

**Zeitschrift:** Bulletin technique de la Suisse romande  
**Band:** 67 (1941)  
**Heft:** 1

**Artikel:** Voûtes cylindriques autoportantes  
**Autor:** Paris, A.  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-51312>

#### Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

#### Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

#### Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 06.02.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

# BULLETIN TECHNIQUE DE LA SUISSE ROMANDE

## ABONNEMENTS :

Suisse : 1 an, 13.50 francs

Etranger : 16 francs

Pour sociétaires :

Suisse : 1 an, 11 francs

Etranger : 13.50 francs

Prix du numéro :

75 centimes.

Pour les abonnements  
s'adresser à la librairie  
F. Rouge & Cie, à Lausanne.

Paraissant tous les 15 jours

Organe de la Société suisse des ingénieurs et des architectes, des Sociétés vaudoise et genevoise des ingénieurs et des architectes, de l'Association des anciens élèves de l'Ecole d'ingénieurs de l'Université de Lausanne et des Groupes romands des anciens élèves de l'Ecole polytechnique fédérale. —

**COMITÉ DE PATRONAGE.** — Président: R. NEESER, ingénieur, à Genève ; Vice-président: M. IMER, à Genève ; secrétaire: J. CALAME, ingénieur, à Genève. Membres : *Fribourg*: MM. L. HERTLING, architecte ; A. ROSSIER, ingénieur ; *Vaud*: MM. F. CHENAUX, ingénieur ; E. ELSKES, ingénieur ; EPITAUX, architecte ; E. JOST, architecte ; A. PARIS, ingénieur ; CH. THÉVENAZ, architecte ; *Genève*: MM. L. ARCHINARD, ingénieur ; E. ODIER, architecte ; CH. WEIBEL, architecte ; *Neuchâtel*: MM. J. BÉGUIN, architecte ; R. GUYE, ingénieur ; A. MÉAN, ingénieur ; *Valais*: M. J. DUBUIS, ingénieur ; A. DE KALBERMATTEN, architecte.

RÉDACTION: D. BONNARD, ingénieur, Case postale Chauderon 475, LAUSANNE.

Publicité :  
**TARIF DES ANNONCES**

Le millimètre  
(larg. 47 mm.) 20 cts.  
Tarif spécial pour fractions  
de pages.

Rabais pour annonces  
répétées.



**ANNONCES-SUISSES S.A.**  
8, Rue Centrale,  
LAUSANNE  
& Succursales.

**CONSEIL D'ADMINISTRATION DE LA SOCIÉTÉ ANONYME DU BULLETIN TECHNIQUE**  
A. STUCKY, ingénieur, président ; M. BRIDEL ; G. EPITAUX, architecte ; M. IMER.

**SOMMAIRE :** Voûtes cylindriques autoportantes, par A. PARIS, ingénieur, professeur à l'Ecole d'ingénieurs de l'Université de Lausanne. — LES PROBLÈMES DE L'HEURE : L'avenir de l'économie suisse de l'énergie, par A. HERRY, ingénieur, Zurich. — Concours pour l'étude des plans du bâtiment scolaire de Bex (suite et fin). — Les bétons à caractéristiques spéciales, leur emploi dans le bâtiment, les constructions civiles et militaires. — Société des arts de Genève : Prix Colladon 1941. — BIBLIOGRAPHIE. — SERVICE DE PLACEMENT.

## Voûtes cylindriques autoportantes<sup>1</sup>

par A. PARIS, ingénieur,  
professeur à l'Ecole d'ingénieurs de l'Université de Lausanne.

### I. Analogies et différences entre voûte ordinaire et voûte cylindrique autoportante.

Une voûte ordinaire, en maçonnerie ou en béton armé, assure son équilibre, sous les charges extérieures et celles du poids mort, en s'appuyant au moyen de réactions obliques sur ses culées ou ses murs de butée.

La forme et l'épaisseur de la voûte sont calculées de manière à maintenir les lignes de poussée dans le noyau central, si possible, ou sinon le moins excentriques possible, et éviter, autant que faire se peut, les contraintes de traction dans le matériau pierreux. Si ces contraintes existent néanmoins, l'armature travaille à la traction ; si l'excentricité augmente, ensuite de changements de température par exemple, la voûte tend à se fissurer.

Une voûte en béton armé, chargée de manière pratiquement uniforme, soit suivant son développement (poids propre), soit suivant sa projection horizontale (neige conventionnelle), peut devenir très mince vu la constance relative des lignes de poussée et la garantie, qu'on possède, d'une résistance élastique possible aux efforts locaux de traction. Son élasticité, sa plasticité même, ramènent les poussées dans la région du noyau ; la voûte tend à la membrane. Les efforts ont alors une

allure simple : ce sont des pressions méridiennes  $N_{\varphi}$  avec absence de flexion intérieure, longitudinale surtout, mais même méridienne.

Supposons maintenant que, pour une raison de rai-dissement ou de concentration d'appui, on munisse la voûte de nervures semi-circulaires dans un nombre, restreint naturellement, de ses méridiens. On verra aussitôt la voûte flexible s'appuyer contre les nervures au moyen d'efforts tangentiels méridiens  $N_{x\varphi}$  suscités par la résistance de la nervure à la déformation élastique de la voûte (fig. 1) ; des résistances radiales par efforts tranchants proprement dits sont en effet pratiquement exclues par la faible épaisseur de la voûte amincie. La présence d'efforts tangentiels  $N_{x\varphi}$  sur un côté méridien d'un élément, que nous supposerons rectangulaire, conduit par nécessité d'équilibre, à celle d'efforts égaux  $N_{\varphi x}$  sur les côtés en génératrices normales à sa direction. Ces efforts variant avec la position d'équilibre, ils appellent la présence de forces longitudinales  $N_x$ . L'effet de voûte autoportante naît ainsi de ce processus de déformation.

