

**Zeitschrift:** Bulletin technique de la Suisse romande  
**Band:** 67 (1941)  
**Heft:** 18

**Artikel:** Le tirage naturel des chaudières de chauffages centraux  
**Autor:** Colombi, Ch.  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-51342>

#### Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

#### Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

#### Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 12.01.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

# BULLETIN TECHNIQUE DE LA SUISSE ROMANDE

## ABONNEMENTS :

Suisse : 1 an, 13.50 francs

Etranger : 16 francs

Pour sociétaires :

Suisse : 1 an, 11 francs

Etranger : 13.50 francs

Prix du numéro :

75 centimes.

Pour les abonnements  
s'adresser à la librairie

F. Rouge &amp; Cie, à Lausanne.

Paraisant tous les 15 jours

Organe de la Société suisse des ingénieurs et des architectes, des Sociétés vaudoise et genevoise des ingénieurs et des architectes, de l'Association des anciens élèves de l'Ecole d'ingénieurs de l'Université de Lausanne et des Groupes romands des anciens élèves de l'Ecole polytechnique fédérale. —

**COMITÉ DE PATRONAGE.** — Président: R. NEESER, ingénieur, à Genève ; Vice-président: M. IMER, à Genève ; secrétaire: J. CALAME, ingénieur, à Genève. Membres: *Fribourg*: MM. L. HERTLING, architecte ; A. ROSSIER, ingénieur ; *Vaud*: MM. F. CHENAUX, ingénieur ; E. ELSKES, ingénieur ; EPITAUX, architecte ; E. JOST, architecte ; A. PARIS, ingénieur ; Ch. THEVENAZ, architecte ; *Genève*: MM. L. ARCHINARD, ingénieur ; E. ODIER, architecte ; Ch. WEIBEL, architecte ; *Neuchâtel*: MM. J. BÉGUIN, architecte ; R. GUYE, ingénieur ; A. MÉAN, ingénieur ; *Valais*: M. J. DUBUIS, ingénieur ; A. DE KALBERMATTEN, architecte.

**RÉDACTION:** D. BONNARD, ingénieur, Case postale Chauderon 475, LAUSANNE.

Publicité :  
**TARIF DES ANNONCES**

Le millimètre  
(larg. 47 mm.) 20 cts.  
Tarif spécial pour fractions  
de pages.

Rabais pour annonces  
répétées.



**ANNONCES-SUISSES S.A.**  
5, Rue Centrale,  
LAUSANNE  
& Succursales.

**CONSEIL D'ADMINISTRATION DE LA SOCIÉTÉ ANONYME DU BULLETIN TECHNIQUE**  
A. STUCKY, ingénieur, président ; M. BRIDEL ; G. EPITAUX, architecte ; M. IMER.

**SOMMAIRE :** *Le tirage naturel des chaudières de chauffages centraux*, par M. Ch. COLOMBI, professeur à l'Ecole d'ingénieurs de l'Université de Lausanne. — *Courbes de raccordement de grande longueur pour voies de chemins de fer*, par M. E. SCHALTEGGER, ingénieur, Lausanne. — *Architecture esthétique*, par M. E. VIRIEUX, architecte. — **DIVERS**: *Les travaux d'établissement de la double voie sur la ligne du Gothard entre Brunnen et Fluelen*. — **NÉCROLOGIE**: Louis Bron, ingénieur ; Aloys Menthonnex, ingénieur. — **BIBLIOGRAPHIE**. — **SERVICE DE PLACEMENT**.

## Le tirage naturel des chaudières de chauffages centraux<sup>1</sup>.

### Quelques considérations générales,

par M. Ch. COLOMBI, professeur à l'Ecole d'ingénieurs de l'Université de Lausanne.

Le tirage naturel par cheminée est d'une importance capitale pour les installations de chauffage et, en particulier, pour le fonctionnement des chaudières de chauffages centraux. Dans ce domaine de la technique de la chaleur, à notre connaissance, les recherches entreprises ne sont guère en proportion de la valeur qu'il convient d'attribuer effectivement à cette question qui intéresse toute la circulation des gaz dans l'ensemble des installations qui leur sont réservées et dont la solution, en définissant l'aménée aux foyers de l'air nécessaire à la combustion, détermine pour une forte part l'économie de l'utilisation des combustibles.

