

# Contribution à l'étude des plaques obliques

Autor(en): **Favre, Henry**

Objektyp: **Article**

Zeitschrift: **Bulletin technique de la Suisse romande**

Band (Jahr): **68 (1942)**

Heft 20

PDF erstellt am: **26.09.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-51822>

## **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

## **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

# BULLETIN TECHNIQUE

## DE LA SUISSE ROMANDE

### ABONNEMENTS :

Suisse : 1 an, 13.50 francs  
Etranger : 16 francs

Pour sociétaires :

Suisse : 1 an, 11 francs  
Etranger : 13.50 francs

Prix du numéro :  
75 centimes.

Pour les abonnements  
s'adresser à la librairie  
F. Rouge & C<sup>ie</sup>, à Lausanne.

Paraissant tous les 15 jours

Organe de la Société suisse des ingénieurs et des architectes, des Sociétés vaudoise et genevoise des ingénieurs et des architectes, de l'Association des anciens élèves de l'Ecole d'ingénieurs de l'Université de Lausanne et des Groupes romands des anciens élèves de l'Ecole polytechnique fédérale.

COMITÉ DE PATRONAGE. — Président : R. NEESER, ingénieur, à Genève ; Vice-président : M. IMER, à Genève ; secrétaire : J. CALAME, ingénieur, à Genève. Membres : *Fribourg* : MM. L. HERTLING, architecte ; A. ROSSIER †, ingénieur ; *Vaud* : MM. F. CHENAUX, ingénieur ; E. ELSKES, ingénieur ; EPITAUX, architecte ; E. JOST, architecte ; A. PARIS, ingénieur ; CH. THÉVENAZ, architecte ; *Genève* : MM. L. ARCHINARD, ingénieur ; E. ODIER, architecte ; *Neuchâtel* : MM. J. BÉGUIN, architecte ; R. GUYE, ingénieur ; A. MÉAN, ingénieur ; *Valais* : M. J. DUBUIS, ingénieur ; A. DE KALBERMATTEN, architecte.

RÉDACTION : D. BONNARD, ingénieur, Case postale Chauderon 475, LAUSANNE.

Publicité :  
TARIF DES ANNONCES

Le millimètre  
(larg. 47 mm.) 20 cts.  
Tarif spécial pour fractions  
de pages.

Rabais pour annonces  
répétées.



ANNONCES-SUISSES S.A.  
5, Rue Centrale,  
LAUSANNE  
& Succursales.

CONSEIL D'ADMINISTRATION DE LA SOCIÉTÉ ANONYME DU BULLETIN TECHNIQUE  
A. STUCKY, ingénieur, président ; M. BRIDEL ; G. EPITAUX, architecte ; M. IMER.

SOMMAIRE : *Contribution à l'étude des plaques obliques*, par HENRY FAVRE, professeur à l'Ecole polytechnique fédérale, Zurich. — *L'extension de l'usine hydroélectrique de l'Oelberg*, par BEDA HEFTI, ingénieur-conseil, Fribourg. — DIVERS : *L'inauguration du nouveau bateau « Léman » de la Compagnie générale de navigation*. — BIBLIOGRAPHIE. — COMMUNIQUÉ : *Congrès des urbanistes suisses à Neuchâtel, les 9, 10 et 11 octobre 1942*. — SERVICE DE PLACEMENT.

## Contribution à l'étude des plaques obliques

par HENRY FAVRE,  
professeur à l'Ecole polytechnique fédérale, Zurich.<sup>1</sup>

Les plaques sollicitées à la flexion et limitées par un cercle, une ellipse ou un rectangle ont été l'objet de nombreuses études théoriques. On rencontre cependant aussi, dans la pratique, des plaques dont le contour est un parallélogramme. Elles sont appelées « obliques » pour les distinguer de la forme rectangulaire.

Le problème de la flexion des plaques obliques n'a tenté, jusqu'ici, que de rares théoriciens<sup>2</sup>. Cela est certainement dû au fait que, si l'on utilise des coordonnées rectangulaires, les conditions aux limites sont moins simples à exprimer pour un parallélogramme que pour un rectangle.

Le but de ce mémoire est double.

Il est tout d'abord destiné à établir les principales équations régissant l'équilibre de la plaque limitée par un parallélogramme, en utilisant un système de *coordonnées cartésiennes obliques*, dont deux des axes sont paral-

<sup>1</sup> Nous sommes heureux de pouvoir aujourd'hui offrir à nos lecteurs cette remarquable étude. Cette dernière a paru en juillet et août derniers dans la *Schweizerische Bauzeitung*, qui a bien voulu nous autoriser à la reproduire et a mis aimablement à notre disposition les clichés des figures. (Réd.).

<sup>2</sup> *Brigatti, C. V.* : Applicazione del metodo di H. Marcus al calcolo della piastra parallelogrammica. *Ric. Ingegn.* 6, 1938.

*Anzeliuss, A.* : Ueber die elastische Deformation parallelogramm-förmiger Platten. *Bauingenieur* 20, 1939.

*Vogt, H.* : Die Berechnung schiefwinkliger Platten und platten-artiger Brückensysteme. *Dissertation der Technischen Hochschule Hannover*, 1940.

lèles aux côtés du parallélogramme et le troisième perpendiculaire à son plan. C'est le système le mieux adapté à la forme de plaque considérée. Il permet d'exprimer les conditions au contour avec la même commodité que les coordonnées rectangulaires le permettent dans le cas du rectangle, ce qui est un grand avantage pour les recherches théoriques.

En outre ce mémoire présente, comme application, une méthode approchée pour le calcul de la plaque oblique encastrée, à charge uniformément répartie.

### 1. Rappel des principales équations de la théorie des plaques, en coordonnées cartésiennes rectangulaires.

Considérons une plaque d'épaisseur  $h$ , sollicitée par des forces extérieures perpendiculaires aux faces et posée ou encastrée le long du pourtour<sup>1</sup> (fig. 1). Choisissons un système cartésien rectangulaire fixe  $Oxyz$ , les axes  $x, y$  étant situés dans le plan équidistant des faces, avant la déformation. Soit  $z_0 = \overline{PP'}$  le déplacement, parallèle à  $z$ , d'un point  $P(x, y)$  de ce plan. Le lieu des points  $P'(x, y, z_0)$  est la « surface élastique ».

On démontre, dans la théorie des plaques, que les tensions  $\sigma_x, \dots, \tau_{xy}, \dots$  en un point  $(xyz)$  sont liées aux déformations par les relations suivantes<sup>2</sup> :

<sup>1</sup> Une plaque est le solide découpé, dans un prisme ou un cylindre, par deux plans perpendiculaires aux arêtes et dont la distance, mesurant l'épaisseur de la plaque, est relativement petite par rapport aux autres dimensions. Les bases de ce solide constituent les « faces » de la plaque. Comme l'épaisseur est petite, on assimile souvent les faces latérales à une ligne qui est le « pourtour » ou « contour » de la plaque.

<sup>2</sup> Voir par exemple : *A. et L. Föppl*, *Drang und Zwang*. Oldenbourg, Munich et Berlin 1941, p. 126 et suiv.

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= -\frac{E}{1-\nu^2} z \left( \frac{\partial^2 \zeta_0}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 \zeta_0}{\partial y^2} \right), \\ \sigma_y &= -\frac{E}{1-\nu^2} z \left( \frac{\partial^2 \zeta_0}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 \zeta_0}{\partial x^2} \right), \\ \tau_{xy} &= -\frac{E}{1+\nu} z \frac{\partial^2 \zeta_0}{\partial x \partial y}, \\ \sigma_z &= \tau_{yz} = \tau_{zx} = 0; \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

où  $E$  désigne le module d'élasticité et  $\nu = \frac{1}{m}$  le coefficient de Poisson.