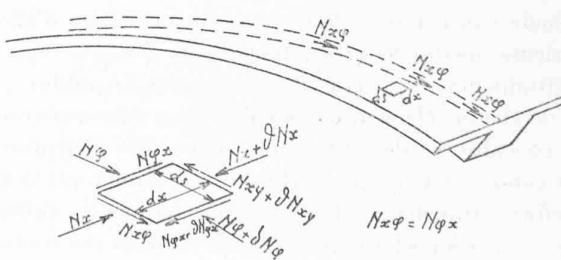


Fig. 1. — Voûte mince nervée.

<sup>1</sup> Conférence faite le 26 octobre 1940, à Lausanne, devant les membres du groupe professionnel S. I. A. des ponts et charpentes. (Voir *Bulletin technique*, 1940, p. 241.)

## II. Suppression des poussées à la base de la voûte.

On se rend immédiatement compte de l'automatisme de cette transformation, dans l'équilibre intérieur, si l'on suppose une voûte en maçonnerie appuyée contre des murs d'inégale rigidité : les parties déformables céderont, plastiquement ou non, sous la poussée et la voûte subira des fissures arquées, qui témoigneront de la présence de tensions principales, obliques et méridiennes suivant leur position, les tractions  $Z$  (fig. 2).

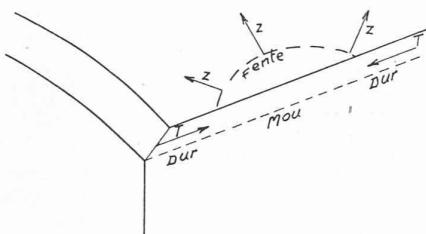


Fig. 2. — Voûte inégalement appuyée.

La voûte autoportante sera créée complètement, lorsqu'on aura espacé suffisamment les nervures raidissantes, tout en supprimant les appuis dans leur intervalle, de manière que le processus de formation des trajectoires isostatiques soit clairement discernable. Ce sera définitivement le cas si les nervures intermédiaires s'effacent à leur tour, ou abandonnent tout appui sur les culées latérales, et que la voûte cylindrique ne repose plus que contre des tympans terminaux suffisamment rigides pour empêcher toute déformation méridienne de la coque mince.

La diminution progressive, puis la disparition des appuis terminaux, créent des conditions aux deux contours libres, telles que le problème mathématique devienne soluble. Mais ce sont des conditions additionnelles à celles de l'équilibre dans l'espace ; on en tient compte par le calcul des déformations supposées élastiques ; elles sont donc hyperstatiques.

On peut naturellement partir du cas de la voûte ordinaire pour calculer les efforts intérieurs de la voûte autoportante. Mais les corrections sont si grandes et le régime des efforts intérieurs si complètement transformé, que la méthode conduit difficilement à des résultats satisfaisants.

On prend par conséquent pour base de calcul un autre système simple, statiquement déterminé : le tuyau cylindrique portant sur ses deux extrémités réputées indéformables sous la charge. L'avantage de cette méthode consiste dans la disposition immédiate d'efforts intérieurs méridiens ( $N_\varphi$ ), tangentiels ( $N_{x\varphi} = N_{\varphi x}$ ) et longitudinaux ( $N_x$ ) ; ces efforts assurent l'équilibre parfait de chaque élément comme du tuyau dans son ensemble, en l'absence de toute réaction sous des génératrices, tant contre les moments fléchissants généraux que contre les efforts tranchants. Les réactions terminales suffisent à elles seules à porter le tuyau fermé sur tout son contour.

Ce calcul d'équilibre donne les valeurs des trois efforts

— méridien, tangentiel et longitudinal — en tout point du tuyau. Le calcul en est élémentaire dans le cas des charges verticales uniformément réparties le long des parallèles, et symétriques par rapport au plan axial vertical. Le tuyau se refermant sur soi-même, aucune formation de fente théorique n'est possible.

Mais la voûte autoportante n'est qu'une fraction de tuyau, obtenue par coupure le long de deux parallèles, et enlèvement de la partie inférieure en auge. La voûte restante subit alors des efforts sans contre-partie le long de ses contours rectilignes libres. Ces efforts doivent être annulés ou équilibrés, ce qui conduit immédiatement à l'hyperstatique si l'annulation n'est pas automatique et parfaite.

Si l'on suppose des charges uniquement verticales — vent exclu donc — sur le voile autoporteur, à *méridien*

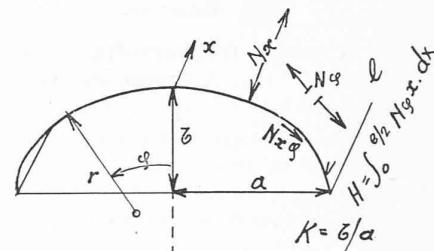


Fig. 3. — Voûte elliptique.

*elliptique* ou circulaire on remarque (fig. 3) que les efforts méridiens dus au poids propre  $g$

$$N_\varphi = -g \cdot a \cdot n_\varphi \quad n_\varphi = \frac{\rho^3}{k} \cos \varphi$$

$$\rho = \frac{k}{\sqrt{\sin^2 \varphi + k^2 \cdot \cos^2 \varphi}} \quad k = \frac{b}{a}$$

s'annulent pour

$$\varphi = 90^\circ$$

c'est-à-dire si la tangente de départ est verticale. On peut donc, en adoptant la demi-ellipse à petit axe vertical, annuler automatiquement la poussée méridienne le long du contour libre. Cette condition est aisée à remplir et suffit aussi pour la charge supposée uniforme de la neige ; mais elle a deux inconvénients dont le premier, d'ordre constructif, consiste dans la formation de gorges profondes entre les voûtes, c'est-à-dire dans la possibilité des sacs de neige avec difficulté d'étanchéité.