L'exposé encore le plus couramment en usage de la théorie du tirage naturel est, très brièvement résumé, le suivant. Soit, comme le montre le schéma de la fig. 1, en *C* la chaudière d'une installation de chauffage pourvue de tous ses accessoires régulateurs (portillon d'ame-

née d'air, registre, etc.). La cheminée qui évacue les gaz de la combustion et qui est figurée en *Ch* a une hauteur *h*. En désignant par  $\gamma_1$  le poids spécifique moyen ( $\text{kg/m}^3$ ) de l'air ambiant et par  $\gamma_2$  celui des gaz produits par la combustion, on a notoirement

$$\gamma_1 - \gamma_2 = \Delta p \quad (1)$$

soit une différence (en  $\text{kg/m}^2$ ) entre les pressions exercées aux sections inférieures des deux colonnes gazeuses considérées, différence de nature statique. Si, à travers la chaudière, donc à travers une série de résistances, on met en communication les deux colonnes en maintenant, par un moyen d'ailleurs quelconque, la différence ( $\gamma_1 - \gamma_2$ ) une partie de  $\Delta p$ , soit  $\Delta p_c$  servira à déterminer le mouvement des gaz dans l'ensemble du circuit, en particulier dans la cheminée, conformément à l'équation bien connue de Saint-Venant

$$\frac{c^2}{2g} = - \int v \cdot dp \quad (2)$$

ou  $c$  = vitesse du fluide en  $\text{m/sec}$ ,

$v$  = son volume spécifique en  $\text{m}^3/\text{kg}$ ,

$g$  = accélération due à la gravité en  $\text{m/sec}^2$  (9,81),

$dp$  = variation élémentaire de pression.

En posant par approximation  $v = \frac{1}{\gamma_2} = \text{const.}$  et en écrivant, conformément à ce qui vient d'être signalé,  $\Delta p_c = m^2 \cdot \Delta p$  on obtient immédiatement

$$c = \sqrt{2gm^2} \cdot \sqrt{h} \cdot \sqrt{\frac{\gamma_1 - \gamma_2}{\gamma_2}}. \quad (3)$$

Par approximation encore, en appliquant l'équation

<sup>1</sup> Nous reproduisons ici un article paru au n° 2, 1941, de la *Revue suisse du chauffage et de la ventilation*. Il constitue l'introduction à une série de notes que M. le professeur Ch. Colombi publiera ces prochains mois dans ce périodique. Notre intention est d'extraire de ces textes, d'entente avec l'auteur, les passages pouvant intéresser plus spécialement nos lecteurs, en particulier les architectes qui, du fait des circonstances actuelles, ont été amenés à prendre, avec la collaboration des spécialistes, les mesures propres à assurer dans les installations de chauffages centraux une meilleure utilisation des combustibles. (Réd.)

des gaz parfaits,  $\frac{P}{\gamma} = RT$ , où  $p$  est exprimé en  $\text{kg/m}^2$ ,  $\gamma$  en  $\text{kg/m}^3$ ,  $T$  est la température absolue ( $^{\circ}\text{K}$ ) soit  $T = 273 + t^{\circ}\text{C}$ , et  $R$  la constante du gaz pris en considération, on obtient facilement une autre expression de la vitesse  $c$ , particulièrement simple et évidente. Il suffit pour cela, l'indice (1) se référant à l'air ambiant et l'indice (2) aux gaz de la combustion, de poser  $p_1 = p_2 = p$  et  $R_1 = R_2 = R$ ; alors

$$\gamma_1 = \frac{P}{RT_1}, \quad \gamma_2 = \frac{P}{RT_2} \quad \text{donc} \quad \frac{\gamma_1 - \gamma_2}{\gamma_2} = \frac{T_2 - T_1}{T_1}$$

soit, comme  $\sqrt{2g} = 4,44$

$$c = 4,44 \cdot m \cdot \sqrt{h} \cdot \sqrt{\frac{T_2 - T_1}{T_1}} \quad (4)$$

De cette équation, d'ailleurs bien connue, on déduit facilement le débit de la cheminée, plus exactement le débit à travers une section de celle-ci. En écrivant, pour simplifier les notations

$$c = k \cdot \sqrt{h} \cdot \sqrt{\frac{T_2 - T_1}{T_1}} \quad (4a)$$

si  $f$  est la section considérée ( $\text{m}^2$ ) et  $G$  le débit ( $\text{kg/sec}$ ) on a  $G = c \cdot f \cdot \gamma_2$ , donc

$$G = k \cdot f \cdot \gamma_2 \cdot \sqrt{h} \cdot \sqrt{\frac{T_2 - T_1}{T_1}}.$$

