même pour tous les phénomènes.

Nous rappellerons tout d'abord l'analogie pour le cas des caractéristiques constantes (§ 1), puis établirons les systèmes d'équations régissant les cinq phénomènes correspondants à caractéristiques variables (§ 2), ce qui nous permettra de généraliser l'analogie (§ 3). Nous ferons ensuite deux applications (§§ 4 et 5) et indiquerons quelques cas d'intégration du système commun d'équations (§ 6).

¹ Cette analogie peut être encore étendue à la propagation des ondes électriques dans les fils conducteurs. Nous ne nous occuperons pas de ce phénomène, désirant limiter les considérations qui suivent aux phénomènes mécaniques.

§ 1. Rappel de l'analogie pour le cas des caractéristiques constantes.

Les cinq phénomènes à caractéristiques constantes sont régis par les deux équations différentielles suivantes (la première est l'équation du mouvement, la seconde celle de continuité) :

$$\rho \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial p}{\partial x} = 0, \quad (1)$$

$$\frac{1}{w^2} \cdot \frac{\partial p}{\partial t} + \rho \frac{\partial v}{\partial x} = 0; \quad (2)$$

où les variables v , p , x , t et les constantes ρ , w^2 ont les significations indiquées au tableau 1¹.

Ces phénomènes constituent donc une analogie. Les grandeurs analogues sont celles d'une même colonne du tableau. Il est intéressant de constater que les grandeurs qui figurent dans chaque colonne ont les mêmes dimensions. On peut donc dire que l'analogie est parfaite, puisqu'elle existe non seulement au point de vue mathématique mais aussi au point de vue physique.

En éliminant p , puis v , du système (1), (2), on obtient

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \frac{1}{w^2} \cdot \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = 0, \quad (3)$$

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} - \frac{1}{w^2} \cdot \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = 0. \quad (4)$$

v et p satisfont donc à la relation connue sous le nom d'*équation des cordes vibrantes*. Cette équation représente deux ondes *indéformables* se propageant en sens inverses avec la vitesse w (célérité). Les deux ondes p ne sont pas indépendantes des deux ondes v , puisque p et v doivent satisfaire au système (1), (2). Ce système étant du second ordre, deux seulement des quatre ondes p , v peuvent être choisies arbitrairement.

En permutant v , p et en remplaçant ρ par $1/\rho w^2$ dans les équations (1), (2) on retrouve le même système, les deux équations ont simplement été permutées. On peut donc permuter deux grandeurs figurant, sur la même ligne, dans les colonnes (4) et (5), à condition de remplacer ρ par $1/\rho w^2$ dans la sixième colonne. Ceci montre que les vitesses v d'un des cinq phénomènes sont aussi analogues aux pressions p d'un autre de ces phénomènes et réciproquement. Cette propriété de l'analogie est confirmée par le fait que v et p satisfont séparément à la même équation (3) ou (4).

¹ Le lecteur trouvera dans tous les traités classiques de Physique ou de Mécanique la démonstration des équations (1) et (2) pour les phénomènes en question. On retrouve d'ailleurs ces équations comme cas particuliers de celles que nous établirons au paragraphe suivant. Ceci nous dispense de donner plus de détails à leur sujet.

Nous avons choisi la vitesse v pour l'une des deux fonctions inconnues du problème. On pourrait utiliser, à la place, l'élongation $\xi \left(v = \frac{\partial \xi}{\partial t} \right)$. L'utilisation des fonctions inconnues p et v offre l'avantage de permettre l'application directe de la méthode graphique de Schnyder-Bergeron à tous ces phénomènes, comme l'a montré L. Bergeron dans son remarquable mémoire : « Méthode graphique générale de calcul des propagations d'ondes planes ». Société des Ingénieurs civils de France. Bulletin de juillet-août 1937.

TABLEAU 1.

Analogie dans le cas des caractéristiques constantes.