Les formules (1) permettent de calculer les tensions dès que l'on connaît  $\zeta_0(x, y)$ . Cette fonction doit 1° satisfaire à l'équation aux dérivées partielles du quatrième ordre :

$$\Delta \Delta \zeta_0 = \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \left( \frac{\partial^2 \zeta_0}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \zeta_0}{\partial y^2} \right) = \frac{12(1-\nu^2)}{E h^3} p, \quad (2)$$

$p(x, y)$  étant la charge par unité de surface ; 2° remplir les conditions au contour.

Le travail intérieur de déformation est donné par l'intégrale double suivante, étendue à la surface  $F$  de la plaque :

$$A = \frac{E h^3}{24(1-\nu^2)} \iint_{(F)} \left\{ \left( \frac{\partial^2 \zeta_0}{\partial x^2} \right)^2 + \left( \frac{\partial^2 \zeta_0}{\partial y^2} \right)^2 + 2\nu \frac{\partial^2 \zeta_0}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \zeta_0}{\partial y^2} + 2(1-\nu) \left( \frac{\partial^2 \zeta_0}{\partial x \partial y} \right)^2 \right\} dF. \quad (3)$$

Le principe des travaux virtuels s'écrit, pour une déformation définie par une variation  $\delta \zeta_0$  de  $\zeta_0$  qui satisfait aux conditions imposées au contour :

$$\iint_{(F)} p \delta \zeta_0 dF - \delta A = 0 \quad (4)$$

2. Principales équations de la théorie des plaques, en coordonnées cartésiennes obliques.

Pour établir ces équations, nous utiliserons les relations (1) à (4) et ferons un changement de coordonnées.

Soit  $x, y, z$  le système précédemment défini. Nous introduisons un second système  $u, v, z$  tel que les axes  $u, z$  coïncident respectivement avec  $x, z$ , l'axe  $v$  étant situé dans le plan  $x, y$  et faisant l'angle  $\alpha$  avec  $u$  (fig. 2).

Les formules de transformation sont (fig. 3) :

$$x = u + v \cos \alpha, \quad y = v \sin \alpha, \quad z = z; \quad (5)$$

d'où :

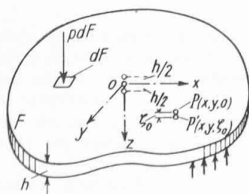


Fig. 1

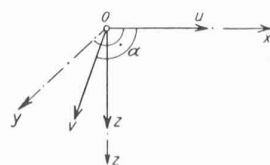


Fig. 2

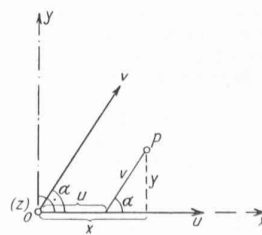


Fig. 3

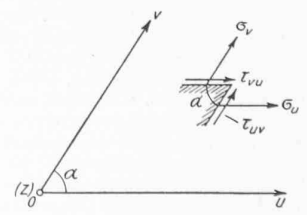


Fig. 4

SBZ

$$u = x - \frac{y}{\operatorname{tg} \alpha}, \quad v = \frac{y}{\sin \alpha}; \quad (6)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 1, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\operatorname{tg} \alpha}, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{1}{\sin \alpha}.$$

Remarquons que  $\zeta_0$  peut être considéré comme fonction composée des variables indépendantes  $x, y$  :

$$\zeta_0 = \zeta_0[u(x, y), v(x, y)],$$

d'où les formules de transformation suivantes :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \zeta_0}{\partial x} &= \frac{\partial \zeta_0}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial \zeta_0}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial \zeta_0}{\partial u} 1 + \frac{\partial \zeta_0}{\partial v} 0, \\ \frac{\partial \zeta_0}{\partial y} &= \frac{\partial \zeta_0}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial \zeta_0}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial \zeta_0}{\partial u} \left(-\frac{1}{\operatorname{tg} \alpha}\right) + \frac{\partial \zeta_0}{\partial v} \left(\frac{1}{\sin \alpha}\right), \end{aligned} \quad (7)$$

$$\frac{\partial \zeta_0}{\partial x} = \frac{\partial \zeta_0}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial \zeta_0}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial \zeta_0}{\partial u} \left(-\frac{1}{\operatorname{tg} \alpha}\right) + \frac{\partial \zeta_0}{\partial v} \left(\frac{1}{\sin \alpha}\right),$$

$$\frac{\partial \zeta_0}{\partial y} = -\frac{1}{\operatorname{tg} \alpha} \frac{\partial \zeta_0}{\partial u} + \frac{1}{\sin \alpha} \frac{\partial \zeta_0}{\partial v}. \quad (8)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \zeta_0}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial \zeta_0}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial u} \left( \frac{\partial \zeta_0}{\partial u} \right) = \frac{\partial^2 \zeta_0}{\partial u^2}, \\ \frac{\partial^2 \zeta_0}{\partial x^2} &= \frac{\partial^2 \zeta_0}{\partial u^2}. \end{aligned} \quad (9)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \zeta_0}{\partial y^2} &= \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial \zeta_0}{\partial y} \right) = \left( -\frac{1}{\operatorname{tg} \alpha} \frac{\partial}{\partial u} + \frac{1}{\sin \alpha} \frac{\partial}{\partial v} \right) \left( -\frac{1}{\operatorname{tg} \alpha} \frac{\partial \zeta_0}{\partial u} + \frac{1}{\sin \alpha} \frac{\partial \zeta_0}{\partial v} \right) \\ \frac{\partial^2 \zeta_0}{\partial y^2} &= \frac{1}{\operatorname{tg}^2 \alpha} \frac{\partial^2 \zeta_0}{\partial u^2} - \frac{2}{\sin \alpha \operatorname{tg} \alpha} \frac{\partial^2 \zeta_0}{\partial u \partial v} + \frac{1}{\sin^2 \alpha} \frac{\partial^2 \zeta_0}{\partial v^2}. \end{aligned} \quad (10)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \zeta_0}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial \zeta_0}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial u} \left( -\frac{1}{\operatorname{tg} \alpha} \frac{\partial \zeta_0}{\partial u} + \frac{1}{\sin \alpha} \frac{\partial \zeta_0}{\partial v} \right), \\ \frac{\partial^2 \zeta_0}{\partial x \partial y} &= -\frac{1}{\operatorname{tg} \alpha} \frac{\partial^2 \zeta_0}{\partial u^2} + \frac{1}{\sin \alpha} \frac{\partial^2 \zeta_0}{\partial u \partial v}. \end{aligned} \quad (11)$$

$$\Delta \zeta_0 = \frac{\partial^2 \zeta_0}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \zeta_0}{\partial y^2} = \frac{1}{\sin^2 \alpha} \left( \frac{\partial^2 \zeta_0}{\partial u^2} - 2 \cos \alpha \frac{\partial^2 \zeta_0}{\partial u \partial v} + \frac{\partial^2 \zeta_0}{\partial v^2} \right). \quad (12)$$

Compte tenu de (9), (10) et (11), les équations (1) s'écrivent, après quelques transformations :