Le second inconvénient concerne les efforts intérieurs. Premièrement, la charge oblique due au vent reste ici sans réponse satisfaisante, même si l'on raidit le bord libre par une cimaise assez bien équilibrée pour ne pas introduire un moment fléchissant méridien appréciable. Puis, principalement, parce que les efforts tangentiels (fig. 3)

$$N_{\varphi x} = N_{x\varphi} = g \left( \frac{l}{2} - x \right) n_{\varphi x}$$

$$n_{\varphi x} = \left( 2 + \frac{3\rho^2}{k^2} \epsilon \cos^2 \varphi \right) \sin \varphi \quad \epsilon = 1 - k^2$$

acquièrent une valeur maximum pour le même  $\varphi = 90^\circ$ .

On a remédié à ce gros inconvénient du bord libre vertical en le munissant d'un ourlet raidisseur censé capable d'équilibrer cet effort en débarrassant la voûte de son affaiblissement. Mais cet ourlet sera construit sans mise en traction préalable ; il s'allongera donc élastiquement sous l'effort

$$H = \int_0^{1/2} N_{\varphi x} dx. \quad (\text{fig. 3})$$

Cette réaction, élastique, ne prendra qu'une portion, grande peut-être mais incomplète, de la résultante  $H$  et laissera le reste à la voûte calculée pour un autre état de charge. Ce fait trouble profondément l'équilibre intérieur du système, qu'on doit calculer en tenant compte des déformations relatives le long de l'ourlet, si l'on veut élucider vraiment le problème.

L'effort longitudinal  $N_x$  prend la valeur de base

$$N_x = -g \frac{l \cdot x - x^2}{2a} n_x$$

$$n_x = \left[ \frac{2k}{\rho^3} + \frac{3\epsilon^2}{k\rho} \left( \cos^2 \varphi - 2 \frac{\rho^2}{k^2} \sin^2 \varphi \right) \right] \cos \varphi.$$

Il s'annule au bord libre vertical, puisqu'il est à l'axe neutre du diagramme de Navier du tuyau complet ; ce qui est une évidente impossibilité.

La voûte autoportante statiquement déterminée constitue néanmoins une excellente base de départ du système hyperstatique, mais elle n'offre, à elle seule, pas la sécurité voulue au calcul des efforts intérieurs, des tractions principales obliques ou horizontales de la région tendue.

Considérant donc cette fraction de voûte autoportante comme système statique de base, on lui impose les conditions de contour, le long des génératrices complètement libres,

$$\circ N_\varphi = 0 \quad \circ N_{\varphi x} = 0 \quad \text{au contour}$$

réserve faite naturellement de charges directes à prendre en considération le cas échéant.

Le calcul de l'équilibre intérieur nouveau conduit à formuler ces efforts comme dérivées du couple méridien  $M_\varphi$ , ce qui introduit ce moment et sa dérivée l'effort tranchant  $Q_\varphi$ , donnant deux conditions nouvelles

$$\circ M_\varphi = 0 \quad \circ Q_\varphi = 0$$

sous la même réserve de charge éventuelle le long du bord.

Nous nous trouvons ainsi en présence d'un problème à quatre inconnues hyperstatiques, dont la solution dépend du calcul des déformations obtenues par intégration le long du méridien. Cette intégration n'est pratiquement réalisable qu'avec les fonctions circulaires ; les intégrales elliptiques traitées par le Dr Aas Jakobson, en particulier, ne sont accessibles que dans les tout grands problèmes.

*Ainsi donc, pour satisfaire commodément aux conditions du calcul et à celles de la construction, la voûte autoportante aura un méridien circulaire, dont l'ouverture ne*

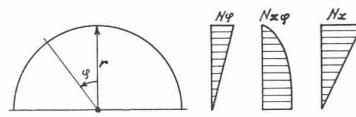


Fig. 4. — Méridien circulaire.

dépassera guère un tiers de cercle ; les départs biais sont, en effet, bien plus constructifs que les gorges profondes et le rayon de courbure doit être grand relativement à l'épaisseur de la coque pour une raison de souplesse, que nous reconnaîtrons ci-après.

Le méridien circulaire simplifie naturellement les formules issues de l'ellipse. On trouve

Poids propre  $g$  (constant sur le méridien)

$$N_\varphi = -g \cdot r \cdot \cos \varphi \quad N_{x\varphi} = +2g \left( \frac{l}{2} - x \right) \sin \varphi \\ N_x = -g \frac{x(l-x)}{r} \cos \varphi.$$

Charge utile  $p$  (constante sur corde)

$$N_\varphi = -p \cdot r \cdot \cos^2 \varphi \quad N_{x\varphi} = +1,5 p \left( \frac{l}{2} - x \right) \sin 2\varphi \\ N_x = -1,5 p \frac{x(l-x)}{r} \cos 2\varphi.$$

L'effet du vent est pratiquement négligeable dans une voûte surbaissée, armée pour résister aux flexions méridiennes.

#### *Courbe méridienne surhaussée.*

La courbe de poussée du poids propre uniforme est une chaînette et celle de la charge uniforme, sur le plan horizontal, une parabole ; ces deux courbes continuent obliquement quelle que soit la portée de la voûte ; elles s'équilibrent directement par la force méridienne orientée suivant tangente extrême. Il faut, pour obtenir un équilibrage par des efforts tangentiels le long du méridien, avec sens uniforme du bord inférieur de la voûte jusqu'à son faîte, une courbe surhaussée par rapport à la courbe funiculaire envisagée. La cycloïde donne une bonne solution constructive grâce à sa forte cambrure, mais son intégration n'est pratiquement pas réalisable. On adopte donc l'arc de cercle, dont le rayon de courbure est constant, tandis qu'il croît de la clef à la base dans les deux courbes funiculaires citées en premier lieu. Celles-ci conduiraient, en effet, si on les adoptait, à un renversement des efforts tangentiels au haut du méridien d'attache, ce qui aboutit, par nécessité d'équilibre des composantes verticales, à une accentuation des efforts vers le bas du contour méridien ; ce serait un contre-sens constructif et accentuerait le risque de fissure au bas du profil. Il suffit, pour se rendre compte de ce fait anormal, de supposer la voûte parabolique appuyée sur ses naissances et chargée de manière accentuée sur ses reins : sous l'effet de cette charge, la parabole tend à se soulever au sommet ; elle constitue donc une courbe méridienne inutilisable dans le problème qui nous occupe.