Toujours en tenant compte des simplifications qui ont servi à l'établissement de la relation (4) cette dernière équation devient

$$G = k \cdot f \cdot \frac{\sqrt{T_1}}{\gamma_1} \cdot \sqrt{h} \cdot \sqrt{\frac{T_2 - T_1}{T_2}}. \quad (5)$$

Cette relation est elle aussi connue et sa discussion pourrait presque se qualifier de classique. Elle montre, entre autres choses, que, pour le cas d'une cheminée de hauteur donnée, pour une température et une pression extérieures choisies, on peut mettre en évidence une loi de variation du débit en fonction de la température des gaz.

La théorie dont nous venons de rappeler les données et les résultats essentiels n'est pas satisfaisante sous divers aspects. On peut facilement en juger; toutefois il est également peu opportun de la condamner en bloc, ainsi que nous allons le voir. Il est évident qu'elle comporte de nombreuses approximations que nous nous sommes efforcés (c'était d'ailleurs un des buts que nous poursuivions en rappelant la théorie en cause) de mettre en évidence. Certaines de ces approximations se justifient, d'autres beaucoup moins. Il est par exemple logique d'admettre que la température de l'ambiance est constante, cette constance se vérifiant en fait sur les hauteurs (différences de niveau) qui entrent ici en ligne de compte.

Par contre supposer que la température des gaz reste constante est une hypothèse sujette à caution ainsi que celle relative à l'égalité des constantes  $R_1$  et  $R_2$ . Ces dernières diffèrent en fait l'une de l'autre d'une façon appréciable.

Il y a donc lieu de soumettre à une critique attentive les calculs qui précèdent.

En ce qui concerne les cheminées industrielles on a, au cours de ces dernières années, énoncé des théories qui sont en somme des perfectionnements de celle résumée ci-dessus. Des recherches fort intéressantes dans cet ordre d'idées sont par exemple celles de M. le Prof. M. Medici de l'Institut technique supérieur de Padova (Le Macchine termiche, Vol. I) recherches qui ont comme but essentiel de dimensionner correctement les cheminées prédictes.

En ce qui suit, nous allons examiner les conséquences que peuvent avoir, dans le cas qui nous intéresse, les idées qui sont à la base de ces nouvelles théories, ainsi que d'autres conceptions, en nous servant cependant pour cela de méthodes d'investigation différentes de celles auxquelles nous venons de faire allusion.

On sait qu'une colonne de fluide est soumise à des pressions variables avec la hauteur.