Signification des différentes grandeurs figurant dans les équations (1) et (2) pour les cinq phénomènes.

	Objet	x	t	v	p	ρ	w^2
		cm	sec.	cm.sec ⁻¹	dyne.cm ⁻² (barye)	gr.cm ⁻³	cm ² .sec ⁻²
1	Corde (vibrations transversales).	Abscisse d'un profil.	Temps	Vitesse d'un point de la corde.	Composante suivant la direction des vibrations, de la « traction de la corde par unité de surface ϵ ».	Masse spécifique de la matière constituant la corde.	$\frac{\epsilon}{\rho}$ quotient de la « traction de la corde par unité de surface ϵ », par la masse spécifique ρ .
2	Barre (vibrations longitudinales).	»	»	Vitesse des points d'un profil de la barre.	Tension normale agissant dans un profil.	Masse spécifique de la matière constituant la barre.	$\frac{E}{\rho}$ quotient du module d'élasticité E de la barre par la masse spécifique ρ .
3	Barre circulaire (vibrations de torsion).	»	»	Vitesse des points d'un profil situés à la distance 1 de l'axe.	Tension tangentielle agissant aux points d'un profil situés à la distance 1 de l'axe.	Masse spécifique de la matière constituant la barre.	$\frac{G}{\rho}$ quotient du module de cisaillement G de la barre par la masse spécifique ρ .
4	Conduite forcée circulaire (coups de bélier).	»	»	Vitesse du liquide dans la conduite.	Pression du liquide, évaluée à l'axe.	Masse spécifique du liquide dans la conduite.	$\frac{1}{\rho}$ ¹⁾ $\frac{1}{\epsilon_0} + \frac{1}{E} \cdot \frac{D}{e}$
5	Canal découvert (ondes de translation).	»	»	Vitesse du liquide dans le canal.	Pression du liquide, évaluée à un niveau déterminé.	Masse spécifique du liquide dans le canal.	$\frac{g \cdot H}{\rho}$ produit de l'accélération de la pesanteur g par la profondeur moyenne H du canal.
	1	2	3	4	5	6	7

¹⁾ ϵ_0 désigne le coefficient de compressibilité du liquide, D le diamètre de la conduite, e l'épaisseur des parois et E leur module d'élasticité.

§ 2. Systèmes d'équations régissant les cinq phénomènes dans le cas des caractéristiques variables.

Nous établirons successivement ces cinq systèmes.

1° Vibrations transversales d'une corde hétérogène soumise à une traction variable.

Soit une corde hétérogène animée de vibrations transversales autour d'une position d'équilibre rectiligne. Choisissons un système cartésien rectangulaire x, y dans le plan du mouvement, l'axe des x coïncidant avec la corde à l'état de repos (fig. 1). Désignons par x, y les coordonnées d'un point quelconque P , par $x + dx$, $y + dy$ celles d'un point infiniment voisin Q . Soit F

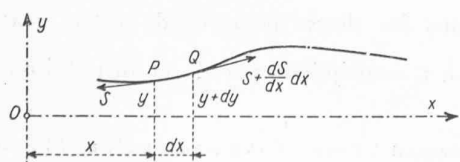


Fig. 1. — Vibrations transversales d'une corde hétérogène soumise à une traction variable.

l'aire du profil, ρ la masse spécifique ; ces deux grandeurs sont des fonctions connues de x .

Nous ferons au sujet du mouvement les mêmes hypothèses que pour les cordes homogènes de traction constante : 1° la vibration transversale est infiniment petite : P se déplace très peu sur une parallèle à y ; 2° l'angle que fait la tangente en P avec l'axe x est infiniment petit quel que soit le temps t .

