

**Zeitschrift:** Bulletin technique de la Suisse romande  
**Band:** 65 (1939)  
**Heft:** 15

**Artikel:** Résistance des profils fléchis en béton armé: égale capacité de résistance  
**Autor:** Paris, A.  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-50008>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 12.01.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

# BULLETIN TECHNIQUE

## DE LA SUISSE ROMANDE

### ABONNEMENTS :

Suisse : 1 an, 12 francs  
Etranger : 14 francs

Pour sociétaires :

Suisse : 1 an, 10 francs  
Etranger : 12 francs

Prix du numéro :  
75 centimes.

Pour les abonnements  
s'adresser à la librairie  
F. Rouge & C<sup>ie</sup>, à Lausanne.

Paraissant tous les 15 jours

Organe de la Société suisse des ingénieurs et des architectes, des Sociétés vaudoise et genevoise des ingénieurs et des architectes, de l'Association des anciens élèves de l'Ecole d'ingénieurs de l'Université de Lausanne et des Groupes romands des anciens élèves de l'Ecole polytechnique fédérale. —

COMITÉ DE PATRONAGE. — Président: R. NEESER, ingénieur, à Genève; Vice-président: M. IMER, à Genève; secrétaire: J. CALAME, ingénieur, à Genève. Membres: *Fribourg*: MM. L. HERTLING, architecte; A. ROSSIER, ingénieur; *Vaud*: MM. F. CHENAUX, ingénieur; E. ELSKES, ingénieur; EPITAUX, architecte; E. JOST, architecte; A. PARIS, ingénieur; CH. THÉVENAZ, architecte; *Genève*: MM. L. ARCHINARD, ingénieur; E. ODIER, architecte; CH. WEIBEL, architecte; *Neuchâtel*: MM. J. BÉGUIN, architecte; R. GUYE, ingénieur; A. MÉAN, ingénieur cantonal; *Valais*: M. J. DUBUIS, ingénieur, à Sion.

REDACTION : D. BONNARD, ingénieur, 80, Avenue de France, LAUSANNE.

### ANNONCES

Le millimètre sur 1 colonne,  
largeur 47 mm :  
20 centimes.

Rabais pour annonces  
répétées.

Tarif spécial  
pour fractions de pages.

Fermage des annonces :  
Annonces Suisses S. A.  
8, Rue Centrale (Pl. Pépinet)  
Lausanne

CONSEIL D'ADMINISTRATION DE LA SOCIÉTÉ ANONYME DU BULLETIN TECHNIQUE  
A. DOMMER, ingénieur, président; G. EPITAUX, architecte; M. IMER; A. STUCKY, ingénieur.

SOMMAIRE : *Résistance des profils fléchis en béton armé. Egale capacité de résistance*, par M. A. PARIS, professeur à l'Ecole d'ingénieurs de l'Université de Lausanne. — *Les étapes de l'architecture du XIX<sup>e</sup> siècle en Suisse* (suite et fin), par EDMOND VIRIEUX, architecte cantonal, à Lausanne. — *Société d'électro-chimie, d'électro-metallurgie et des Aciéries électriques d'Ugine*. — CORRESPONDANCE : *A propos d'un concours*. — BIBLIOGRAPHIE. — V. R. L. — SERVICE DE PLACEMENT.

## Résistance des profils fléchis en béton armé

### Egale capacité de résistance<sup>1</sup>

par M. A. PARIS, professeur à l'Ecole d'ingénieurs  
de l'Université de Lausanne.

Une poutre soumise à flexion y résiste par des contraintes, dont la répartition et l'intensité sont fonctions du profil et de la résistance propre des matériaux.

La condition d'équilibre intérieur demande

$$D = \int \sigma_v \cdot dF_v \quad D = Z \quad Z = F_a \cdot \sigma_a$$

Les deux composantes égales,  $D$  et  $Z$ , répondent au couple extérieur (fig. 1) par le moment

$$M = D \cdot r$$

L'interdépendance des contraintes variables  $\sigma_v$  en résulte et permet de les définir. On l'exprime par la loi de Navier durant la période dite élastique, mais ses bases, la loi de Hooke particulièrement, sont contestées, car le « module d'élasticité » du béton, dérivée du diagramme tension-déformation, diminue continuellement à mesure qu'augmente la contrainte. Cette loi ne permet donc pas le calcul du moment de rupture.