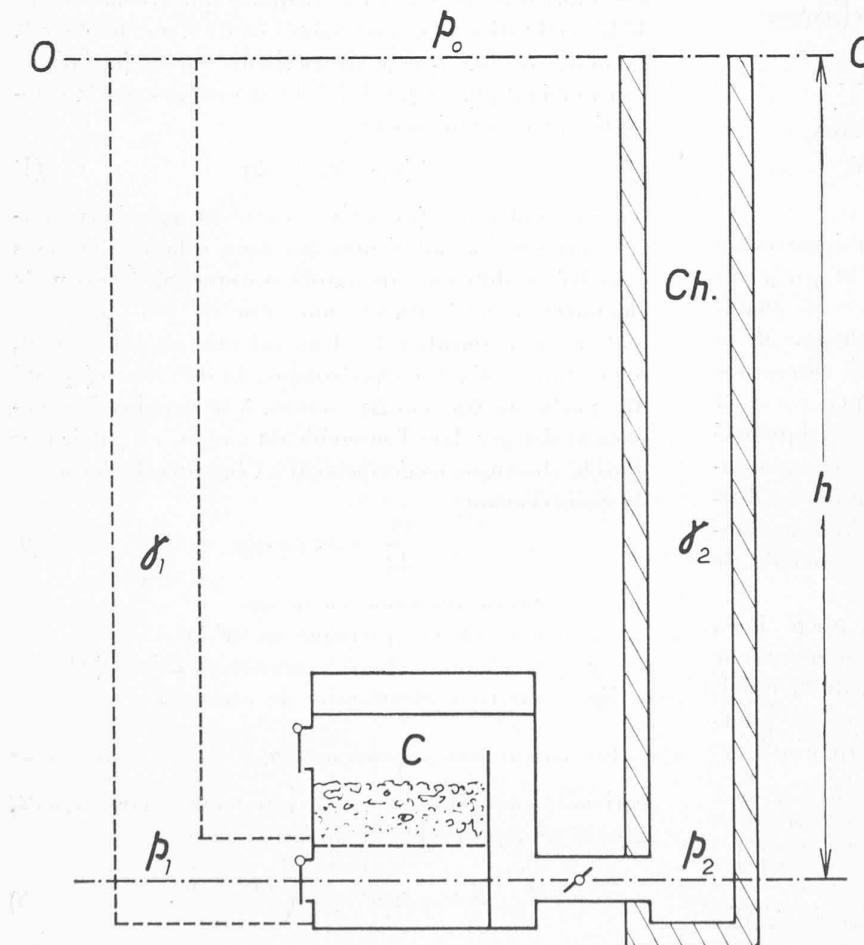


Fig. 1.

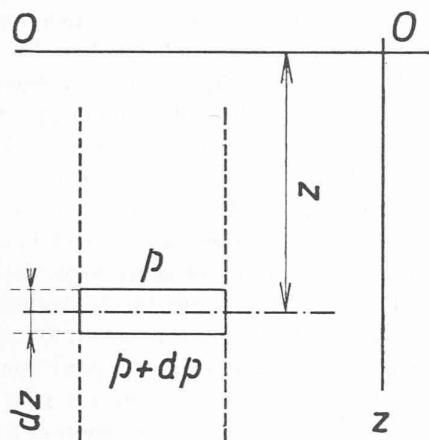


Fig. 2.

Pour définir ces variations de pression, nous allons considérer une colonne de gaz à partir d'un plan de niveau 0—0 (fig. 2) et, dans cette colonne, à la cote  $z$  un élément de hauteur infiniment petite  $dz$ . Si  $\gamma_z$  est le poids spécifique du fluide à la cote  $z$  on a, entre les deux faces de l'élément, une différence de pression

$$dp = \gamma_z \cdot dz.$$

Si l'on admet la colonne en question constituée par un gaz parfait, on a aussi  $\gamma = \frac{p}{RT}$  pour toutes valeurs de  $z$ . En conséquence

$$\frac{dp}{p} = \frac{1}{RT} \cdot dz. \quad (6)$$

Cette équation est immédiatement intégrable dans le cas où  $T = \text{const.}$  et donne alors

$$\ln \frac{p_z}{p_0} = \frac{z}{RT}. \quad (7)$$

Appliquée aux deux colonnes d'air et de gaz (voir fig. 1)  $p_0$  désignant la pression au plan de niveau 0—0, cette équation donne :

$$\text{pour l'air} \quad p_1 = p_0 \cdot e^{\frac{h}{R_1 T_1}} \quad (7a)$$

$$\text{pour les gaz} \quad p_2 = p_0 \cdot e^{\frac{h}{R_2 T_2}}. \quad (7b)$$

Si l'équation (7a) est acceptable sans autre, vu que  $T_1$  est en fait pratiquement une quantité constante, il n'en est pas de même pour la (7b) attendu que  $T_2$ , par contre, peut varier entre des limites assez étendues. Nous examinerons spécialement cette circonstance par la suite.

Mais, même en admettant  $T_2 = \text{const.}$ , il résulte des deux dernières équations notées ce qui suit :

$$\begin{aligned} p_2 &> p_0 \\ p_1 &> p_2 \end{aligned}$$

et ce tout en supposant  $R_1 = R_2$  ce qui est inexact car, en fait, généralement,  $R_2 > R_1$ .