On déduit immédiatement de ces hypothèses que $PQ = dx$ (aux infiniment petits du troisième ordre près) : la longueur d'un élément quelconque de corde reste constante pendant le mouvement. D'autre part, la composante de l'accélération de PQ suivant x est nulle. La traction est donc indépendante du temps mais peut dépendre de x . Soit S sa valeur en P . En Q elle sera $S + \frac{dS}{dx} dx$. Remarquons que les angles de la tangente avec l'axe x , en P et Q , sont respectivement $\frac{dy}{dx}$ et $\frac{dy}{dx} + \frac{d}{dx} \left(\frac{dy}{dx} \right) dx$.

La somme des projections, sur l'axe y , des forces agis-

sant sur l'élément PQ est, aux infiniment petits d'ordres supérieurs près :

$$\left(S + \frac{dS}{dx} dx \right) \left[\frac{\partial y}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial y}{\partial x} \right) dx \right] - S \frac{\partial y}{\partial x} = \left(S \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + \frac{dS}{dx} \frac{\partial y}{\partial x} \right) dx,$$

d'où l'équation du mouvement :

$$\underbrace{\rho F dx}_{\text{masse}} \underbrace{\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}}_{\text{accélération}} = \underbrace{\left(S \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + \frac{dS}{dx} \frac{\partial y}{\partial x} \right)}_{\text{force}} dx,$$

ou bien

$$\rho \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - \frac{1}{F} \cdot \frac{\partial}{\partial x} \left(S \frac{\partial y}{\partial x} \right) = 0. \quad (1)$$

Posons encore

$$\epsilon = \frac{S}{F} \quad \text{et} \quad \tau = -\epsilon \frac{\partial y}{\partial x}.$$

ϵ est la traction par unité de surface du profil. C'est une tension. Elle ne dépend que de x , car S et F sont uniquement fonctions de cette variable. τ est la composante de la tension ϵ suivant la direction y . Cette composante dépend de x et t . Nous avons la relation

$$F\tau = -S \frac{\partial y}{\partial x}.$$

L'équation du mouvement ou « équation dynamique » peut alors s'écrire, en remarquant que $\frac{\partial y}{\partial t} = v$ (vitesse d'un point de la corde) :

$$\rho \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{1}{F} \cdot \frac{\partial}{\partial x} (F\tau) = 0. \quad (5)$$

Dérivons d'autre part les deux membres de la relation $\tau = -\epsilon \frac{\partial y}{\partial x}$ par rapport à t , multiplions par $\frac{\rho}{\epsilon}$ et introduisons $\frac{\partial y}{\partial t} = v$. On obtient

$$\frac{1}{\left(\frac{\epsilon}{\rho} \right)} \frac{\partial \tau}{\partial t} + \rho \frac{\partial v}{\partial x} = 0. \quad (6)$$

Cette relation peut être appelée « équation de continuité ».

Les vibrations transversales d'une corde hétérogène soumise à une traction variable sont donc régies par le système :

$\rho \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{1}{F} \cdot \frac{\partial}{\partial x} (F\tau) = 0 \quad (\text{équation dynamique}) \quad (5)$
$\frac{1}{\left(\frac{\epsilon}{\rho} \right)} \frac{\partial \tau}{\partial t} + \rho \frac{\partial v}{\partial x} = 0 \quad (\text{équation de continuité}) \quad (6)$

où v , τ sont des fonctions inconnues des variables indépendantes x , t ; ρ , F , ϵ sont des fonctions données de x .

¹ Nous avons déjà établi cette équation dans un mémoire intitulé : « Les vibrations transversales des cordes pesantes verticales ». *Schweizerische Bauzeitung* des 20 novembre et 4 décembre 1943. En faisant $\mu = \rho \cdot F$ dans l'équation (3) de ce mémoire, on obtient l'équation ci-dessus.

2° Vibrations longitudinales d'une barre hétérogène d'axe rectiligne et de profil variable.