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= -\frac{\nu E z}{(1-\nu^2)\sin^2\alpha} \left[ \left( \cos^2\alpha + \frac{1}{\nu}\sin^2\alpha \right) \frac{\partial^2 Z_0}{\partial u^2} - \right. \\ &\quad \left. - 2\cos\alpha \frac{\partial^2 Z_0}{\partial u \partial \nu} + \frac{\partial^2 Z_0}{\partial \nu^2} \right], \\ \sigma_y &= -\frac{\nu E z}{(1-\nu^2)\sin^2\alpha} \left[ \left( \frac{1}{\nu}\cos^2\alpha + \sin^2\alpha \right) \frac{\partial^2 Z_0}{\partial u^2} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{2}{\nu}\cos\alpha \frac{\partial^2 Z_0}{\partial u \partial \nu} + \frac{1}{\nu} \frac{\partial^2 Z_0}{\partial \nu^2} \right], \\ \tau_{xy} &= \frac{E z}{(1+\nu)\sin\alpha} \left( \cos\alpha \frac{\partial^2 Z_0}{\partial u^2} - \frac{\partial^2 Z_0}{\partial u \partial \nu} \right), \\ \sigma_z &= \tau_{yz} = \tau_{zx} = 0. \end{aligned} \right\} (1')$$

L'équation (2) devient, en appliquant deux fois (12);

$$\frac{1}{\sin^4\alpha} \left( \frac{\partial^2}{\partial u^2} - 2\cos\alpha \frac{\partial^2}{\partial u \partial \nu} + \frac{\partial^2}{\partial \nu^2} \right) \cdot \left( \frac{\partial^2 Z_0}{\partial u^2} - 2\cos\alpha \frac{\partial^2 Z_0}{\partial u \partial \nu} + \frac{\partial^2 Z_0}{\partial \nu^2} \right) = \frac{12(1-\nu^2)p}{Eh^3}$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^4 Z_0}{\partial u^4} + \frac{\partial^4 Z_0}{\partial \nu^4} - 4\cos\alpha \left( \frac{\partial^4 Z_0}{\partial u^3 \partial \nu} + \frac{\partial^4 Z_0}{\partial u \partial \nu^3} \right) + \\ + 2(1+2\cos^2\alpha) \frac{\partial^4 Z_0}{\partial u^2 \partial \nu^2} = \frac{12(1-\nu^2)\sin^4\alpha p}{Eh^3} \end{aligned} \right\} (2')$$

Telle est l'équation différentielle de la surface élastique, en coordonnées obliques.

L'expression (3) du travail de déformation s'écrit, en remarquant que  $dF = \sin\alpha du d\nu$ :

$$\left. \begin{aligned} A &= \frac{Eh^3}{24(1-\nu^2)\sin^3\alpha} \iint_{(F)} \left\{ \left( \frac{\partial^2 Z_0}{\partial u^2} \right)^2 + \left( \frac{\partial^2 Z_0}{\partial \nu^2} \right)^2 + \right. \\ &\quad \left. + 2(\cos^2\alpha + \nu\sin^2\alpha) \frac{\partial^2 Z_0}{\partial u^2} \frac{\partial^2 Z_0}{\partial \nu^2} + \right. \\ &\quad \left. + 2[2\cos^2\alpha + (1-\nu)\sin^2\alpha] \left( \frac{\partial^2 Z_0}{\partial u \partial \nu} \right)^2 - \right. \\ &\quad \left. - 4\cos\alpha \left( \frac{\partial^2 Z_0}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 Z_0}{\partial \nu^2} \right) \frac{\partial^2 Z_0}{\partial u \partial \nu} \right\} dud\nu, \end{aligned} \right\} (3')$$

et le principe des travaux virtuels (4):

$$\sin\alpha \iint_{(F)} p \delta Z_0 du d\nu - \delta A = 0. \quad (4')$$

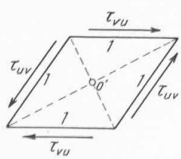


Fig. 5



Fig. 6

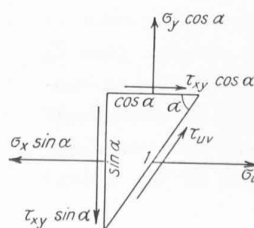


Fig. 7

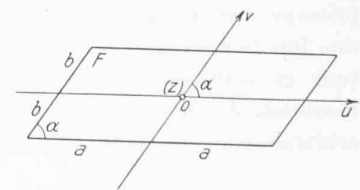


Fig. 8

Revenons au système (1'). Dans les seconds membres des trois premières équations ne figurent que les variables  $u, \nu, z$ . Par contre, dans tous les premiers membres, les indices des tensions sont encore  $x, y, z$ . Pour introduire les indices  $u, \nu, z$  définissons les *composantes des tensions en coordonnées obliques*.

A cet effet, soient deux éléments de surface respectivement parallèles aux axes  $u, z$  et  $\nu, z$  (fig. 4). En décomposant la tension totale, relative au premier élément, suivant les direction  $u$  et  $\nu$ , on obtient deux composantes que nous désignerons par  $\tau_{uv}$  et  $\sigma_v$ . De même, en décomposant la tension totale relative au second élément, on définit  $\sigma_u$  et  $\tau_{uv}$ .

Remarquons que  $\sigma_u$  et  $\sigma_v$  ne sont pas en général normales aux éléments de surface. Dans le cas particulier où  $\alpha = \frac{\pi}{2}$ , les nouvelles composantes des tensions coïncident avec les anciennes. On peut alors remplacer les indices  $u, \nu$  par  $x, y$ .

En appliquant le théorème des moments, par rapport à un axe  $O'$  parallèle à  $z$ , on voit que (fig. 5):

$$\tau_{uv} = \tau_{vu} \quad (13)$$

quel que soit  $\alpha$ .

Quant aux tensions  $\sigma_z, \tau_{yz}, \tau_{zx}$ , elles sont remplacées par  $\sigma_z, \tau_{vz}, \tau_{zu}$ , dont la définition est évidente. Les indices de chacune des tensions  $\tau_{vz}, \tau_{zu}$  peuvent également être permutés.

Cherchons les relations entre les nouvelles et les anciennes tensions. La comparaison des deux parties de la fig. 6 montre que :

$$\sigma_y = \sigma_v \sin\alpha, \quad \tau_{xy} = \tau_{uv} + \sigma_v \cos\alpha.$$

D'autre part, la somme des projections, sur l'axe  $u$ , des forces agissant sur l'élément de volume indiqué à la fig. 7 doit être nulle :

$$\sigma_u + \tau_{uv} \cos\alpha + \tau_{xy} \cos\alpha - \sigma_x \sin\alpha = 0.$$

Résolvant par rapport à  $\sigma_u, \sigma_v, \tau_{uv}$  le système constitué par les trois dernières équations, on obtient :

$$\left. \begin{aligned} \sigma_u &= \sin\alpha \sigma_x + \frac{\cos^2\alpha}{\sin\alpha} \sigma_y - 2\cos\alpha \tau_{xy}, \\ \sigma_v &= \frac{1}{\sin\alpha} \sigma_y, \quad \tau_{uv} = \tau_{xy} - \frac{1}{\tan\alpha} \sigma_y. \end{aligned} \right\}$$

Remplaçons finalement  $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$  par les valeurs (1'), nous obtenons les expressions des tensions obliques en fonction des déformations :

$$\begin{aligned}
 \sigma_u &= -\frac{Ez}{(1-\nu^2)\sin^3\alpha} \left[ \frac{\partial^2 \zeta_0}{\partial u^2} - 2\cos\alpha \frac{\partial^2 \zeta_0}{\partial u \partial \nu} + \right. \\
 &\quad \left. + (\cos^2\alpha + \nu \sin^2\alpha) \frac{\partial^2 \zeta_0}{\partial \nu^2} \right], \\
 \sigma_\nu &= -\frac{Ez}{(1-\nu^2)\sin^3\alpha} \left[ (\cos^2\alpha + \nu \sin^2\alpha) \frac{\partial^2 \zeta_0}{\partial u^2} - \right. \\
 &\quad \left. - 2\cos\alpha \frac{\partial^2 \zeta_0}{\partial u \partial \nu} + \frac{\partial^2 \zeta_0}{\partial \nu^2} \right], \\
 \tau_{uv} &= \frac{Ez}{(1-\nu^2)\sin^3\alpha} \left[ \cos\alpha \left( \frac{\partial^2 \zeta_0}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 \zeta_0}{\partial \nu^2} \right) + \right. \\
 &\quad \left. + \{ (1+\nu)\sin^2\alpha - 2 \} \frac{\partial^2 \zeta_0}{\partial u \partial \nu} \right], \\
 \sigma_z = \tau_{\nu z} = \tau_{zu} &= 0.
 \end{aligned} \tag{1''}$$

Les seconds membres de (1'') sont beaucoup plus symétriques que ceux de (1').