Le fait que  $p_1 > p_2$  résulte aussi des calculs exposés auparavant (sous n° 1) lesquels, par contre, ne mettent

pas nettement en évidence que  $p_2 > p_0$  chose qui est pourtant, pour l'entendement du fonctionnement des cheminées, d'une importance évidente.

Pour le moment nous voulons simplement examiner jusqu'à quel point les résultats qui découlent des relations de la forme (7a) et (7b) comparés à ceux donnés par les produits  $z \cdot \gamma$  diffèrent les uns des autres. Si l'on considère les courbes exponentielles notées sous la forme

$$\begin{aligned} p &= p_0 \cdot (1+x) \text{ ou} \\ (1+x) &= e^{\frac{h}{RT}}, \end{aligned}$$

les produits  $p_0 \cdot x$  représentent les augmentations de la pression déjà discutées en  $\text{kg/m}^2$  (mm c. e.). Ces valeurs sont reproduites à la fig. 3 pour  $p_0 = 10\,000 \text{ kg/m}^2$ ,  $R = 29,27$  et  $T = 288^\circ \text{ K}$ , avec des cotes variables entre 0 et 32 m (cas de l'air atmosphérique sec). Si on trace d'autre part la ligne  $z \cdot \gamma$ , selon que l'on considère  $\gamma = \gamma_0$  ou  $\gamma = \gamma_1$  on trouve deux droites correspondant respectivement aux pressions  $p_0$  et  $p_1$  prises comme bases de calcul. Ces deux droites sont très voisines l'une de l'autre et elles se superposent, à fort peu de chose près, à la courbe exponentielle. Il découle de là que dans le domaine des valeurs de  $z$  qui intéressent la construction des cheminées on peut, sans crainte d'erreur, remplacer la courbe exponentielle par une droite (ce qui, du reste, se montre facilement aussi d'autre façon). En conséquence les augmentations de la pression dans la colonne gazeuse croissent linéairement avec  $z$ .

En procédant de la même manière pour ce qui concerne les gaz de la cheminée, on obtient également une

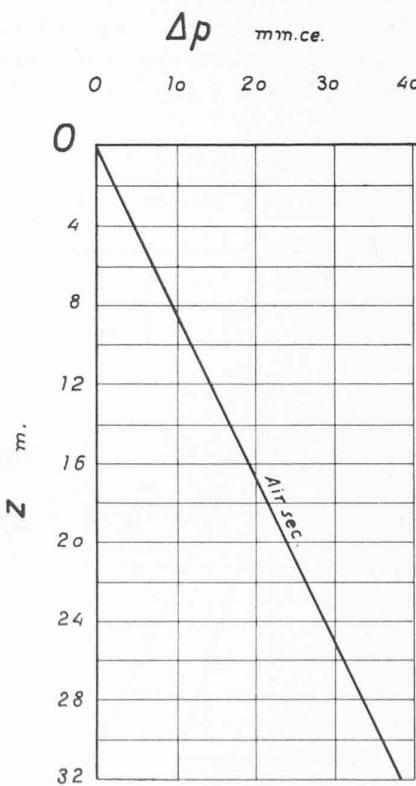


Fig. 3.

droite pour laquelle toutefois les valeurs  $p_0 \cdot x = \Delta p_2$  sont inférieures aux précédentes  $p_0 \cdot x = \Delta p_1$ . Quoique, pour les raisons exposées ci-dessus, ce mode de procéder soit sujet à caution, nous avons tracé, à titre d'exemple, une droite pour  $T_2 = \text{const.}$  Elle est représentée à la fig. 4 avec la droite relative à l'air atmosphérique, dont il a été question ci-dessus. Les données qui ont servi de base à ce graphique sont

$$p_0 = 10\,000 \text{ kg/m}^2;$$

$$T_1 = 273 + 15^\circ \text{ C} = 288^\circ \text{ K};$$

$$R_1 = 29,27;$$

$$T_2 = \text{const.} = 273 + 150^\circ \text{ C} = 423^\circ \text{ K};$$

$$R_2 = 31,0.$$

On voit immédiatement que la différence de pression disponible (statique) entre les deux colonnes, à chaque plan de niveau, est donnée par  $\Delta p_1 - \Delta p_2 = \Delta p$  laquelle est spécialement notée au graphique pour le plan  $z = 32 \text{ m}$  qui correspondrait par exemple à la base de la cheminée (plan moyen de la chaudière, avec une exactitude suffisante). Cette différence  $\Delta p$  varie naturellement en proportion directe de la cote  $z$ .