Soit une barre hétérogène d'axe rectiligne, animée de vibrations planes parallèles à l'axe. Désignons par x l'abscisse d'un profil quelconque à l'état de repos, par $x + dx$ celle d'un profil infiniment voisin (fig. 2). Soit

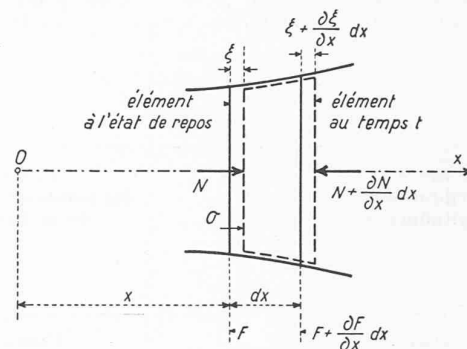


Fig. 2. — Vibrations longitudinales d'une barre hétérogène d'axe rectiligne et de profil variable.

F l'aire du profil, ρ la masse spécifique et E le module d'élasticité de la barre. Ces trois grandeurs sont des fonctions données de x .

Soit encore, à l'époque t pendant le mouvement, N la résultante des pressions normales σ relatives au profil x ¹, ξ le déplacement infiniment petit des points de ce profil.

L'équation dynamique s'écrit :

$$\underbrace{\rho F dx}_{\text{masse}} \underbrace{\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}}_{\text{accélération}} = \underbrace{-\frac{\partial N}{\partial x} dx}_{\text{force}},$$

ou bien

$$\rho \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} + \frac{1}{F} \cdot \frac{\partial N}{\partial x} = 0.$$

Remplaçons $\frac{\partial \xi}{\partial t}$ par v (vitesse des points du profil x au temps t) et N par $F\sigma$, il vient :

$$\rho \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{1}{F} \cdot \frac{\partial}{\partial x} (F\sigma) = 0. \quad (7)$$

D'autre part, la loi de Hook donne

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} dx = -\frac{\sigma}{E} dx.$$

Dérivons les deux membres de cette relation par rapport à t , multiplions par $\frac{\rho}{dx}$ et introduisons $\frac{\partial \xi}{\partial t} = v$.

¹ Contrairement à l'usage, N et σ seront considérés ici comme positifs s'il s'agit d'une pression, négatifs dans le cas d'une traction. Nous supposons la variation des profils suffisamment faible pour que σ ne varie pas d'un point à l'autre d'un même profil.

On obtient l'équation de continuité suivante :

$$\frac{1}{\left(\frac{E}{\rho}\right)} \frac{\partial \sigma}{\partial t} + \rho \frac{\partial v}{\partial x} = 0. \quad (8)$$

Les vibrations longitudinales d'une barre hétérogène d'axe rectiligne et de profil variable sont donc régies par le système :

$$\begin{cases} \rho \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{1}{F} \frac{\partial}{\partial x} (F\sigma) = 0 & \text{(équation dynamique)} \\ \frac{1}{\left(\frac{E}{\rho}\right)} \frac{\partial \sigma}{\partial t} + \rho \frac{\partial v}{\partial x} = 0 & \text{(équation de continuité)} \end{cases} \quad (7) \quad (8)$$

où v , σ sont des fonctions inconnues des variables indépendantes x , t ; ρ , F , E sont des fonctions données de x .

3° Vibrations de torsion d'une barre hétérogène d'axe rectiligne et de profil circulaire variable.

Soit une barre hétérogène de profil circulaire (corps de rotation), animée de vibrations de torsion. Désignons par x l'abscisse d'un profil quelconque, par $x + dx$ celle d'un profil infiniment voisin (fig. 3). Soit J le moment

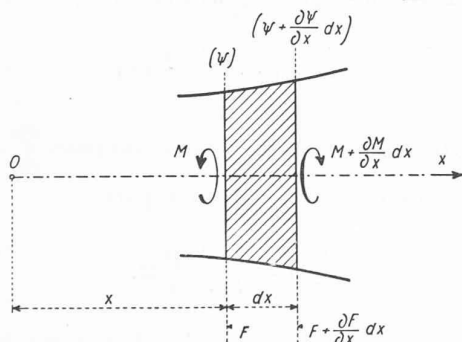


Fig. 3. — Vibrations de torsion d'une barre hétérogène d'axe rectiligne et de profil circulaire variable.

d'inertie polaire du profil par rapport à son centre de gravité (intersection avec l'axe), ρ la masse spécifique et G le module de cisaillement. Ces trois grandeurs sont des fonctions données de x .