<sup>1</sup> Adaptation, pour la publication, d'une conférence faite à Lausanne devant le groupe des Ponts et Charpentes de la Société suisse des ingénieurs et des architectes.

### § 1. Armature normale et domaine du béton.

L'application stricte de la loi de Navier conclut à une résistance à la rupture, qui dépendrait du seul béton dans les hauts pourcentages; le professeur Schulé écrivait en 1909 dans les textes explicatifs du règlement suisse: « Jusqu'à environ 3 % d'armature, si le béton est bon, et 1,5 à 2,0 % s'il est médiocre, une charge croissante provoque la rupture (néanmoins) par atteinte de la limite apparente du fer »; ceci quoique le pourcentage limite du « domaine de l'acier » ne dépasse guère de 0,90 à 1,25 % en présence d'acier doux (lim. app. 2,4 à 3,0 t/cm<sup>2</sup>) et d'une résistance plastique de 120 kg/cm<sup>2</sup> dans le béton.

Le proportion d'armature et la qualité du béton du profil jouent donc, à cet égard, un rôle déterminant. Abstraction faite des poutres peu armées (pourcentage  $\varphi = F_a : bh'$  jusqu'à 0,5 % environ), on distingue par conséquent d'abord les *profils normalement armés*, dans lesquels il y a de 0,5 à 2 % d'armature et qui, de beaucoup les plus fréquents, satisfont en fait à la loi de Navier. On connaît ensuite les *poutres armées en excès*, dans lesquelles le pourcentage atteint ou dépasse même 3 % du profil rectangulaire. La loi de Navier conclut pour ces derniers que la contrainte du béton doit causer la rupture générale; mais l'essai montre au contraire qu'une nouvelle répartition, curviligne, des efforts, permet au béton de faire encore face à la tension de l'acier, et de conduire ainsi l'armature en général quand même à sa limite apparente.

La résistance des profils surarmés est fonction du rapport :

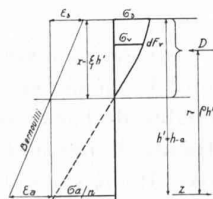


Fig. 1. — Contraintes et déformations de la poutre en phase II<sub>b</sub>

$$1) \quad \theta = \sigma_{app} : \sigma_{plast} \\ \sigma_{plast} \cong 0,60 \text{ à } 0,75 \beta_{b\acute{e}ton}$$

L'ordonnance fédérale connaît deux types de béton dosé à 300 kg/m<sup>3</sup> :

$$\text{ordinaire } \beta_{28} = 220 \text{ kg/cm}^2 \text{ d'où } \sigma_{plast} \cong 60\% \\ \text{c-à-d. } 132 \text{ kg/cm}^2$$

$$\text{qualité } \beta_{28} = 300 \text{ kg/cm}^2 \text{ d'où } \sigma_{plast} \cong 60\% \\ \text{c-à-d. } 180 \text{ kg/cm}^2.$$

Elle indique deux groupes d'aciers

$$\text{doux } \sigma_{app} = 2400 \text{ kg/cm}^2 \quad \text{spécial } \sigma_{app} = 3500 \text{ kg/cm}^2.$$

On peut attribuer à ces matériaux, selon chiffres empruntés au Laboratoire fédéral, les déformations linéaires spécifiques suivantes :

$$\text{béton ordin. } \beta = 139 \text{ kg/cm}^2 \quad \text{raccourc. spéc. } \epsilon_b = 2,00 \text{ }^0/_{00} \\ \text{» qualité } \beta = 228 \text{ kg/cm}^2 \quad \text{» } \epsilon_b = 2,20 \text{ }^0/_{00}$$

acier doux :

$$\text{proportionnalité } \sigma_p = 1,90 \text{ t/cm}^2 \quad \text{allong. } \epsilon_a = 0,88 \text{ }^0/_{00} \\ \text{lim. app. inf. } \sigma_{app} = 2,70 \text{ t/cm}^2 \quad \text{» } \epsilon_a = 2,50 \text{ }^0/_{00} \\ \text{lim. app. sup. } \sigma_{app} = 2,70 \text{ t/cm}^2 \quad \text{» } \epsilon_a = 25,0 \text{ }^0/_{00}.$$