### III. Flexion mérienne

#### par appui sur la résistance longitudinale du voile.

La voûte cylindrique autoportante, définie par une courbe mérienne circulaire et par des appuis limités aux seuls méridiens terminaux, est donc un système hyperstatique — quatre inconnues à chacun des deux contours suivant génératrices — dans lequel le moment fléchissant mérien  $M_\phi$  joue le rôle de caractéristique fondamentale.

Voici comment les auteurs de ce calcul délicat, le Dr Flugge en particulier, sont arrivés à cette conception.

Considérons un élément de surface (fig. 5)

$$dF = dx \cdot ds \quad \text{où} \quad ds = r \cdot d\phi$$

aussi petit que possible, infiniment petit donc, et considérons son état de sollicitation par examen de l'équilibre de son contour.

La figure des efforts intérieurs conduit aux équations suivantes. Les forces d'abord :

translation

$$\text{suivant génératrice } x \quad + N'_x + N_{\phi x} + r \cdot X = 0$$

translation

$$\text{suivant méridien } s \quad + N_\phi + N'_{x\phi} - Q_\phi + r \cdot Y = 0$$

translation

$$\text{suivant rayon } r \quad + Q'_\phi + Q_x + N_\phi + r \cdot Z = 0$$

où  $X$ ,  $Y$  et  $Z$ , multipliés par l'aire  $dF$ , représentent la charge de l'élément rectangulaire considéré.

L'équilibre des moments donne ensuite :

rotation autour de la

$$\text{génératrice} \quad M'_\phi + M'_{x\phi} - r \cdot Q_\phi = 0$$

rotation autour de la

$$\text{directrice} \quad M'_x + M'_{\phi x} - r \cdot Q_x = 0$$

rotation autour du

$$\text{rayon} \quad r \cdot N_{x\phi} - r \cdot N_{\phi x} + M_{\phi x} = 0.$$

Ce système de six équations contient les dix inconnues  $N_x$ ,  $N_{\phi x}$ ,  $N_{x\phi}$ ,  $N_\phi$ ,  $Q_x$ ,  $Q_\phi$ ,  $M_x$ ,  $M_{\phi x}$ ,  $M_{x\phi}$  et  $M_\phi$ ; il comporte ainsi quatre hyperstatiques. Mais il est surtout bien trop compliqué, puisqu'il contient, outre ce fort nombre d'inconnues, des dérivées partielles suivant les deux directions principales de coordonnées. On le simplifie de deux manières.

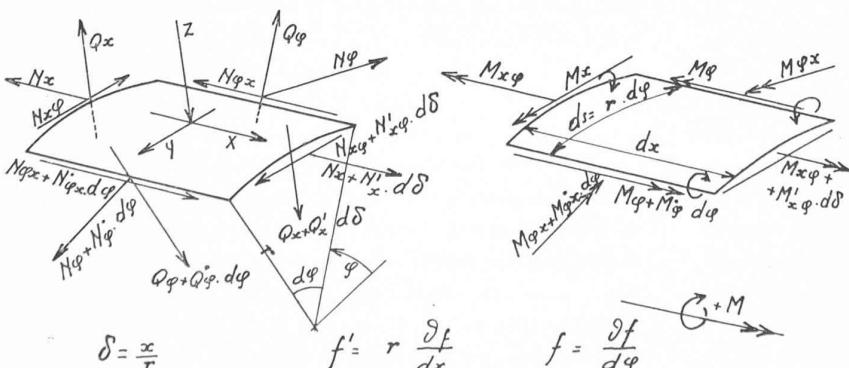


Fig. 5. — Efforts élémentaires dans la voûte fléchie.

A gauche : les forces.

A droite : les moments.

L'expérience montre que, dans une voûte normalement proportionnée, c'est-à-dire dont la longueur de faîte est sensiblement supérieure à la portée transversale  $2a$ , l'influence des contours mériens porteurs se réduit à équilibrer les efforts tangentiels  $N_{x\phi}$ , qui l'accostent. La figure 12 en témoigne par la direction à  $45^\circ$  des tractions et des pressions principales.

La première simplification consiste donc à négliger les réactions de contact habituelles, en écrivant

$$M_x = 0 \quad Q_x = 0$$

pour les efforts par lesquels les contours mériens réagissent sur le voile en tant que dalle flexible. Que cette simplification soit justifiée, cela ressort immédiatement du fait qu'une dalle mince, de quelque 7 cm d'épaisseur normale, est incapable par elle-même de reporter à l'appui les efforts habituels dus aux charges sur une portée de 10 m et plus.

On peut aussi annuler les moments de torsion

$$M_{\phi x} = M_{x\phi} = 0.$$

Des dix inconnues, quatre ont ainsi été éliminées ; il en reste six :

$$N_\phi, N_x, N_{\phi x}, N_{x\phi}, M_\phi \text{ et } Q_\phi$$

dont le calcul suivant donnera l'expression.