Supposons de réunir maintenant les bases de deux colonnes à travers des résistances (obstacles constitués par les sections de passage de l'air entrant dans la chaudière, par la couche de combustible à traverser, par les changements de section et de direction des carreaux, par l'étranglement du registre, etc.). Ces résistances absorbent, comme nous l'avons déjà noté en passant, une partie de  $\Delta p$  et il ne restera disponible, au pied de la cheminée, qu'un excédent de pression  $\Delta p_c$  par rapport à  $p_2$ , ainsi que le montrent les indications de la fig. 4.

Cet excédent  $\Delta p_c$  est justement celui qui permet l'accélération des gaz à évacuer et la compensation des résistances opposées à leur mouvement dans l'ensemble du chemin qu'ils ont encore à parcourir. La cheminée se

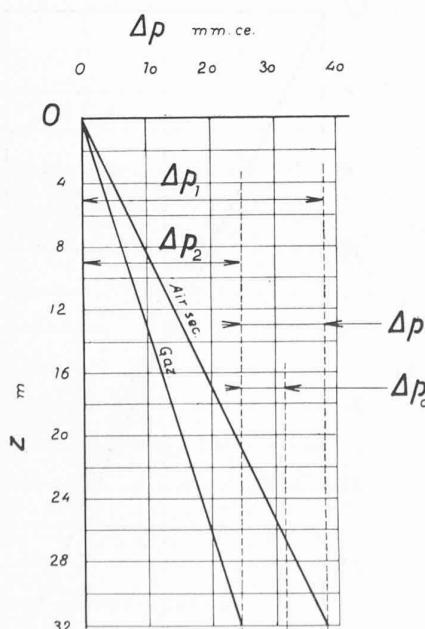


Fig. 4.

comportera en conséquence comme un canal, comme une tuyère, débitant entre deux milieux dont les pressions sont respectivement  $p_2 + \Delta p_c$  et  $p_0$  ou, comme cette tuyère est disposée verticalement et comme, pour d'autres raisons encore, on ne saurait faire abstraction de l'action de la gravité, débitant sous la poussée d'une pression  $\Delta p_c$ , ainsi que nous aurons l'occasion de le revoir. L'identité que nous venons de souligner permet l'examen de nombreux problèmes relatifs au mouvement des gaz dans les canaux d'évacuation et constitue la donnée de base indispensable à l'étude de ce mouvement. Donnée extrêmement simple, trop simple peut-être pour que l'on soit amené à l'étudier de plus près, ce qui est bien la cause de jugements que l'on entend souvent énoncer à son sujet et qui tiennent bien plus de l'empirisme que du calcul et de la reflexion.

Mais si la notion de  $\Delta p_0$  est très simple, lorsqu'on serre le problème de plus près pour tenir compte le mieux possible des détails utiles, les choses deviennent plus délicates car les valeurs en jeu sont si faibles que toute correction, même en apparence peu importante, finit par jouer un rôle.

La dépression que l'on mesure en plaçant un manomètre (tube en U avec eau par exemple) à la base de la cheminée, demande quelque attention, d'autant plus que l'indication correspondant à cette mesure est, souvent, la seule qui soit donnée au sujet du tirage d'une installation, à tout le moins dans des catalogues et des projets. Or les calculs qui précèdent montrent qu'elle n'a de signification complète que si elle est accompagnée d'autres valeurs, notamment de celles de  $p_0$ ,  $p_1$  et de données relatives à la nature des gaz à évacuer (composition et température de ceux-ci) puisque la détermination directe de  $p_2$  est assez délicate. A elle seule l'indication de la dépression, comme on la fournit malheureusement souvent, n'est d'aucune utilité pour l'étude du fonctionnement d'une cheminée, car elle n'est qu'une mesure de ce qu'absorbent les résistances interposées entre l'entrée de l'air dans la chaudière et la section de base de la cheminée. Accompagnée de données précises sur la nature des gaz à évacuer et de renseignements thermométriques qui justifient l'évaluation au moins d'une température moyenne des gaz dans la cheminée, ainsi que de l'indication de la hauteur barométrique  $p_1$ , elle permet l'étude du fonctionnement en cause, car alors on a en même temps  $p_1$ ,  $p_2$  donc  $\Delta p$  et  $\Delta p_c = \Delta p - (\text{dépression mesurée})$ . Ce n'est toutefois, il convient d'y insister, que jointe encore à la valeur de  $p_0$  (en plus de celles mentionnées) que cette dépression donnera une vue complète sur l'ensemble de la circulation envisagée.