On y ajoutera des indications concernant l'acier Isteg qui, selon graphique de M. Senn, ing., sont

$$\text{limite proportion. } \sigma_p = 2,50 \text{ t/cm}^2 \quad \text{allong. } \epsilon_a = 1,0 \text{ }^0/_{00} \\ \text{limite écoulement } \beta = 5,00 \text{ t/cm}^2 \quad \text{» } \epsilon_a = 25,0 \text{ }^0/_{00}.$$

## § 2. — Solidarité des résistances finales.

La rupture du corps fléchi se produit lorsqu'une partie essentielle du profil ne peut plus supporter une augmentation de déformation, sans voir son couple de résistance intérieur diminuer par suite de gonflement du béton ou d'écoulement de l'acier.

Le professeur Brandtæg<sup>1</sup> a essayé des éprouvettes prismatiques contenant de 4,7 à 5,1 % d'acier doux dans un béton, qui accusait des résistances en cylindre de 117 à 246 kg/cm<sup>2</sup> à 28 jours. La teneur en acier était déjà bien plus haute que ne l'annonçait Schulé, et pourtant la limite apparente combinait encore son influence avec celle de la résistance propre du béton : la rupture du prisme fléchi résultait de la coordination des résistances ultimes des deux matériaux. La condition d'élasticité ne joue plus de rôle ici ; seul intervient l'équilibre basé sur les déformations à la rupture.

## § 3. Augmentation de résistance dans le domaine du béton.

Sous une contrainte légèrement inférieure à celle de rupture, le volume de l'éprouvette passe par un minimum ; mais à partir de cet instant, la fissuration accentue le gonflement et agit progressivement en sens inverse.

Une fois atteinte la résistance  $\sigma_{II}$ , maximum pour la phase II du béton, celui-ci marque une déformation linéaire de quelque 1,5 à 2 pour mille. Mais il reste capable de déformations plastiques nouvelles, égales et même supérieures ; celle-ci s'accomplissent sous une pression à peu près constante, le schéma montrant toutefois un

dos d'âne atteignant le chiffre ultime  $\sigma_{pl}$ . La rupture se consomme plus tard sous une contrainte  $\sigma_r$  qui correspond à une déformation linéaire de 3 à 4  $\times 10^{-3}$ .

La loi de Navier ignore l'utilité de cette phase de résistance du « domaine du béton » ; elle attribue en conséquence la rupture du prisme fléchi à la seule faiblesse du conglomérat, responsabilité inconditionnelle qui se marquerait dès le point singulier I ; mais cette discontinuité ne se produit pas en réalité. Au lieu de prendre subitement une allure presque horizontale, la résistance de rupture croît encore de plus du double. La figure 3 montre que ce régime, peu exploré, intéresse des valeurs de l'abscisse  $C = \theta \cdot \varphi$  de 0,2 à 1,0, c'est-à-dire, puisque le rapport  $\theta$  oscille en général entre 10 et 20, des pourcentages allant de 2 à 5 % ; ce sont donc des profils très ou excessivement armés, qui travaillent bien au delà de la période d'élasticité.

## § 4. Haute résistance de l'armature.

Supposons un profil normalement armé d'acier doux, et soumettons-le à un couple fléchissant croissant ; la rupture progressive de la zone tendue fait monter son axe neutre, jusqu'à l'instant où l'atteinte de la limite apparente, dans l'armature, ouvre les fissures au point de faire écailler le béton. La répartition des contraintes de pression sera restée à peu près triangulaire jusqu'au moment de la rupture, due à l'allongement supra-élastique de l'acier ; nous sommes encore dans la région 0 —  $\sigma_{II}$  du diagramme du béton (fig. 2), et la poutre s'est rompue par dislocation du béton comprimé encore intact.

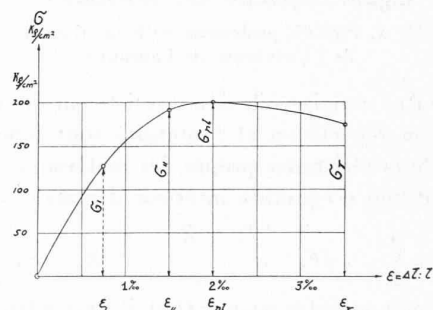


Fig. 2. — Diagramme tension-déformation selon M. Haynal-Konyi.