On retrouve (1) (2) (3) (4) en faisant  $\alpha = \frac{\pi}{2}$ ,  $u = x$ ,  $\nu = y$  dans les formules (1'') (2') (3') (4').

### 3. Application aux plaques obliques.

Soit une plaque dont le contour est un parallélogramme de côtés  $2a$  et  $2b$  faisant un angle  $\alpha$ . Choisissons, dans le plan équidistant des faces, le système  $u, \nu, z$  indiqué à la fig. 8. Les conditions au contour s'écriront sans difficulté, grâce au choix des coordonnées. Par exemple, dans les deux cas suivants, nous aurons :

(1°) plaque posée :

$$\left. \begin{aligned}
 \text{pour } u = \pm a : \zeta_0 = 0 \text{ et } \frac{\partial^2 \zeta_0}{\partial u^2} - 2\cos\alpha \frac{\partial^2 \zeta_0}{\partial u \partial \nu} = 0, \\
 \text{pour } \nu = \pm b : \zeta_0 = 0 \text{ et } \frac{\partial^2 \zeta_0}{\partial \nu^2} - 2\cos\alpha \frac{\partial^2 \zeta_0}{\partial u \partial \nu} = 0.
 \end{aligned} \right\} \tag{14}$$

(les conditions relatives aux dérivées secondes expriment que  $\sigma_u = 0$  pour  $u = \pm a$  et  $\sigma_\nu = 0$  pour  $\nu = \pm b$ , comme le montrent les deux premières formules (1'') en tenant compte de la condition  $\zeta_0 = 0$  le long du pourtour. On sait, depuis les travaux de Kirchhoff, qu'il n'est pas nécessaire d'annuler les tensions tangentielles le long du contour).

(2°) plaque encastrée :

$$\left. \begin{aligned}
 \text{pour } u = \pm a : \zeta_0 = 0 \text{ et } \frac{\partial \zeta_0}{\partial u} = 0, \\
 \text{pour } \nu = \pm b : \zeta_0 = 0 \text{ et } \frac{\partial \zeta_0}{\partial \nu} = 0.
 \end{aligned} \right\} \tag{15}$$

Si la charge  $p(u, \nu)$  est donnée, la solution rigoureuse du problème consistera à trouver l'unique intégrale de (2') satisfaisant aux conditions (14) ou (15)<sup>1</sup>.

Une méthode approchée résidera dans l'application du principe des travaux virtuels (4'). On choisira pour  $\zeta_0$  une fonction de  $u, \nu$  satisfaisant aux conditions au contour et contenant un certain nombre de coefficients inconnus. En donnant à ces coefficients des variations arbitraires on obtiendra, par application de (4'), autant

<sup>1</sup> On sait en effet que dans chaque cas déterminé le problème n'a qu'une solution (voir par exemple *Föppl*, loc. cit., p. 33. et suiv.).

d'équations qu'il y a de coefficients. Le principe de cette méthode a été donné par Ritz<sup>1</sup>. L'exactitude sera d'autant plus grande que la fonction choisie sera plus adéquate à représenter la surface élastique.

En général, cette méthode donnera des solutions dont l'approximation suffira à l'ingénieur<sup>2</sup>.

Supposons que les conditions au contour soient symétriques par rapport à l'axe  $z$  (c'est le cas de (14) ou (15)) et que l'on ait en outre

$$p(-u, -\nu) \equiv p(u, \nu), \tag{16}$$

c'est-à-dire que les charges soient également symétriques par rapport à cet axe : la surface élastique elle-même sera symétrique par rapport à  $z$ .

En effet, supposons qu'il existe une solution  $\zeta_0(u, \nu)$  asymétrique par rapport à cet axe. Changeons le sens des axes  $u, \nu$ , ce qui revient à les faire tourner de  $180^\circ$  dans leur plan. Cette solution sera alors représentée par la fonction  $\zeta_0(-u, -\nu)$  qui vérifiera la même équation (2'), puisque  $\alpha$  n'a pas changé et que  $p(-u, -\nu) \equiv p(u, \nu)$ . Cette fonction satisfera à des conditions au pourtour qui sont aussi les mêmes que précédemment, par raison de symétrie.

Or nous avons précisé que, pour des conditions au pourtour et des charges données, la solution de (2') est unique. Il faut donc nécessairement que

$$\zeta_0(-u, -\nu) \equiv \zeta_0(u, \nu) \tag{17}$$

ce qui justifie la proposition énoncée.

Voyons maintenant quelle est l'expression du travail de déformation d'une plaque oblique. Nous avons trouvé pour  $A$  l'expression générale (3'), valable pour un contour et des conditions d'appui quelconques.

Si la plaque a la forme d'un parallélogramme et si  $\zeta_0$  est nul le long du contour, cette expression se simplifie, car :

$$\iint_{(F)} \frac{\partial^2 \zeta_0}{\partial u^2} \frac{\partial^2 \zeta_0}{\partial \nu^2} du d\nu = \iint_{(F)} \left( \frac{\partial^2 \zeta_0}{\partial u \partial \nu} \right)^2 du d\nu. \tag{18}$$

En effet :

$$\begin{aligned}
 \iint_{(F)} \frac{\partial^2 \zeta_0}{\partial u^2} \frac{\partial^2 \zeta_0}{\partial \nu^2} du d\nu &= \int_{-b}^{+b} d\nu \int_{-a}^{+a} \frac{\partial^2 \zeta_0}{\partial \nu^2} \frac{\partial}{\partial u} \left( \frac{\partial \zeta_0}{\partial u} \right) du = \\
 &= \int_{-b}^{+b} d\nu \left\{ \left[ \frac{\partial^2 \zeta_0}{\partial \nu^2} \frac{\partial \zeta_0}{\partial u} \right]_{-a}^{+a} - \int_{-a}^{+a} \frac{\partial^2 \zeta_0}{\partial u} \frac{\partial^3 \zeta_0}{\partial u \partial \nu^2} du \right\} = -
 \end{aligned}$$

<sup>1</sup> W. Ritz : Theorie der Transversalschwingungen einer quadratischen platte mit freien Rändern, *Drude*, Ann. d. Physik 28, p. 737, 1909.

<sup>2</sup> Une autre méthode approchée consistera à utiliser des équations aux différences. A cet effet, on choisira un réseau constitué par des parallèles aux axes  $u$  et  $\nu$ . L'équation (2') sera remplacée par les deux suivantes :

$$\Delta U = \frac{12(1-\nu^2)p}{Eh^3}, \quad \Delta \zeta_0 = U,$$

$$\text{où } \Delta = \frac{1}{\sin^2\alpha} \left( \frac{\partial^2}{\partial u^2} - 2\cos\alpha \frac{\partial^2}{\partial u \partial \nu} + \frac{\partial^2}{\partial \nu^2} \right)$$

et  $U$  désigne une fonction de  $u, \nu$ .