D'autre part, si l'on considère le problème au point de vue dynamique, il y aura lieu de tenir compte de facteurs délicats à évaluer (frottements, remous et analogues) pour juger lesquelles des données expérimentales sont nécessaires.

Nous chercherons donc dans les notes suivantes, tout en partageant notre étude entre l'examen des facteurs

susceptibles d'influencer sur  $\Delta p$  et celui de l'écoulement proprement dit, à nous référer à des essais, dans la mesure du possible toutefois, car la pénurie d'essence nous a obligé à interrompre une série de vérifications entreprises dans diverses chaufferies où il n'a été maintenant impossible de transporter nos appareils. Nous le regrettons et ce d'autant plus que dans le domaine du chauffage, en particulier l'étude du tirage est de toute importance pour aboutir à une utilisation rationnelle du combustible et, par suite, aux économies qui s'imposent maintenant de toute notoriété, mais qui s'imposeront par la suite aussi, si l'on veut veiller convenablement à l'avenir de la balance commerciale de la Suisse.

## Courbes de raccordement de grande longueur pour voies de chemins de fer

par E. SCHALTEGGER, ingénieur, Lausanne.

L'augmentation de la vitesse des trains a conduit au principe d'allonger les raccordements entre alignements et circonférences autant que possible. Dans certains cas spéciaux, soit à l'occasion de la construction de nouvelles lignes, soit de la déviation ou de la correction de la voie, des raccordements de grande longueur peuvent être utilisés avec avantage.

Les méthodes généralement employées pour déterminer la forme géométrique du raccordement sont approximatives. Les chemins de fer suisses, par exemple, avaient adopté comme courbe de raccordement la parabole cubique dans sa forme simplifiée  $y = x^3 : 6RL$ . Depuis quelques années ils ont remplacé cette méthode analytique par une méthode graphique, qui donne au raccordement la forme d'une spirale dans sa partie près de son origine. Les deux procédés admettent la courbure  $1 : \rho$  à un point quelconque de la courbe égale à la deuxième dérivée  $y''$  à ce point. L'expérience a prouvé que les résultats obtenus sont satisfaisants, à condition que l'angle  $\alpha$  entre la tangente, au point de raccordement, et l'alignement ne dépasse pas  $5^\circ$ . Il faudrait, pour des valeurs supérieures de cet angle, appliquer des corrections aux calculs ou choisir une courbe de raccordement pour laquelle la circonference à raccorder se présente exactement comme cercle osculateur au point de raccordement. Nous voulons essayer, de traiter ce problème en utilisant la parabole cubique dans sa forme théorique  $y = x^3 : 6RL \cos^3 \alpha$  qui possède toutes les propriétés géométriques nécessaires pour suffire aux conditions posées.

Nous commençons par une étude analytique qui nous procurera les formules pour calculer les valeurs caractéristiques du problème de raccordement ou, ce qui revient au même, d'osculation. La figure 1 donne la désignation des valeurs utilisées par le calcul.

Les équations 1 à 4 représentent une parabole cubique quelconque et les trois premières dérivées de celle-ci dans le système de coordonnées  $xy$ , l'abscisse étant la prolongation de l'alignement à raccorder. 1<sub>1</sub> à 4<sub>1</sub> sont les équations correspondantes d'une circonference déterminée par son rayon  $R_1$  et la distance  $q_1$  de son centre de l'alignement, par rapport aux coordonnées  $uv$ . Le groupe 1<sub>2</sub> à 4<sub>2</sub> est la mise en équation des valeurs correspondantes après remplacement de  $x$  par  $p + u$  et de  $y$  par  $q - v$ . Les expressions 1<sub>2</sub>, 2<sub>2</sub> et 3<sub>2</sub> contiennent les trois conditions caractéristiques du raccordement.