Admettons maintenant que, le profil de la poutre restant le même, en soi et en pourcentage d'armature, la qualité de l'acier soit améliorée. Au moment où la contrainte de pression atteindra l'intensité  $\sigma_{II}$ , l'acier n'aura pas atteint sa limite apparente ; les déformations s'accroîtront mais le profil résiste quand même au couple fléchissant qui grandit, car les parties excentriques de la zone comprimée travaillent dans la période  $\sigma_{II}$  —  $\sigma_r$  du diagramme. Nous sommes alors dans le domaine du béton, où la rupture peut parfaitement provenir quand même de l'allongement supra-élastique de l'acier.

Une augmentation du pourcentage en acier doux aurait eu un effet analogue, comme le montrent les essais Brandtæg (fig. 8).

<sup>1</sup> A. BRANDTÆG. Bruchspannungszustand. Trondjem 1935.

La limite apparente de l'armature détermine donc en général la rupture de la poutre fléchie par écaillage du béton avant ou après atteinte de ses déformations plastiques. L'écrasement autonome de la zone comprimée, avant la limite apparente, reste une grande exception.

Le sursaut de résistance de l'acier, qui s'est ressaisi après passage du palier de limite apparente, correspond à un état de sollicitation qui peut être intéressant si ce palier est suffisamment court.

### § 5. Diagramme de Navier et plasticité du béton.

La méthode usuelle de calcul base l'étude des profils fléchis sur le diagramme triangulaire de la phase I.

La loi de Navier, appliquée au béton armé grâce au rapport modulaire  $n = E_a/E_b$ , conduit à la conception des deux domaines de résistance (fig. 3), qui se séparent au point limite I, et dans chacun desquels l'un des matériaux aurait l'entière responsabilité de la rupture.

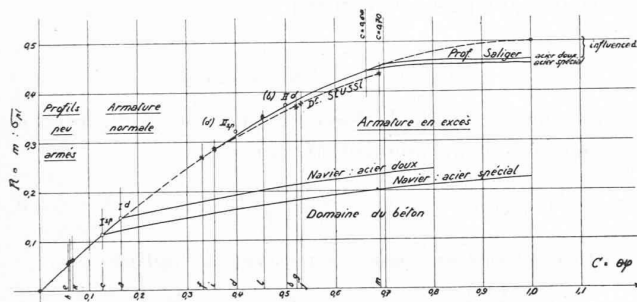


Fig. 3. — Loi de Navier et résistance à la rupture.

Soient

$$2) \quad m = M_r : b h'^2 = \begin{cases} \rho \cdot \varphi \cdot \sigma_{app} & (\text{domaine acier}) \\ \rho \cdot \xi / 2 \cdot \sigma_{pl} & (\text{domaine béton}) \end{cases}$$

le couple spécifique de rupture du prisme ( $\rho = r : h'$  et  $\xi = x : h'$  désignant les facteurs de proportionnalité du bras de levier et de l'axe neutre), et

$$R = m : \sigma_{pl} = M_r : b h'^2 \times \sigma_{pl}$$

le même couple spécifique réduit à l'unité de résistance plastique ; la formule de Navier conduit aux deux notions distinctes

$$\begin{aligned} \text{couple acier} & \quad R_a = \rho \cdot \varphi \cdot \theta \\ \text{couple béton} & \quad R_b = \rho \cdot \xi / 2. \end{aligned}$$

Calculées pour tous les pourcentages utiles, les deux courbes  $R_a$  et  $R_b$  (fig. 3 et 6) se coupent au point critique I, qui détermine le secteur de validité de l'une et de l'autre par le choix de la moindre des deux valeurs de  $R$ . On a, pour

$$\begin{aligned} R_a &= R_b \\ \varphi_I &= \frac{n}{2 \theta (n + \theta)} \quad R_I = \frac{n (2n + 3 \theta)}{6 (n + \theta)^2}. \end{aligned}$$

Si l'abscisse  $\varphi_I$  dépend fortement de la valeur attribuée au rapport modulaire  $n$ , ce n'est pas le cas pour le couple  $R_a$  qui y est à peu près insensible dans le domaine de