Chacune de ces deux relations sera elle-même remplacée par un système d'équations linéaires.

$$\begin{aligned}
 &= - \int_{-a}^{+a} du \int_{-b}^{+b} \frac{\partial^2 \zeta_0}{\partial u \partial v} \frac{\partial^2 \zeta_0}{\partial u \partial v} d\nu = - \\
 &= - \int_{-a}^{+a} du \int_{-b}^{+b} \frac{\partial \zeta_0}{\partial u} \frac{\partial}{\partial v} \left( \frac{\partial^2 \zeta_0}{\partial u \partial v} \right) d\nu = - \\
 &= - \int_{-a}^{+a} du \left\{ \left[ \frac{\partial \zeta_0}{\partial u} \frac{\partial^2 \zeta_0}{\partial u \partial v} \right]_{-b}^{+b} - \int_{-b}^{+b} \left( \frac{\partial^2 \zeta_0}{\partial u \partial v} \right)^2 d\nu \right\} = \\
 &= \iint_{(F)} \left( \frac{\partial^2 \zeta_0}{\partial u \partial v} \right)^2 dud\nu.
 \end{aligned}$$

L'expression (3') s'écrit, compte tenu de (18) :

$$\begin{aligned}
 A = & \frac{E h^3}{24 (1 - \nu^2) \sin^3 \alpha} \iint_{(F)} \left\{ \left( \frac{\partial^2 \zeta_0}{\partial u^2} \right)^2 + \left( \frac{\partial^2 \zeta_0}{\partial v^2} \right)^2 + \right. \\
 & + 2(1 + 2 \cos^2 \alpha) \left( \frac{\partial^2 \zeta_0}{\partial u \partial v} \right)^2 - \\
 & \left. - 4 \cos \alpha \left( \frac{\partial^2 \zeta_0}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 \zeta_0}{\partial v^2} \right) \frac{\partial^2 \zeta_0}{\partial u \partial v} \right\} dud\nu. \quad (3'')
 \end{aligned}$$

Telle est la valeur du travail intérieur de déformation de la plaque oblique dont le contour (posé ou encastré) satisfait à la condition :

$$\zeta_0 = 0 \text{ pour } u = \pm a \text{ et } \nu = \pm b.$$

4. La plaque oblique encastrée, à charge uniformément répartie. Calcul de la flèche.

Soit  $p_0$  la charge constante. Choisissons tout d'abord, pour  $\zeta_0(u, \nu)$ , la fonction très simple

$$\zeta_0 = \frac{f}{4} \left( \cos \frac{\pi u}{a} + 1 \right) \left( \cos \frac{\pi \nu}{b} + 1 \right) \quad (19)$$

On vérifie facilement qu'elle satisfait aux conditions au contour de la plaque encastrée (15) ainsi qu'à celle de symétrie par rapport à l'axe  $z$  (17).  $f$  désigne une constante qui est à déterminer à l'aide de (4') en utilisant pour  $A$  l'expression (3''). Cette constante est la flèche au centre de la plaque, car  $\left( \zeta_0 \right)_{\substack{u=0 \\ \nu=0}} = f$ .

Des calculs élémentaires donnent :

$$\begin{aligned}
 \iint_{(F)} \left( \frac{\partial^2 \zeta_0}{\partial u^2} \right)^2 dud\nu &= \frac{3}{16} ab \left( \frac{\pi}{a} \right)^4 f^2, \\
 \iint_{(F)} \left( \frac{\partial^2 \zeta_0}{\partial v^2} \right)^2 dud\nu &= \frac{3}{16} ab \left( \frac{\pi}{b} \right)^4 f^2, \\
 \iint_{(F)} \left( \frac{\partial^2 \zeta_0}{\partial u \partial v} \right)^2 dud\nu &= \frac{1}{16} ab \left( \frac{\pi}{a} \right)^2 \left( \frac{\pi}{b} \right)^2 f^2, \\
 \iint_{(F)} \left( \frac{\partial^2 \zeta_0}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 \zeta_0}{\partial v^2} \right) \frac{\partial^2 \zeta_0}{\partial u \partial v} dud\nu &= 0^1;
 \end{aligned}$$

<sup>1</sup> Cette dernière intégrale est nulle lorsqu'on prend pour  $\zeta_0$  une expression de la forme  $P_1(u) P_2(\nu)$ ,  $P_1$  étant une fonction de  $u$  s'annulant pour  $\pm a$ ,  $P_2$  une fonction de  $\nu$  ayant pour racines  $\pm b$ .

$$\begin{aligned}
 A &= \frac{E h^3 \pi^4}{24 (1 - \nu^2) \sin^3 \alpha} \frac{f^2}{ab} \left[ \frac{3}{16} \frac{a^4 + b^4}{a^2 b^2} + \frac{1}{8} (1 + 2 \cos^2 \alpha) \right], \\
 \delta A &= \frac{E h^3 \pi^4}{12 (1 - \nu^2) \sin^3 \alpha} \frac{f \delta f}{ab} \left[ \frac{3}{16} \frac{a^4 + b^4}{a^2 b^2} + \frac{1}{8} (1 + 2 \cos^2 \alpha) \right]; \\
 \delta \zeta_0 &= \frac{\delta f}{4} \left( \cos \frac{\pi u}{a} + 1 \right) \left( \cos \frac{\pi \nu}{b} + 1 \right), \\
 \iint_{(F)} p_0 \delta \zeta_0 dud\nu &= p_0 ab \delta f.
 \end{aligned}$$

Introduisons ces valeurs dans (4') :

$$\sin \alpha p_0 ab \delta f - \frac{E h^3 \pi^4}{12 (1 - \nu^2) \sin^3 \alpha} \frac{f \delta f}{ab} \cdot \left[ \frac{3}{16} \frac{a^4 + b^4}{a^2 b^2} + \frac{1}{8} (1 + 2 \cos^2 \alpha) \right] = 0;$$

d'où, en résolvant par rapport à  $f$  :

$$f = 0,6570 \frac{(1 - \nu^2) p_0}{E h^3} \frac{a^2 b^2 \sin^4 \alpha}{\frac{2}{3} + \left( \frac{a}{b} \right)^2 + \left( \frac{b}{a} \right)^2 + \frac{4}{3} \cos^2 \alpha} \quad (20)$$

Si l'on remarque que

$$F = 4ab \sin \alpha, \quad (21)$$

la valeur de la flèche peut aussi s'écrire :

$$f = (1 - \nu^2) \frac{F^2 p_0}{E h^3} \Phi \left( \frac{a}{b}, \alpha \right), \quad (22)$$

où

$$\Phi \left( \frac{a}{b}, \alpha \right) = \frac{0,04106 \sin^2 \alpha}{\frac{2}{3} + \left( \frac{a}{b} \right)^2 + \left( \frac{b}{a} \right)^2 + \frac{4}{3} \cos^2 \alpha} \quad (23)$$

est un facteur numérique qui ne dépend que du rapport  $\frac{a}{b}$  et de l'angle  $\alpha$ , c'est-à-dire de la forme des faces de la plaque. La fig. 9 donne une représentation graphique de la fonction  $\Phi$ , pour  $0,5 < \frac{a}{b} < 2$  et  $30^\circ < \alpha < 150^\circ$  (trait interrompu). Elle montre clairement l'influence de la forme sur la valeur de la flèche, dans le domaine particulièrement intéressant pour l'ingénieur.