Soit encore, à l'époque t pendant le mouvement, M le moment de torsion relatif au profil x , Ψ la rotation infiniment petite de ce profil mesurée à partir de l'état de repos.

L'équation dynamique s'écrit :

$$\underbrace{\rho J dx}_{\text{moment d'inertie de l'élément dx par rapport à x}} \underbrace{\frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2}}_{\text{accélération angulaire}} = - \underbrace{\frac{\partial M}{\partial x} dx}_{\text{moment résultant}}$$

ou bien

$$\rho \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} + \frac{1}{J} \frac{\partial M}{\partial x} = 0.$$

Remplaçons $\frac{\partial \Psi}{\partial t}$ par v (vitesse des points du profil x situés à la distance 1 de l'axe) et M par $J \cdot \tau$, il vient :

$$\rho \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{1}{J} \frac{\partial}{\partial x} (J \cdot \tau) = 0. \quad (9)$$

τ est la tension tangentielle agissant à la distance 1 de l'axe¹.

D'autre part, la loi de Hook donne

$$\frac{\partial \Psi}{\partial x} dx = - \frac{M}{J \cdot G} dx.$$

Remplaçons $\frac{M}{J}$ par τ , dérivons les deux membres de cette relation par rapport à t , multiplions par $\frac{\rho}{dx}$ et introduisons $\frac{\partial \Psi}{\partial t} = v$. On obtient l'équation de continuité suivante :

$$\left(\frac{1}{G}\right) \frac{\partial \tau}{\partial t} + \rho \frac{\partial v}{\partial x} = 0. \quad (10)$$

Les vibrations de torsion d'une barre hétérogène d'axe rectiligne et de profil circulaire variable sont donc régies par le système :

$$\begin{cases} \rho \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{1}{J} \frac{\partial}{\partial x} (J \tau) = 0 & \text{(équation dynamique)} \\ \left(\frac{1}{G}\right) \frac{\partial \tau}{\partial t} + \rho \frac{\partial v}{\partial x} = 0 & \text{(équation de continuité)} \end{cases} \quad (9) \quad (10)$$

où v , τ sont des fonctions inconnues des variables indépendantes x , t ; ρ , J , G sont des fonctions données de x .

4° Mouvements non permanents d'un liquide dans une conduite forcée à caractéristiques variables le long de l'axe (coups de bélier)².

Soit une conduite de section circulaire contenant un liquide en mouvement, par exemple de l'eau (fig. 4a). Nous admettrons qu'elle satisfasse aux conditions suivantes :

- 1° son axe est rectiligne ou de faible courbure ;
- 2° le diamètre $D = 2r$ est une fonction continue de l'abscisse x mesurée le long de l'axe ;
- 3° l'épaisseur e et le module d'élasticité E des parois sont constants pour une section donnée, mais sont des fonctions continues de x ;
- 4° l'angle $\frac{dr}{dx}$ que forme le profil longitudinal avec l'axe est petit par rapport à 1.

¹ Nous supposons la variation des profils suffisamment lente pour que la formule $\tau = \frac{M}{J} \cdot 1$ soit applicable.

² Nous avons déjà indiqué ces équations dans un mémoire intitulé : « Théorie des coups de bélier dans les conduites à caractéristiques linéairement variables le long de l'axe ». *Revue générale de l'hydraulique*, nos 19 à 24, Paris, 1938. Ce sont les équations (1) et (2) de ce mémoire, où v doit être remplacé par $-v$.