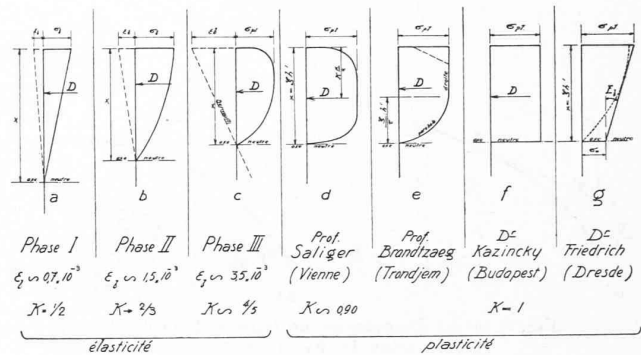


Fig. 4. — Diagrammes des contraintes mis à la base des calculs à la flexion.

l'acier, durant lequel la loi de Navier donne une image satisfaisante des résistances réelles.

Divers diagrammes (fig. 4/c à g) ont été tracés pour permettre l'établissement de formules de calcul durant la période de plasticité du béton.

Un des premiers calculs du couple de rupture émane du professeur Dr F. Stussi<sup>1</sup>. Basé sur des résultats expérimentaux, il permet de figurer l'équilibre intérieur par la formule

$$D = k_l \cdot b \cdot x \times \beta_b$$

où l'influence de l'axe neutre de Bernoulli

$$x = \frac{\epsilon_b}{\epsilon_b + \epsilon_a} \times h'$$

est corrigée par le facteur d'expérience

$$k_l = D : b \cdot x \cdot \beta_b.$$

La condition

$$Z = F_a \cdot \sigma_a = D$$

donne la section d'armature

$$F_a = \frac{k_l \times b \cdot x \times \beta_b}{\sigma_a}.$$

Le pourcentage

$$\varphi = \frac{F_a}{b \cdot h'} = \frac{\epsilon_b}{\epsilon_b + \epsilon_a} \cdot \frac{k_l \cdot \beta_b}{\sigma_a} = \frac{k_l}{\theta} \cdot \frac{\epsilon_b}{\epsilon_b + \epsilon_a}$$

ne dépend que des propriétés des deux matériaux et du facteur expérimental  $k_l$ .

Un second facteur d'expérience  $k$ , qui dépend de  $k_l$  et de la position du centre de compression, donne au bras de levier intérieur l'expression

$$r = h' \left( 1 - k \frac{\varphi \cdot \sigma_a}{\beta_b} \right) \cong 0,55 h'$$

qui conduit au couple de rupture par

$$M_r = D \cdot r.$$

La figure 3 compare la formule Stussi à une limite de résultats d'essais.

Plus récemment, le Dr E. Friedrich<sup>2</sup> a proposé un

<sup>1</sup> Dr F. STUSSI. Sécurité poutres rectangulaires. Mémoires AIPC. Zurich 1932.

<sup>2</sup> Dr. FRIEDRICH. Tragfähigkeit bei Biegung. Berlin 1937.

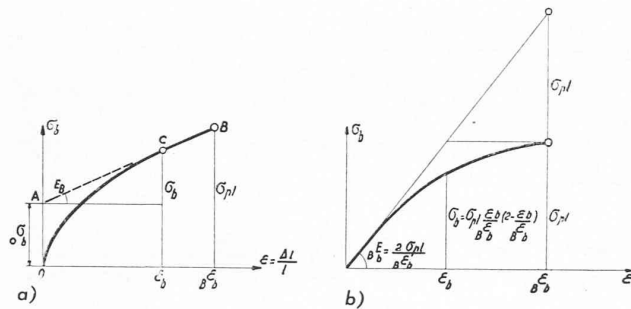


Fig. 5. — a) Diagramme de tension-déformation selon Dr Friedrich.  
b) Parabole de Talbot et module final.

diagramme trapézoïdal (fig. 4/g). Il exprime la contrainte du béton par

$$\sigma_b = \sigma_o + \epsilon_b \cdot E_b$$

enserrant ainsi la parabole de Talbot (fig. 5).