La surface (19) a ceci de particulier que les profils axiaux  $u = 0$  et  $\nu = 0$  sont des lignes dont la courbure a la même valeur absolue au centre et aux extrémités<sup>2</sup>. Cette égalité n'existe certainement pas pour la surface élastique réelle. En d'autres termes la fonction choisie ne tient aucunement compte de la courbure des profils axiaux.

On obtiendra donc une meilleure approximation en prenant pour  $\zeta_0$  une expression qui satisfait à certaines conditions de courbure. Nous allons le faire sans que cela entraîne de grandes complications dans les calculs. Choisissons pour  $\zeta_0$  une fonction telle que, dans le cas parti-

<sup>1</sup> On obtient le même résultat en égalant le travail intérieur de déformation  $A$  donné par (3'') à la valeur  $\frac{\sin \alpha}{2} \iint_{(F)} p_0 \zeta_0 dud\nu$  du travail des forces extérieures.

<sup>2</sup> Tout profil  $u = \text{const.}$  et  $\nu = \text{const.}$  de la surface (19) jouit d'ailleurs de cette propriété.

culier de la plaque carrée, les profils axiaux aient une courbure convenable au centre et aux extrémités.

M. Nadai a précisément indiqué, dans son remarquable ouvrage «Elastische Platten», une méthode de très bonne approximation pour le calcul des plaques rectangulaires encadrées à charges uniformément réparties<sup>1</sup>. Des chiffres précis indiqués, il est facile de déduire que, pour la plaque carrée, le rapport de la courbure aux extrémités d'un profil axial à la courbure au centre est de -2,900.

Prenons alors pour  $\zeta_0$  la fonction suivante, qui satisfait à la condition de symétrie (17) :

$$\zeta_0 = \epsilon (u^6 + \alpha a^2 u^4 + \beta a^4 u^2 + \gamma a^6) \cdot (\nu^6 + \alpha b^2 \nu^4 + \beta b^4 \nu^2 + \gamma b^6). \quad (24)$$

Déterminons les constantes  $\alpha, \beta, \gamma$  en tenant compte que le profil  $\nu = 0$  (ou  $u = 0$ ) doit satisfaire aux conditions suivantes :

$$\begin{aligned} (\zeta_0)_{u=\pm a} &= 0, \quad \left(\frac{\partial \zeta_0}{\partial u}\right)_{u=\pm a} = 0, \\ \left(\frac{\partial^2 \zeta_0}{\partial u^2}\right)_{u=\pm a} : \left(\frac{\partial^2 \zeta_0}{\partial u^2}\right)_{u=0} &= -2,900, \end{aligned} \quad (25)$$

ce qui donne, après simplifications, les trois équations

$$\left. \begin{aligned} 1 + \alpha + \beta + \gamma &= 0, \\ 3 + 2\alpha + \beta &= 0, \\ 15 + 6\alpha + 3,900 &= 0; \end{aligned} \right\}$$

dont la solution est :

$$\alpha = +1,834, \quad \beta = -6,668, \quad \gamma = +3,834.$$

Si, en outre, nous remplaçons  $\epsilon$  par  $\frac{f}{\gamma^2 a^6 b^6} = \frac{f}{14,699 a^6 b^6}$ , nous obtenons pour  $\zeta_0$  :

$$\zeta_0 = \frac{f}{14,699 a^6 b^6} (u^6 + 1,834 a^2 u^4 - 6,668 a^4 u^2 + 3,834 a^6) \cdot (\nu^6 + 1,834 b^2 \nu^4 - 6,668 b^4 \nu^2 + 3,834 b^6), \quad (26)$$

où  $f$  désigne une constante qui est à déterminer à l'aide de (4') ; ce n'est autre que la flèche au centre de la plaque.

On obtient par des calculs élémentaires :

$$\begin{aligned} \iint_{(F)} \left(\frac{\partial^2 \zeta_0}{\partial u^2}\right)^2 dud\nu &= 24,083 \frac{b}{a^3} f^2, \\ \iint_{(F)} \left(\frac{\partial^2 \zeta_0}{\partial \nu^2}\right)^2 dud\nu &= 24,083 \frac{a}{b^3} f^2, \\ \iint_{(F)} \left(\frac{\partial^2 \zeta_0}{\partial u \partial \nu}\right)^2 dud\nu &= 6,018 \frac{f^2}{ab}, \\ \iint_{(F)} \left(\frac{\partial^2 \zeta_0}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 \zeta_0}{\partial \nu^2}\right) \frac{\partial^2 \zeta_0}{\partial u \partial \nu} dud\nu &= 0. \end{aligned}$$

$$A = \frac{E h^3}{24 (1 - \nu^2) \sin^3 \alpha ab} \cdot \left[ 24,083 \frac{a^4 + b^4}{a^2 b^2} + 12,036 (1 + 2 \cos^2 \alpha) \right],$$

<sup>1</sup> Springer, Berlin, 1925, p. 180 et suiv.

$$\begin{aligned} \delta A &= \frac{E h^3}{12 (1 - \nu^2) \sin^3 \alpha ab} \cdot \left[ 24,083 \frac{a^4 + b^4}{a^2 b^2} + 12,036 (1 + 2 \cos^2 \alpha) \right], \\ \iint_{(F)} p_0 \delta \zeta_0 dud\nu &= 1,2240 p_0 a b \delta f. \end{aligned}$$

L'équation des travaux virtuels (4') s'écrit :

$$1,2240 \sin \alpha p_0 a b \delta f - \frac{E h^3}{12 (1 - \nu^2) \sin^3 \alpha ab} \cdot \left[ 24,083 \frac{a^4 + b^4}{a^2 b^2} + 12,036 (1 + 2 \cos^2 \alpha) \right] \delta f = 0;$$

d'où, en résolvant par rapport à  $f$  :

$$f = 0,6100 \frac{(1 - \nu^2) p_0}{E h^3} \frac{a^2 b^2 \sin^4 \alpha}{\frac{1}{2} + \left(\frac{a}{b}\right)^2 + \left(\frac{b}{a}\right)^2 + \cos^2 \alpha} \quad (27)$$

Cette valeur de la flèche peut s'écrire :

$$f = \frac{(1 - \nu^2) F^2 p_0}{E h^3} \Phi \left( \frac{a}{b}, \alpha \right), \quad (22)$$

où

$$\Phi \left( \frac{a}{b}, \alpha \right) = \frac{0,03813 \sin^2 \alpha}{\frac{1}{2} + \left(\frac{a}{b}\right)^2 + \left(\frac{b}{a}\right)^2 + \cos^2 \alpha} \quad (28)$$

La fig. 9 donne une représentation graphique de la fonction  $\Phi$  (trait continu).

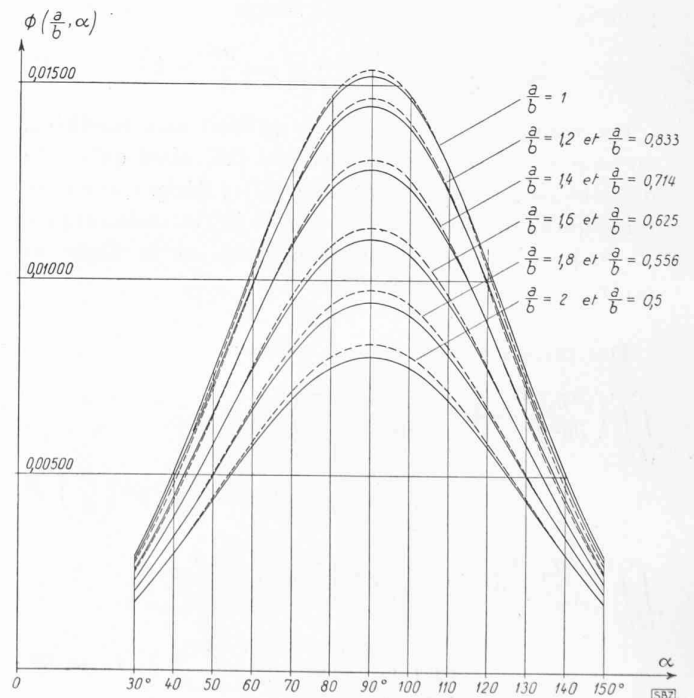


Fig. 9. — Représentation graphique de la fonction  $\Phi \left( \frac{a}{b}, \alpha \right)$  :

--- d'après la formule (23),  
— d'après la formule proposée (28).