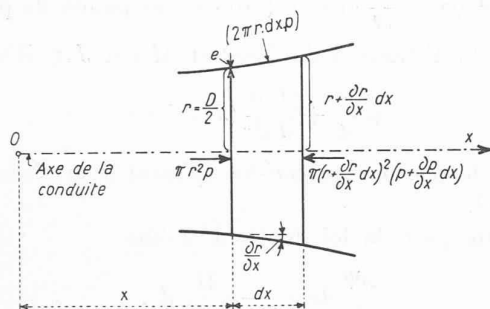


Fig. 4 a. — Tronçon élémentaire d'une conduite à caractéristiques variant d'une façon continue le long de l'axe.

Le mouvement du liquide dans la conduite est donc « graduellement varié » (dans le sens attribué par Bousinesq à cette expression).

Les variations de pression constituant le phénomène du coup de bélier proviennent de l'inertie du liquide et des élasticités combinées de ce dernier et des parois. La pesanteur ne joue aucun rôle dans le phénomène. Nous établirons donc les équations en supposant l'axe de la conduite rectiligne et horizontal. Les résultats que nous obtiendrons seront évidemment valables pour une conduite d'axe quelconque, de faible courbure ou rectiligne, incliné ou non.

Equation dynamique. Désignons par :

p et v la pression à l'axe et la vitesse moyenne de l'eau, au temps t , au profil d'abscisse x (le sens des vitesses positives coïncide avec la direction positive de l'axe des x) ;

ρ la masse spécifique du liquide.

Considérons la masse d'eau comprise entre deux profils voisins d'abscisses x et $x + dx$; écrivons l'équation du mouvement relative à l'axe :

$$\underbrace{\rho \pi r^2 dx}_{\text{masse}} \underbrace{\left(\frac{\partial v}{\partial x} v + \frac{\partial v}{\partial t} \right)}_{\text{accélération}} = \underbrace{\pi r^2 p - \pi \left(r + \frac{\partial r}{\partial x} dx \right)^2 \left(p + \frac{\partial p}{\partial x} dx \right) + 2 \pi r dx p \frac{\partial r}{\partial x}}_{\text{force}} \quad (12')$$

D'où, en effectuant les calculs et en négligeant les infiniment petits d'ordres supérieurs :

$$\frac{\partial v}{\partial x} v + \frac{\partial v}{\partial t} = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}.$$

Comme $\frac{\partial v}{\partial x} v$ est toujours très petit par rapport à $\frac{\partial v}{\partial t}$, le membre de gauche se réduit à son second terme (cette hypothèse simplificatrice, justifiée par l'expérience dans le cas d'un diamètre constant, est valable ici pour les mêmes raisons).

L'équation dynamique est finalement

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = 0. \quad (12')$$

¹ Nous négligeons les frottements du liquide.

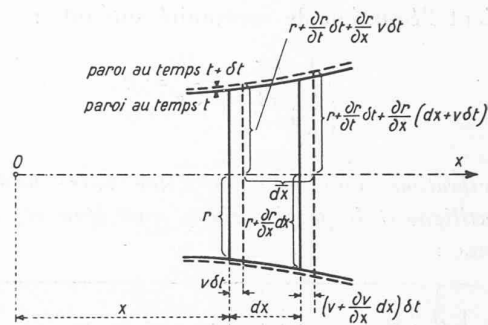


Fig. 4 b. — Mouvements non-permanents d'un liquide dans une conduite forcée à caractéristiques variables le long de l'axe.

Cette équation est la même que lorsque D , e , E sont constants le long de l'axe.

Equation de continuité. Considérons la masse liquide qui, au temps t , est comprise entre les profils x et $x + dx$. Au temps $t + dt$, cette masse se sera déformée comme l'indique la figure 4b (trait interrompu).