Nous disposons dans ce but de cinq équations différentielles, la sixième se résolvant par zéro = zéro ensuite des simplifications opérées ; il reste donc un effort inconnu, qui dépendra de quatre facteurs hyperstatiques ; la déformation élastique du voile en donnera la solution en faisant intervenir les trois composantes  $u$ ,  $v$  et  $w$  du déplacement élastique, et leurs dérivées suivant les deux directions d'abscisses

$$f' = r \cdot \frac{\partial f}{\partial x} \quad f \cdot = \frac{\partial f}{\partial \phi}.$$

Le développement des équations a montré que l'inconnue, à résoudre par ce calcul, c'est le moment mérien

$$M_\phi$$

qui permet, par ses dérivées successives, d'exprimer commodément les quatre autres variables (on a en effet, par équilibre,  $N_{\phi x} = N_{x\phi}$ ).

Pour éliminer la difficulté des dérivées partielles, on développe le moment mérien  $M_\phi$  en série trigonométrique amortie, selon l'expression

$$M_\phi = C \cdot e^{m\phi} \cdot \sin \left( n \cdot \pi \cdot \frac{x}{l} \right)$$

dont le premier terme suffit en général à donner une solution, amplifiée par  $4/\pi$ , de l'allure générale vérifiée par l'effort  $N_x$  longitudinal. C'est du reste la solution naturelle de l'équation du 8<sup>e</sup> ordre à dérivées paires, à laquelle on parvient par des opérations algébriques compliquées.

Ce développement en série, qui satis-

fait de manière suffisante à celui des efforts réels — nous le verrons par le diagramme des efforts et de leur moment de résistance (figure 16) —, assure deux avantages :

il permet de satisfaire immédiatement à la dérivation en direction d'abscisses longitudinales  $x$ , ne laissant aux équations d'efforts que les dérivées suivant méridien  $\varphi$  ;

il fixe des conditions aux contours d'appui, les pointrails terminaux, qui correspondent la plupart du temps à celles de la construction : nullité de l'effort longitudinal et du moment d'enca斯特ment à l'appui, et de l'effort tranchant au milieu de la portée.

Mais, précisément, cette satisfaction automatique, de conditions d'appui habituelles, limite la liberté du projet de façon quelquefois fâcheuse ; ce qui se marque par l'absence de constantes d'intégration sur les contours d'appui méridiens : de là l'ignorance dans laquelle on doit laisser le moment longitudinal  $M_x$  et l'effort tranchant connexe  $Q_x$ , en particulier.

Ce développement en série trigonométrique amortie ne s'adapte exactement qu'au cas de la voûte à méridien circulaire ; c'est pas conséquent ce type de voûte qui a été utilisé habituellement, pour tous les ouvrages de dimensions modérées du moins, et même déjà de grandes dimensions comme le marché de Budapest. C'est lui qu'utilise le Dr Flugge dans « Statik der Schalen ».

On remarquera toutefois que le Dr Aas Jakobson a étudié le méridien elliptique et a obtenu une solution qui évite, au commencement du moins, le développement en série. Il y revient toutefois plus loin par un détour de calcul, et trouve l'expression naturellement plus compliquée

$$X = a_1 \cdot e^{\lambda x} + b_1 \cdot e^{-\lambda x} + c_1 \cdot e^{i\lambda x} + d_1 \cdot e^{-i\lambda x}$$

qu'on peut écrire

$$X = a \cdot \sin \lambda x + b \cdot \cos \lambda x + c \cdot \sinh \lambda x + d \cdot \cosh \lambda x$$

où  $\lambda^4$ , constante à déterminer suivant les conditions de construction, provient de l'équation différentielle

$$\frac{d^4 X}{dx^4} - \lambda^4 X = 0.$$

Le procédé est donc général ; on le considère, actuellement du moins, comme pratiquement obligé. Il n'est du reste guère plus osé que le maintien, comme critère de résistance et de sécurité des éléments, de la loi de Hooke, de l'hypothèse de Navier par conséquent.

Le calcul de l'équilibre des déformations élastiques permet alors de solidariser les efforts cherchés et les déformations correspondantes élémentaires. Une des équations différentielles lie le moment méridien au seul déplacement radial  $\omega$ , lui-même et ses dérivées. Une autre équation lie la seconde dérivée de  $\omega$  suivant  $x$  aux divers efforts  $N_{\varphi}$ ,  $N_x$ ,  $N_{\varphi}x = N_x\varphi$ , et à leurs dérivées. Ce qui permet, en fin de compte, à M. Flugge d'éliminer le  $\omega$  et de trouver une équation de forme

$$M_{\varphi}'' = \frac{K}{D \cdot r(1 - \mu^2)} \times F(N_x, N_{\varphi}, N_{\varphi}x, \mu)$$

d'où les déformations sont absentes. Celle-ci lie les efforts intérieurs entre eux et aux constantes de construction

$$D = \frac{E \cdot d}{1 - \mu^2}$$

$$K = \frac{E \cdot d^3}{12(1 - \mu^2)} \quad d = \text{épaisseur de la voûte}$$

$$\mu = \text{nombre de Poisson}$$

qui expriment la raideur du voile aux efforts longitudinaux et à la flexion. L'annulation de  $K$  conduirait au cas de la membrane, si elle était possible sans annuler la raideur  $D$  elle-même.

L'équation différentielle en  $M_{\varphi}$  est partielle et du 8<sup>e</sup> ordre, avec dérivées uniquement paires. On la réduit à une équation différentielle ordinaire en utilisant le développement en série

$$M_{\varphi} = C \cdot e^{m\varphi} \times \sin \lambda \frac{x}{r} \quad \lambda = \frac{n\pi r}{l}$$

annoncé ci-dessus. L'équation différentielle du 8<sup>e</sup> ordre se mue ainsi, grâce à la dérivation toujours paire qui met en facteur commun

$$C \cdot e^{m\varphi} \cdot \sin \lambda \frac{x}{r}$$

en une équation du 8<sup>e</sup> degré

$$m^8 + [2 - (2 + \mu)\lambda^2]m^6 + [(1 + 2\mu)\lambda^4 - 2(2 + \mu)\lambda^2 + 1] \cdot m^4 + [-\mu \cdot \lambda^6 + (1 + \mu)^2\lambda^4 - (2 + \mu)\lambda^2]m^2 + \frac{1 - \mu^2}{k}\lambda^4 = 0$$

$$\text{où } k = \frac{K}{D \cdot r^2} = \frac{d^2}{12 r^2}$$

caractérise la raideur du voile fléchi, la longueur d'onde méridienne en particulier.