Si nous comparons les courbes  $\Phi$  données par la formule (23), à celles données par (28), on voit qu'elles diffèrent peu dans le domaine considéré. La flèche ne dépend donc pas beaucoup du choix de  $\zeta_0(u, \nu)$ , pourvu que les conditions (15) et (17) soient satisfaites. Ceci est très compréhensible. En effet,  $f$  dépend de la déformation de toute la surface de la plaque et ne peut être que relativement peu influencé par la répartition de la courbure.

Il est toutefois évident que les formules (27) et (28) sont plus exactes que (20) et (23) — surtout pour des formes voisines de la plaque carrée — puisque nous avons choisi  $\zeta_0$  de façon à ce que les profils axiaux aient, pour  $a = b$  et  $\alpha = \frac{\pi}{2}$ , une courbure correspondant autant que possible à la réalité.

C'est pourquoi nous proposons, pour le calcul de la flèche, les formules (27) et (28). Il faut s'attendre, dans le domaine  $0,5 < \frac{a}{b} < 2, 30^\circ < \alpha < 150^\circ$ , à ce qu'elles donnent  $f$  à quelques pour-cent près.

La fig. 9 montre que, pour des valeurs  $F, h, E, \nu, p_0$  données, c'est la plaque carrée ( $a = b, \alpha = 90^\circ$ ) qui accuse la plus grande flèche. Si  $\frac{a}{b}$  est aussi donné, la flèche est maximum pour la plaque rectangulaire ( $\alpha = 90^\circ$ ). Enfin, si  $F, h, E, \nu, p_0, \alpha$  sont donnés,  $f$  est maximum pour la plaque dont le contour est un losange ( $a = b$ ). Ces résultats s'obtiennent également facilement par voie analytique.

5. Valeurs des tensions dans la plaque oblique encadrée, à charge uniformément répartie.

Les tensions en un point d'une plaque dépendent des dérivées  $\frac{\partial^2 \zeta_0}{\partial u^2}, \frac{\partial^2 \zeta_0}{\partial \nu^2}, \frac{\partial^2 \zeta_0}{\partial u \partial \nu}$  comme le montrent les formules (1''), c'est-à-dire de la courbure de la surface élastique au point considéré. Il est donc essentiel, pour calculer ces tensions, d'utiliser une surface  $\zeta_0$  dont la courbure soit aussi conforme que possible à la réalité. C'est pourquoi il faut se garder d'utiliser dans ce but la fonction (19). Par contre la solution représentée par les équations (26) et (27) est beaucoup plus adéquate au calcul des tensions, surtout dans un domaine voisin de la plaque carrée.

La discussion générale des tensions calculées à l'aide de (1''), (26) et (27) sortirait du cadre de cette étude. Nous voulons nous contenter de les calculer en deux points caractéristiques: au centre de la plaque et au milieu d'un des côtés.

1° Tensions au centre de la plaque ( $u = \nu = 0$ ).

De l'équation (26) on tire :

$$\left. \begin{aligned} \left( \frac{\partial^2 \zeta_0}{\partial u^2} \right)_{\substack{u=0 \\ \nu=0}} &= -3,478 \frac{f}{a^2}, & \left( \frac{\partial^2 \zeta_0}{\partial \nu^2} \right)_{\substack{u=0 \\ \nu=0}} &= -3,478 \frac{f}{b^2}, \\ \left( \frac{\partial^2 \zeta_0}{\partial u \partial \nu} \right)_{\substack{u=0 \\ \nu=0}} &= 0. \end{aligned} \right\}$$

Substituant dans (1''), il vient :

$$\left. \begin{aligned} \sigma_u &= 3,478 \frac{E f}{(1-\nu^2) \sin^3 \alpha} \frac{b^2 + (\cos^2 \alpha + \nu \sin^2 \alpha) a^2}{a^2 b^2} z, \\ \sigma_\nu &= 3,478 \frac{E f}{(1-\nu^2) \sin^3 \alpha} \frac{a^2 + (\cos^2 \alpha + \nu \sin^2 \alpha) b^2}{a^2 b^2} z, \\ \tau_{uv} &= -3,478 \frac{E f}{(1-\nu^2) \sin^3 \alpha} \frac{(a^2 + b^2) \cos \alpha}{a^2 b^2} z; \end{aligned} \right\} (29)$$

d'où, en remplaçant  $f$  par sa valeur (27) :

$$\left. \begin{aligned} \sigma_u &= 2,122 \frac{p_0 \sin \alpha}{h^3} \frac{b^2 + (\cos^2 \alpha + \nu \sin^2 \alpha) a^2}{\frac{1}{2} + \left(\frac{a}{b}\right)^2 + \left(\frac{b}{a}\right)^2 + \cos^2 \alpha} z, \\ \sigma_\nu &= 2,122 \frac{p_0 \sin \alpha}{h^3} \frac{a^2 + (\cos^2 \alpha + \nu \sin^2 \alpha) b^2}{\frac{1}{2} + \left(\frac{a}{b}\right)^2 + \left(\frac{b}{a}\right)^2 + \cos^2 \alpha} z, \\ \tau_{uv} &= -2,122 \frac{p_0 \sin \alpha}{h^3} \frac{(a^2 + b^2) \cos \alpha}{\frac{1}{2} + \left(\frac{a}{b}\right)^2 + \left(\frac{b}{a}\right)^2 + \cos^2 \alpha} z. \end{aligned} \right\} (29')$$

2° Tensions au milieu d'un des côtés ( $u = 0, \nu = b$ ).

On tire également de (26) :

$$\left. \begin{aligned} \left( \frac{\partial^2 \zeta_0}{\partial u^2} \right)_{\substack{u=0 \\ \nu=b}} &= 0, & \left( \frac{\partial^2 \zeta_0}{\partial \nu^2} \right)_{\substack{u=0 \\ \nu=b}} &= +10,087 \frac{f}{b^2}, \\ \left( \frac{\partial^2 \zeta_0}{\partial u \partial \nu} \right)_{\substack{u=0 \\ \nu=b}} &= 0; \end{aligned} \right\}$$

d'où

$$\left. \begin{aligned} \sigma_u &= -10,087 \frac{E f}{(1-\nu^2) \sin^3 \alpha} \frac{\cos^2 \alpha + \nu \sin^2 \alpha}{b^2} z, \\ \sigma_\nu &= -10,087 \frac{E f}{(1-\nu^2) \sin^3 \alpha} \frac{1}{b^2} z, \\ \tau_{uv} &= +10,087 \frac{E f}{(1-\nu^2) \sin^3 \alpha} \frac{\cos \alpha}{b^2} z. \end{aligned} \right\} (30)$$

Et en remplaçant  $f$  par sa valeur (27) :

$$\left. \begin{aligned} \sigma_u &= -6,153 \frac{p_0 \sin \alpha}{h^3} \frac{a^2 (\cos^2 \alpha + \nu \sin^2 \alpha)}{\frac{1}{2} + \left(\frac{a}{b}\right)^2 + \left(\frac{b}{a}\right)^2 + \cos^2 \alpha} z, \\ \sigma_\nu &= -6,153 \frac{p_0 \sin \alpha}{h^3} \frac{a^2}{\frac{1}{2} + \left(\frac{a}{b}\right)^2 + \left(\frac{b}{a}\right)^2 + \cos^2 \alpha} z, \\ \tau_{uv} &= +6,153 \frac{p_0 \sin \alpha}{h^3} \frac{a^2 \cos \alpha}{\frac{1}{2} + \left(\frac{a}{b}\right)^2 + \left(\frac{b}{a}\right)^2 + \cos^2 \alpha} z. \end{aligned} \right\} (30')$$

On peut ensuite, si l'on veut, calculer les tensions normales et tangentielles ordinaires, en projetant les tensions (29') et (30') sur des axes respectivement perpendiculaires et parallèles aux éléments de surface.