Nous désignerons, au temps $t + dt$, la longueur de l'élément considéré par \bar{dx} et la masse spécifique de l'eau par $\bar{\rho}$. Soit encore ϵ_0 le coefficient de compressibilité du liquide ; \bar{dx} et $\bar{\rho}$ ont pour expressions :

$$\bar{dx} = dx - v dt + \left(v + \frac{\partial v}{\partial x} dx \right) dt = \left(1 + \frac{\partial v}{\partial x} dt \right) dx,$$

$$\bar{\rho} = \rho \left(1 + \frac{1}{\epsilon_0} \frac{\partial p}{\partial t} dt \right),$$

(dans cette dernière, nous avons supposé $\frac{\partial p}{\partial x} v$ négligeable par rapport à $\frac{\partial p}{\partial t}$) ; d'autre part

$$\frac{\partial r}{\partial t} dt = \frac{1}{E} \frac{r^2}{e} \frac{\partial p}{\partial t} dt.$$

L'équation de continuité exprime le fait que la masse de l'élément considéré est, au temps $t + dt$, la même qu'au temps t :

$$\underbrace{\rho \pi \left[\frac{r + \left(r + \frac{\partial r}{\partial x} dx \right)}{2} \right]^2 dx}_{\text{masse au temps } t} = \underbrace{\bar{\rho} \pi \left[\frac{\left\{ r + \frac{\partial r}{\partial t} dt + \frac{\partial r}{\partial x} v dt \right\} + \left\{ r + \frac{\partial r}{\partial t} dt + \frac{\partial r}{\partial x} (dx + v dt) \right\}}{2} \right]^2 \bar{dx}}_{\text{masse au temps } t + dt}.$$

Remplaçons \bar{dx} , $\bar{\rho}$ et $\frac{\partial r}{\partial t} dt$ par les expressions trouvées plus haut, effectuons les opérations en négligeant les infiniment petits d'ordres supérieurs. On obtient :

$$\left(\frac{1}{\epsilon_0} + \frac{1}{E} \frac{D}{e} \right) \frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{2}{r} \frac{\partial r}{\partial x} v = 0.$$

Remarquons encore que

$$\frac{1}{F} \frac{\partial F}{\partial x} = \frac{2}{r} \frac{\partial r}{\partial x}, \quad \text{où} \quad F = \pi r^2 \quad \text{et posons}$$

$$a = \sqrt{\frac{\frac{1}{\rho}}{\frac{1}{\epsilon_0} + \frac{1}{E} \cdot \frac{D}{e}}};$$

nous obtenons finalement l'équation de continuité suivante :

$$\frac{1}{\rho a^2} \frac{\partial p}{\partial t} + \frac{1}{F} \frac{\partial}{\partial x} (Fv) = 0. \quad (11)$$

Les mouvements non permanents d'un liquide dans une conduite forcée à caractéristiques variables le long de l'axe sont donc régis par le système¹ :

$$\frac{1}{\rho a^2} \frac{\partial p}{\partial t} + \frac{1}{F} \frac{\partial}{\partial x} (Fv) = 0 \quad (\text{équation de continuité}) \quad (11)$$

$$\frac{1}{a^2} \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{1}{\rho a^2} \frac{\partial p}{\partial x} = 0 \quad (\text{équation dynamique}) \quad (12)$$

où p , v sont des fonctions inconnues des variables indépendantes x , t ; ρ , F , a sont des fonctions données de x .² (A suivre.)

Notes sur

Jean-Rodolphe Perronet

à l'occasion du 150^{me} anniversaire de sa mort,

par J.-P. DAXELHOFER, ingénieur.