L'équation en  $m^8$  donne la solution du problème. Elle admet 8 racines complexes, quatre pour chaque contour sur génératrices,

$$m_1 = \pm a_1 \pm \beta_1 \cdot i \quad m_2 = \pm a_2 \pm \beta_2 \cdot i$$

qu'on obtient de préférence par la règle de Newton. Partant de la solution très approchée  $m_o$  donnée par l'équation simplifiée

$$m_o^8 + \frac{1 - \mu^2}{k}\lambda^4 = 0 \quad m_o = \sqrt[k]{-\frac{1 - \mu^2}{k}}$$

on a une seconde approximation, normalement suffisante, par la règle

$$m = m_o + z_1 \quad z_1 = -\frac{f(m)}{f'(m)}.$$

Le quotient  $+ f(m) : f'(m)$ , du polygone originel divisé par sa première dérivée suivant  $m$ , donne une valeur —  $z_1$  généralement petite, puisque  $f(m)$  se réduit aux termes  $m_o^6$ ,  $m_o^4$  et  $m_o^2$ , le premier,  $m_o^8$ , annulant automatiquement le terme constant.

La première résolution de

$$m_o^8 + \text{Cte} = 0$$

donne deux groupes de racines, de la forme théorique indiquée ci-dessus, et qui s'expriment par

$$m_o = \sqrt[8]{\text{Cte}} \times e^{\eta}$$

où

$$\eta = \begin{cases} \frac{1}{8} \text{ de } \pi \cdot i = 0,39270 i \\ \frac{3}{8} \text{ de } \pi \cdot i = 1,17810 i. \end{cases}$$

Les deux angles, facteurs de  $\eta$ ,  $22^{\circ} 30'$  et  $67^{\circ} 30'$ , sont complémentaires, et donnent, avec alternance de signes, les mêmes valeurs absolues aux facteurs de  $e^\eta$ , que tous les autres rayons analogues du cercle complet. On a ainsi, pour ces deux premiers,

$$e^\eta = \cos \eta + i \cdot \sin \eta = \begin{cases} +0,92388 + 0,38268 i = \alpha_1 + \beta_1 \cdot i \\ +0,38268 + 0,92388 i = \alpha_2 + \beta_2 \cdot i \end{cases}$$

en première approximation. Ces valeurs sont ensuite légèrement modifiées par la correction de Newton, ce qui donne quatre coefficients différents  $\alpha_1$  et  $\alpha_2$ ,  $\beta_1$  et  $\beta_2$ ; ces coefficients interviennent directement dans le calcul des efforts intérieurs. On a en effet le *moment méridien* par

$$M_\varphi = r [e^{\alpha_1 \varphi} (C_1 \cdot \cos \beta_1 \varphi + C_2 \sin \beta_1 \varphi) + e^{\alpha_2 \varphi} (C_3 \cdot \cos \beta_2 \varphi + C_4 \sin \beta_2 \varphi)] \sin \lambda \frac{x}{r}.$$

Les constantes  $C_1$  à  $C_4$  dépendent des conditions aux seuls contours suivant génératrices, puisque le facteur trigonométrique remplace l'influence des abscisses  $x$ . Comme il y a deux génératrices bordures, qui forment contours inférieurs, en général doués de propriétés différentes, on aura deux groupes de solutions  $C_1$  à  $C_4$ , un pour chaque génératrice d'arête. Le problème comporte ainsi quatre inconnues hyperstatiques à chaque bord, et l'on est conduit à traiter les deux bords individuellement, ce qui donne deux groupes de quatre équations à quatre inconnues, différents si les bords le sont aussi. C'est le cas dans la construction qui nous occupe : l'un est libre et l'autre encastré par continuité.

Pour mieux individualiser les deux bords, on remplace l'angle  $\varphi$  descendant du faîte par l'angle  $\omega$  montant du bord

$$\begin{aligned} \omega &= \varphi_n - \varphi & \varphi_n &= \text{angle entre} \\ \text{ce qui donne} & & & \text{faîte et naissance} \\ e^{\alpha \varphi} &= e^{\alpha \varphi_n} \cdot e^{-\alpha \omega} \end{aligned}$$

où  $e^{\alpha \varphi_n}$  est une constante de construction. On trouve en définitive la forme pratique du *moment méridien* (hyperstatique)

$$1) \quad hM_\varphi = r \cdot [e^{-\alpha_1 \omega} (A_1 \cdot \cos \beta_1 \omega + B_1 \cdot \sin \beta_1 \omega) - e^{-\alpha_2 \omega} (A_2 \cdot \cos \beta_2 \omega + B_2 \cdot \sin \beta_2 \omega)] \sin \lambda \frac{x}{r}$$

que nous écrirons en abrégé

$$hM_\varphi = r [e^{-\alpha \omega} (A \cdot \cos \beta \omega + B \cdot \sin \beta \omega)] \frac{2}{1} \times \sin \lambda \frac{x}{r}.$$