La résultante de pression du béton dans un profil rectangulaire  $b \cdot h'$

$$D = b \cdot h' \cdot \xi \left( \sigma_o + E_b \frac{\epsilon_b}{2} \right)$$

est égale à celle de traction

$$Z = F_a \cdot \sigma_a = \varphi \cdot b \cdot h' \times E_a \cdot \epsilon_a$$

ce qui donne, grâce à la loi de Bernoulli,

$$\epsilon_a : (1 - \xi) = \epsilon_b : \xi$$

l'équation pour l'axe neutre

$$\xi^2 + 2 n' \varphi \xi - 2 n' \varphi = 0$$

avec un nouveau rapport modulaire

$$n' = \frac{\epsilon_b E_a}{2 \sigma_o + E_b \epsilon_b}$$

Deux cas limites permettent alors une résolution aisée. C'est d'abord le triangle de Navier

$$\sigma_o = 0 \quad \sigma_b = \epsilon_b \cdot E_b$$

qui donne la valeur habituelle

$$n = E_a : E_b.$$

C'est ensuite la plasticité uniforme

$$E_b = 0 \quad \sigma_b = \sigma_o = \sigma_{pl}$$

d'où résulte

$$n' = E_a : \frac{2 \sigma_o}{\epsilon_b} = E_a : E_b.$$

Le module  $E_B$  s'explique graphiquement par la tangente initiale à la parabole de Talbot (fig. 5/b)

$$E_B = \frac{2 \sigma_{pl}}{\epsilon_{pl}}$$

Certains essais de la Commission allemande du béton armé ont permis à M. Friedrich d'admettre

$$n' \cong 16 \cong n.$$

Le module  $n'$  prenant ainsi des valeurs analogues à celle de  $n$ , l'axe neutre se place, au point extrême II, dans une position voisine de celle habituelle du profil rectangulaire. Si alors

$$r = \rho \cdot h' \quad \rho = 1 - \xi_{II}/2$$

l'équilibre intérieur  $D = Z$  conduit à

$$\xi_{II} \cdot \sigma_{pl} = \varphi_{II} \cdot \sigma_{app} \quad \xi_{II} = \theta \cdot \varphi_{II}.$$

Cette dernière valeur, égalée à la racine de l'équation du second degré, conduit au pourcentage limite

$$\varphi_{II} = \frac{2 n}{(2 n + \theta)}.$$

Le couple de rupture atteint ainsi

$$M_{II} = D_b \cdot r_{II} = b \cdot h'^2 \cdot \xi \cdot \rho \cdot \sigma_{pl}$$

ce qui donne les couples unitaires

$$m_{II} = \xi_{II} \cdot \rho_{II} \cdot \sigma_{pl} = \varphi_{II} \cdot \rho_{II} \cdot \sigma_{app}$$

$$R_{II} = \xi_{II} \cdot \rho_{II} = \xi_{II} (1 - \xi_{II}/2) = \varphi_{II} \cdot \rho_{II} \cdot \theta.$$

Comme le montre la figure 3, qui répond aux deux cas

acier doux  $\sigma_{app} = 2400 \text{ kg/cm}^2$   $\theta = 2400 : 120 = 20$

acier spécial  $\sigma_{app} = 3600 \text{ kg/cm}^2$   $\theta = 3600 : 120 = 30$

pour béton  $\sigma_{pl} = 120 \text{ kg/cm}^2$

les points limites du Dr Friedrich ne s'écartent guère de la courbe du professeur Stussi.

## § 6. Capacité de résistance.

La théorie usuelle de Navier exprime les contraintes du prisme soumis au moment  $M_I$  par

$$\sigma_b = M_I \cdot \frac{h'}{J} \cdot \xi \quad \sigma_a = n M_I \frac{h'}{J} (1 - \xi) \quad \xi = x : h'.$$

On écrit par analogie, en période de rupture,

$$3) \quad \frac{\sigma_{pl}}{\xi} = \frac{M_b h'}{J} = T_b \quad \frac{\sigma_{app}}{n(1 - \xi)} = \frac{M_a h'}{J} = T_a.$$