I. Un grand constructeur d'origine vaudoise.

Il y a cent cinquante ans, mourait à Paris, à l'âge de quatre-vingt-six ans, Jean-Rodolphe Perronet, un des plus grands ingénieurs de tous les temps. Comme il est plutôt rare que l'on rende hommage aux grands constructeurs dont les œuvres défient souvent les siècles mais dont les noms s'estompent vite dans la mémoire des hommes, nous pensons qu'il est juste de rappeler celui de Perronet, qui bouleversa les conceptions de son époque en ce qui concerne la construction des ponts et dont les réalisations firent l'admiration de ses contemporains tant par leur hardiesse que par leurs belles proportions. Ce fut, comme nous le verrons, un novateur dans bien des domaines, un magnifique organisateur et réalisateur. Comme tel, ses écrits demeurent intéressants à plus d'un titre. Mais ce qui doit nous rendre sa mémoire plus chère et ce qui devrait rendre son nom plus familier dans notre pays, c'est qu'il en était originaire.

¹ Pour obtenir l'équation (12), nous avons divisé les deux termes de (11) par a^2 . Ceci est nécessaire pour l'analogie, comme nous le verrons plus loin. C'est dans le même but que nous avons écrit l'équation de continuité avant l'équation dynamique.

² ρ sera en général une constante. Toutefois, pour de très grandes chutes d'eau, la masse spécifique croît légèrement de haut en bas de la conduite.

Le hasard d'une lecture, nous a, en effet, mis sous les yeux un document fort significatif. Voici comment J.-R. Perronet s'exprime lui-même dans une lettre de sa main adressée le 7 août 1783 — il avait alors septante-cinq ans et était au faite des honneurs — à M. Reyter, à Berne (fig. 1) :

Monsieur et bon ami,

.....

Vous trouverez, Monsieur, dans la même caisse, un second exemplaire que je vous prie de vouloir bien présenter de ma part à LL. EE. les Seigneurs du Canton de Berne. Je les supplie de vouloir bien l'accepter pour leur Bibliothèque comme un hommage inspiré par la sagesse de leur gouvernement, et à l'avantage que j'ai d'en être originaire, mon père étant né à Château-d'Ex.

Je suis avec un sincère attachement, Monsieur et bon ami, votre très humble et très obéissant serviteur.

PERRONET.

Ainsi, Perronet, alors Premier Ingénieur des Ponts et Chaussées de France, Chevalier de l'ordre de Saint-Michel, Membre des Académies des sciences de Paris et de Stockholm, de la Société Royale de Londres, etc., n'avait pas oublié son pays d'origine et lui faisait hommage d'une magnifique édition de ses œuvres complètes.

Et nous avons effectivement retrouvé que sa famille était bourgeoise de Vevey et d'Aigle depuis le XVI^e siècle et que son père, né à Château-d'Ex, fut officier suisse au service de France¹.

C'est pourquoi nous voulons rappeler brièvement les principales étapes de sa vie :

Il naquit à Suresnes, près de Paris, le 25 octobre 1708. Son père meurt quand il est encore jeune. A quinze ans, un ami de son père, le Maréchal Berchiny, détermine sa mère à le faire

¹ L'Historisches-biographisches Lexikon der Schweiz 1929 ne consacre que huit lignes à sa famille. — Lesage-Notice pour servir à l'éloge de Perronet-1805 indique à tort que sa famille est « originaire de Lauzanne ». — Dans « Männer der Technik » de Matschoss 1925, V. D. I. Verlag, Perronet n'est même pas mentionné !

Bien présentée de ma part à LL. EE. —
 Les Seigneurs du Canton de Berne.
 Je les supplie de vouloir bien l'accepter
 pour leur Bibliothèque comme un
 hommage inspiré par la sagesse
 de leur Gouvernement, et à l'avantage
 que j'ai d'en être originaire, mon père
 étant né à Château d'Ex.
 Je suis avec un sincère attachement
 Monsieur et bon ami, Votre très humble
 et très obéissant serviteur.
 Perronet

Fig. 1. — Fin de la lettre autographe adressée par Perronet à M. Reyter à Berne, en date du 7 août 1783,

Dcc. Bibl. cantonale de Lausanne.