On remarque immédiatement que la double expression de  $e^\eta$  donne un facteur  $\alpha_1$  à peu près égal à l'unité, et un  $\alpha_2$  les deux cinquièmes environ. La valeur de calcul

$$e^{-\alpha \omega} = \operatorname{ch} \alpha \omega - \operatorname{sh} \alpha \omega$$

donne un amortissement rapide de l'onde  $\alpha_1 \omega$  et un bien plus lent de l'onde  $\alpha_2 \omega$ . Le moment hyperstatique  $hM_\varphi$  résulte ainsi de la superposition de deux ondes, chacune sinus et cosinus, dont l'amortissement est très inégal et

la longueur d'onde pareillement, puisque  $\alpha_1 \pi$  a une grandeur de plus du double de  $\alpha_2 \pi$ . Le résultat en est une courbe dont on peut seulement dire que son amplitude dépend de la grandeur du facteur  $k$  de raideur : si  $k$  est petit, sa fonction de dénominateur conduit à de grandes valeurs de  $m_o$ , et par conséquent de  $m$ . Des facteurs  $\alpha$  et  $\beta$ , augmentés en conséquence, résulte un amortissement plus rapide, qui permettra d'admettre l'indépendance pratique des deux génératrices de bord. Pour avoir de petites valeurs de  $k$ , il faut prévoir une épaisseur  $d$  aussi petite que possible en présence d'un grand rayon de courbure. Un voile de grande dimension sera donc favorisé à cet égard ; dans le cas du voile d'Orbe, où l'épaisseur n'a pu être prise inférieure à 7 cm par nécessité constructive, les deux bords sont restés fort dépendants l'un de l'autre, ce qui a conduit, en fin de compte, à la résolution solidaire de 8 équations à 8 inconnues.

Possédant désormais la solution pour le moment méridien  $M_\varphi$  en fonction de constantes  $A$  et  $B$ , qui dépendent de la construction, on établit les formules des autres efforts intérieurs, grâce à des dérivations successives. On a d'abord l'*effort tranchant*

$$2) \quad hQ_\varphi = \frac{1}{r} hM_\varphi = [e^{-\alpha \omega} (A^{(1)} \cos \beta \omega + B^{(1)} \sin \beta \omega)] \frac{2}{1} \times \sin \lambda \frac{x}{r}$$

où

$$A^{(1)} = \alpha A - \beta B \quad B^{(1)} = \beta A + \alpha B$$

proviennent du procédé de dérivation de  $M_\varphi$ .

Une nouvelle dérivation donne l'*effort méridien*

$$3) \quad hN_\varphi = -\frac{1}{r} M_\varphi'' = -[e^{-\alpha \omega} (A^{(2)} \cos \beta \omega + B^{(2)} \sin \beta \omega)] \frac{2}{1} \times \sin \lambda \frac{x}{r}$$

avec

$$A^{(2)} = (\alpha^2 + \beta^2) A - 2\alpha\beta B \quad B^{(2)} = 2\alpha\beta A + (\alpha^2 - \beta^2) B.$$

On trouve ensuite l'*effort tangentiel* par intégration de

$$hN_x = +\frac{1}{r} (M_\varphi' + M_\varphi'''')$$

c'est-à-dire

$$4) \quad hN_{x\varphi} = -\frac{1}{\lambda} [e^{-\alpha \omega} (A^{(1,3)} \cos \beta \omega + B^{(1,3)} \sin \beta \omega)] \frac{2}{1} \times \cos \lambda \frac{x}{r}$$

avec

$$A^{(1,3)} = A^{(1)} + A^{(3)} \quad A^{(3)} = (\alpha^3 - 3\alpha\beta^2) A - (\beta_3 - 3\alpha^2\beta) B$$

$$B^{(1,3)} = B^{(1)} + B^{(3)} \quad B^{(3)} = -(\beta^3 - 3\alpha^2\beta) A + (\alpha^3 - 3\alpha\beta^2) B.$$

Enfin, l'*effort longitudinal* résulte de la double intégration de

$$hN_x'' = -\frac{1}{r} (M_\varphi'' + M_\varphi''''')$$

$$hN_x = \frac{1}{\lambda^2} [e^{-\alpha \omega} (A^{(2,4)} \cos \beta \omega + B^{(2,4)} \sin \beta \omega)] \frac{2}{1} \times \sin \lambda \frac{x}{r}$$

où

$$A^{(2,4)} = A^{(2)} + A^{(4)}$$

$$A^{(4)} = (\alpha^4 + \beta^4 - 6\alpha^2\beta^2) A - (4\alpha^3\beta - 4\alpha\beta^3) B$$

$$B^{(2,4)} = B^{(2)} + B^{(4)}$$

$$B^{(4)} = (4\alpha^3 - 4\beta^3) A + (\alpha^4 + \beta^4 - 6\alpha^2\beta^2) B.$$

Tous ces efforts sont immédiatement calculables dès qu'on a fixé la valeur des facteurs initiaux  $A$  et  $B$ , et par suite celle de leurs « dérivées » successives, comme indiqué ci-dessus. Cette détermination dépend de conditions aux contours, qu'on fixe au milieu de la portée  $\left(\sin \lambda \frac{x}{r} = \sin \frac{\pi}{2} = 1\right)$  pour le moment  $M_\varphi$ , l'effort transversal  $Q_\varphi$  et la poussée mérienne  $N_\varphi$ ; on donne la valeur de l'effort tangentiel  $N_{x\varphi}$  à l'appui ( $\cos \lambda \frac{x}{r} = \cos O = 1$ ).