Il sera également facile de déterminer les tensions normales et tangentielles relatives à un élément quel-



conque parallèle à  $z$ , en utilisant par exemple le procédé graphique de Mohr.

Il faut s'attendre à ce que les tensions calculées par (29') et (30') soient exactes à quelques pour-cent près dans le domaine  $\frac{2}{3} < \frac{a}{b} < \frac{3}{2}$ ,  $60^\circ < \alpha < 120^\circ$ <sup>1</sup>. Par contre, si l'on sort de ce domaine, tout en restant dans celui considéré plus haut  $\frac{1}{2} < \frac{a}{b} < 2$ ,  $30^\circ < \alpha < 150^\circ$ , ces tensions seront affectées d'erreurs plus grandes.

### 6. Conclusions.

Ce mémoire montre qu'il est commode d'utiliser des coordonnées obliques pour les plaques dont le contour est un parallélogramme. L'exemple traité est même éloquant à ce sujet, car nous avons pu établir une méthode approchée pour le calcul de la plaque oblique encastrée, à charge uniformément répartie, avec autant de facilité que que si elle était rectangulaire ! Il n'en sera peut-être pas toujours ainsi pour d'autres problèmes concernant les plaques obliques. Nous croyons cependant que les formules données permettront en général d'arriver au but avec plus d'élégance qu'en utilisant des coordonnées cartésiennes rectangulaires.

L'application des coordonnées obliques à certains problèmes d'élasticité bidimensionnelle ou même de torsion conduirait à des conclusions analogues à celles que nous venons de formuler pour les plaques.

Zurich, le 24 mars 1942.

<sup>1</sup> Les formules (29') et (30') donnent, pour la plaque carrée, des tensions différant de  $\frac{1}{2}\%$  de celles trouvées par *M. Nadai* pour la même forme (loc. cit.). Il en est de même pour la formule (27) de la flèche.

## L'extension de l'usine hydro-électrique de l'Oelberg

par BEDA HEFTI, ingénieur-conseil, Fribourg.<sup>2</sup>

L'extension de l'usine hydro-électrique de l'Oelberg, appartenant aux Entreprises Electriques Fribourgeoises, a été décrétée, en automne 1941, par le Grand Conseil du canton de Fribourg. Située sur le territoire de la Commune de Fribourg, cette usine a été construite en 1909 et utilise la chute de la Sarine qui s'étend depuis le barrage de l'ancienne usine de la Maigrauge, construite en 1872 par l'ingénieur Guillaume Ritter, à Oelberg. Au moyen d'une galerie creusée dans la molasse, le fort courant de la Sarine est coupé de sorte qu'en ajoutant la hauteur du barrage de l'ancienne usine surélevée de 4 m à la pente de la Sarine, on obtient la chute de 20 m. L'usine est équipée avec trois turbines Francis de 2500 CV absorbant 35 m<sup>3</sup> d'eau par seconde, accouplées aux alternateurs de 1850 kVA.

<sup>2</sup> La direction des *Entreprises électriques fribourgeoises* a bien voulu nous autoriser à reproduire ce texte paru récemment dans la revue *Cours d'eau et énergie*, périodique qui a mis aimablement ses clichés à notre disposition. (Réd.)

Pour la description détaillée nous nous référons à la brochure publiée à cette occasion sous les auspices de la direction des Travaux publics du canton de Fribourg. Nous donnons ci-après un bref aperçu des travaux prévus et des circonstances qui ont amené la direction des E. E. F. à proposer l'extension de l'usine en question.

### Le projet.

La première étape des travaux comporte l'installation d'un nouveau groupe absorbant 32 m<sup>3</sup> d'eau par seconde, comprenant : une turbine Kaplan de 7500 CV à axe vertical accouplée à une génératrice de 7500 kVA, installation qui nécessite des travaux de constructions importants pour l'agrandissement du bâtiment actuel. Doivent en outre être comprises dans cet ouvrage : la construction d'une nouvelle prise d'eau, d'une nouvelle galerie, d'une nouvelle chambre d'équilibre, et d'une nouvelle conduite forcée ; ce qui équivaut en somme à la construction d'une nouvelle usine complète.

L'installation d'un deuxième groupe identique servant de réserve est prévu en deuxième étape et les parties constructives sont déjà dimensionnées en prévision de ce complément. Nous nous réservons de revenir dans un article ultérieur sur quelques détails de la construction, nous bornant aujourd'hui de donner à nos lecteurs les dispositions essentielles du projet.

### Prise d'eau.

La nouvelle prise d'eau est placée à angle droit avec celle qui existe actuellement. Son aménagement nécessite la démolition d'une partie de l'ancienne usine de la Maigrauge et des vannes existantes. Une nouvelle vanne de fond est aménagée à l'intersection des deux prises, permettant le curage devant les grilles et l'évacuation des glaces.

En outre, chaque prise d'eau aura sa vanne pour le curage en aval des grilles. Ces trois vannes douées d'une mise en action automatique à commande par flotteurs ont une capacité d'évacuation de 300 m<sup>3</sup> d'eau par seconde, c'est-à-dire à peu près la moitié des hautes eaux. Pour l'évacuation des fortes crues on se servira des vannes à segments existants débitant 400 m<sup>3</sup> d'eau par seconde.

De cette disposition il résultera une simplification notable du service, surtout aussi par le fait qu'il ne sera plus nécessaire de laisser déborder le lac par-dessus le barrage en cas de crue, opération assez délicate parce qu'elle nécessitait la manipulation d'un système de planches pivotantes en béton, aménagées au haut du barrage. La nouvelle prise comporte aussi un écran flottant en béton armé pour le renvoi des corps flottants et de la glace et une grille de 30 mm avec dégrilleuse. Pour être parfaite, cette prise d'eau devrait être complétée à l'avenir par l'aménagement d'une vanne de fond dans le barrage permettant le curage en profondeur du lac de Pérolles, en vue du rétablissement de sa capacité d'accumulation.

### Galerie d'amenée.

Les calculs comparatifs de rendement ainsi que des considérations d'ordre technique ont démontré que la construction d'une seconde galerie s'imposait. Le gain en énergie ainsi récupérée ensuite de la diminution de la perte de charge se traduit par une plus-value de 1,6 ct. par kWh, en admettant un taux de 5 % pour l'investissement du capital pour la construction de la galerie. Cette galerie de 18,2 m<sup>2</sup> de section (voir fig. 3) est taillée dans le vif de la molasse sur 200 m, tandis que la première partie de 70 m de longueur traversant un mauvais terrain (sable et éboulis) sera construite en béton armé. En amont de la mise en charge la galerie nouvelle est raccordée