Circonference et parabole ont un point commun auquel la tangente et le rayon des deux courbes sont identiques. Par élimination de  $P$  et  $L$  et transformation, nous obtenons les équations du troisième degré 8 et 8'. Elles indiquent les relations qui existent entre les coordonnées  $x = p_1$  et  $y = q_1$  du centre de la circonference et l'angle de la tangente ou du centre  $\alpha_1$ .

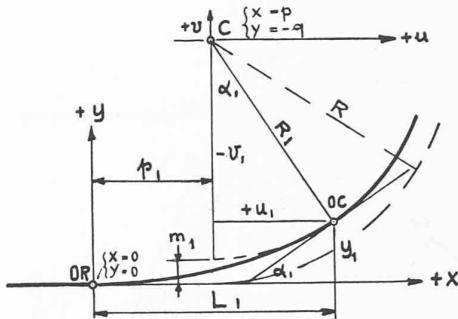


Fig. 1.

$$\begin{array}{ll} 1) \frac{x^3}{6P} = y & 1_1) \sqrt{R^2 - u^2} = v = R \cos \alpha \\ 2) \frac{x^2}{2P} = y' & 2_1) \frac{u}{v} = -v' = \tan \alpha \\ 3) \frac{x}{P} = y'' & 3_1) \frac{R^2}{v^3} = -v'' = \frac{1}{R \cos^3 \alpha} \\ 4) \frac{1}{P} = y''' & 4_1) 3R^2 \frac{u}{v^5} = -v''' = \frac{3 \sin \alpha}{R^2 \cos^5 \alpha} \end{array}$$

$$\begin{array}{l} 1_2) \frac{1}{6P_1} (p_1 + u_1)^3 = q_1 - R_1 \cos \alpha_1 \\ 2_2) \frac{1}{2P_1} (p_1 + u_1)^2 = \tan \alpha_1 \\ 3_2) \frac{1}{P_1} (p_1 + u_1) = \frac{1}{R_1 \cos^3 \alpha_1} \\ 4_2) \frac{1}{P} = \frac{3 \sin \alpha_0}{R_0^2 \cos^5 \alpha_0} \\ p_1 + u_1 = L_1 \\ 3_3) P_1 = R_1 L_1 \cos^3 \alpha_1 = \rho \times \cos^3 \alpha \text{ const.} \\ 1_3) \frac{L_1^2}{6R_1 \cos^3 \alpha_1} = q_1 - R_1 \cos \alpha_1 \\ 2_3) \frac{L}{2R_1 \cos^3 \alpha_1} = \frac{\sin \alpha_1}{\cos \alpha_1} \\ 5) L_1 = 3 (q_1 - R_1 \cos \alpha_1) \frac{\cos \alpha_1}{\sin \alpha_1} \\ 6) L_1 = 2R_1 \cos^2 \alpha_1 \sin \alpha_1 \\ 7) 3 (q_1 - R_1 \cos \alpha_1) \frac{\cos \alpha_1}{\sin \alpha_1} = 2R_1 \cos^3 \alpha_1 \sin \alpha_1 \\ 8) \cos^3 \alpha_1 - 2,5 \cos \alpha_1 + 1,5 \frac{q_1}{R_1} = 0 \\ 7') L_1 = 2R_1 \cos^2 \alpha_1 \sin \alpha_1 = R_1 \sin \alpha_1 + p_1 \\ 8') \sin^3 \alpha_1 - 0,5 \sin \alpha_1 + 0,5 \frac{p_1}{R_1} = 0 \end{array}$$

La méthode de Cardan donne des résultats imaginaires. Mais en appliquant la méthode de solution goniométrique nous obtenons, à part des résultats pratiquement utilisables, des indications sur les limites, dans lesquelles la parabole cubique peut être employée comme courbe de raccordement.

Par l'exemple qui suit, nous exposons la façon d'utiliser l'équation 8 pour calculer les valeurs caractéristiques d'une parabole cubique.