Une autre condition d'appui consiste à fixer la position de la tangente, immobile en cas d'encastrement ou solidaire en cas de continuité parfaite et de charge unilatérale. La solution le long du bord ( $\omega = 0$ ) s'exprime par

$$5) \quad \omega = \frac{\partial \psi}{d\varphi} = \frac{r}{D(1-\mu^2)\lambda^2} \left[ (2 + \mu - \lambda^2) A^{(3)} + \left( 2 - \frac{1}{\lambda^2} \right) A^{(5)} - \frac{1}{\lambda^2} A^{(7)} \right] \frac{1}{2} \times \sin \lambda \frac{x}{r}$$

avec

$$A^{(5)} = A^{(4)} - B^{(4)}$$

$$A^{(7)} = (\alpha^3 - 3\alpha\beta^2) A^{(4)} + (\beta^3 - 3\alpha^2\beta) B^{(4)}.$$

Tous ces facteurs  $A$  et  $B$  sont unis, selon les lois de la dérivation, par une formule de récurrence, que M. Flugge écrit

$$A^{(\mu)} = \alpha A^{(\mu-1)} - \beta B^{(\mu-1)}$$

$$B^{(\mu)} = \alpha A^{(\mu-1)} + \alpha B^{(\mu-1)}.$$

(A suivre.)

## LES PROBLÈMES DE L'HEURE

### L'avenir de l'économie suisse de l'énergie

par A. HÆRRY, ingénieur, Zurich.<sup>1</sup>

L'article « Restrictions et économies dans le domaine de l'énergie » que M. Ed. Delley, ingénieur, a publié dans le n° 19 du *Bulletin technique* du 21 septembre 1940, donne un aperçu très intéressant de la situation actuelle de nos ressources en énergie. M. Delley insiste avec raison sur les économies réalisables et indique divers moyens d'arriver à une meilleure utilisation de nos disponibilités et à une mise en valeur plus judicieuse de l'énergie indigène et de l'énergie importée.

Les échanges avec l'étranger sont pour notre pays une nécessité ; c'est à cette condition qu'il peut acquérir les matières premières et les produits alimentaires qui lui sont indispensables. Cet état de chose exige une utilisation toujours plus intensive de nos ressources naturelles afin de couvrir nos propres besoins et d'assurer notre commerce extérieur. Parmi ces appoiments indigènes susceptibles de rendre d'importants services, figure en bonne place l'énergie hydroélectrique.

Les tableaux I, II et III sont significatifs. Ils donnent une image claire de la consommation totale d'énergie dans notre pays et du développement de cette consommation.

<sup>1</sup> Nous ne pouvons, faute de place, reproduire « in extenso » l'intéressant mémoire que nous a transmis M. Hærry. Nos lecteurs prendront connaissance toutefois avec grand intérêt des lignes suivantes, où se trouve exposé le point de vue d'une personnalité dont le nom est depuis de longues années attaché aux questions relatives au développement dans notre pays de l'utilisation de nos ressources hydro-électriques. (Réd.)

TABLEAU I.  
Consommation de carburants, de combustibles et d'énergie électrique en Suisse.

	En 1909	En 1938
Bois de feu (sans le bois de râperie) . . . . .	1 248 000 t	1 245 207 t
Tourbe. . . . .	12 782 t	2 757 t
Charbon de bois . . . . .	10 281 t	4 171 t
Energie électrique . . . . .	1000 mio kWh	5506 mio kWh
Gaz . . . . .	126 mio m <sup>3</sup>	263 mio m <sup>3</sup>
Coke (importé et d'usines à gaz)	496 178 t	1 384 521 t
Houille (sans les usines à gaz)	2 080 349 t	1 508 818 t
Lignite. . . . .	142 532 t	255 792 t
Résidus de pétrole (huile brute, huile de chauffage) . . . . .	4 348 t	169 579 t
Benzine et benzol pour moteurs	10 183 t	200 525 t
Pétrole et succédanés (huiles minérales et bitumeuses). . .	66 536 t	24 493 t
Dito, pour moteurs de véhicules. . . . .	—	17 914 t

N.B. La production des *usines à gaz* ne figure qu'en partie dans ce tableau, car ces usines tirent de la houille non seulement le gaz et le coke, mais aussi d'autres produits qui ne servent que partiellement de carburants et de combustibles.

TABLEAU II.  
Consommation de houille et production des usines à gaz.

	En 1909	En 1938
Consommation de houille . . .	409 548 t	684 715 t
Production pour le marché :		
Gaz . . . . .	126 mio m <sup>3</sup>	263 mio m <sup>3</sup>
Coke. . . . .	192 447 t	399 384 t
Goudron brut . . . . .	20 693 t	29 488 t
Ammoniaque pure . . . . .	993 t	694 t
Eau ammoniacale conc. . . .	1 924 t	1 334 t
Sulfate . . . . .	126 t	1 544 t
Benzol brut (de lavage) . . .	—	3 000 t

En ce qui concerne l'emploi de l'énergie électrique, la statistique dressée par l'Union des centrales suisses d'électricité et publiée par l'Office fédéral de l'économie électrique nous fournit les renseignements du tableau III.

TABLEAU III.  
Répartition de l'énergie électrique utilisée en Suisse.

Consommateurs	En 1909	En 1938
Ménages et artisanat . . . . .	Mio kWh	Mio kWh
Industrie en général . . . . .	520	1329
Electrochimie, électrométallurgie, électrothermie . . . . .	280	1452
Chaudières électriques . . . . .	—	496
Chemins de fer . . . . .	60	722
Pertes et installations de pompage . . . . .	140	737
Total . . . . .	1000	5506

Le tableau I montre que, de 1909 à 1938, la consommation du bois de feu est restée sensiblement stationnaire, tandis que celle de la tourbe et du charbon de bois a fortement diminué. Ce dernier est en majeure partie importé. La consommation de l'énergie électrique a quintuplé, celle du gaz a plus que doublé. La vente du coke a très fortement augmenté et n'a pu être couverte qu'en faible partie par la production accrue des usines à gaz. La consommation de la houille a diminué, mais celle du lignite a par contre augmenté. La consommation des résidus de pétrole (huile brute, gasoil) présente une forte augmentation, surtout celle de la benzine et du benzol, tandis que la consommation des huiles minérales et bitumeuses (pétrole) a diminué.