Les valeurs  $T_b$  et  $T_a$ , capacité de résistance du béton comprimé et de l'armature tendue, suivant la définition du Dr Friedrich, sont en général inégales; elles se rejoignent au point singulier I (fig. 6) où l'on a

$$T_a = T_b = T_I,$$

c'est-à-dire

$$\frac{\sigma_{pi}}{\xi} = \frac{\sigma_{app}}{n(1 - \xi)} = T_I.$$

Si l'on exprime la condition

$$(1 - \xi) + \xi = 1 = \frac{1}{T_I} \left( \frac{\sigma_{app}}{n} + \sigma_{pl} \right)$$

on obtient la valeur de la commune capacité de résistance au point critique

$$4) \quad T_I = \sigma_{pl} + \frac{\sigma_{app}}{n}.$$

Le moment de rupture (équation 3)

$$5) \quad M_r = \frac{\sigma_{pl}}{\xi} \cdot \frac{J}{h'} = T_I \frac{J}{h'}$$

contient le moment d'inertie  $J$  du profil considéré, qui, dans le cas simple et typique du rectangle à armature uniquement tendue, sera

$$J = b h'^3 \cdot \frac{\xi^2}{2} (1 - \xi/3).$$

L'expression de capacité de résistance donne une forme

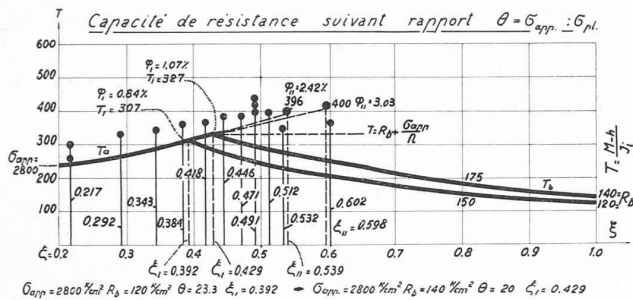


Fig. 6. — Capacité de résistance en domaines de l'acier et du béton.

parallèle aux caractéristiques des points limites; on a ainsi

Point critique I

$$m_I = \frac{n^2(2n+3\theta)}{6(n+\theta)^3} \times T_I \quad R_I = \frac{n(2n+3\theta)}{6(n+\theta)^2}$$

Point limite II

$$m_{II} = \frac{2n^2(4n+3\theta)}{3(2n+\theta)^3} \times T_I \quad R_{II} = \frac{2n(4n+3\theta)}{3(2n+\theta)^2} (n+\theta)$$

Le point critique I représente le sommet de la courbe  $T$  (fig. 6), qui descend de part et d'autre en branches d'hyperboles.

Si l'on compare maintenant ces valeurs théoriques aux résultats d'essais

$$5 a) \quad T_r = \frac{M_r h'}{J}$$

on constate que les points voisins de la branche  $T_a$ , tous situés en dessus, suivent une allure apparentée.

Dans le domaine du béton, par contre, les résultats expérimentaux s'éloignent de la branche  $T_b$ , puisqu'ils continuent à monter tandis qu'elle commence à descendre.

Cette erreur systématique correspond à celle que signalent les diagrammes de la figure 3.

### § 7. Condition d'égale capacité de résistance.

Nous avons tracé, dans la figure 6, une horizontale par le point singulier I; cette ligne d'égale capacité trace la vraie limite inférieure des résultats dans le domaine du béton, et répond à

$$T_I = \sigma_{pl} + \frac{\sigma_{app}}{n}$$

Le rapport modulaire  $n$ , qui paraît ici, joue un rôle effacé dans la résistance effective du prisme, comme le montre la coïncidence presque complète des trois diagrammes  $I_{10}$ ,  $I_{15}$  et  $I_{20}$ , de la figure 7, établis pour rapport modulaire  $n$  de 10 à 20.

Une méthode de calcul fondée sur la condition de Navier, jusqu'au point critique I, puis sur celle d'égale capacité, donnera visiblement satisfaction au double devoir de conformité avec les résultats d'essai, d'un côté, et de sécurité assurée à l'égard des résistances minima d'éprouvettes normales, de l'autre.

Partant de la position de l'axe neutre dans le domaine de l'acier, on calcule les couples unitaires

$$m = \frac{M}{b h'^2} = \phi \cdot \rho \cdot \sigma_{app} \quad R = \frac{m}{\sigma_{pl}} = \phi \cdot \rho \cdot \theta$$

ceci jusqu'au point I. Puis, au delà de I, on suit le palier  $T_b = T_I$  où

$$T_I = \sigma_{pl} + \frac{\sigma_{app}}{n}$$

est une constante qui dépend des seuls matériaux employés; le couple unitaire

$$m' = \frac{M_b}{b h'^2} = \frac{T_I J}{b h'^3}$$

utilise le moment d'inertie du profil rectangulaire

$$J = b h'^3 \times \frac{\xi^2}{2} (1 - \xi/3).$$

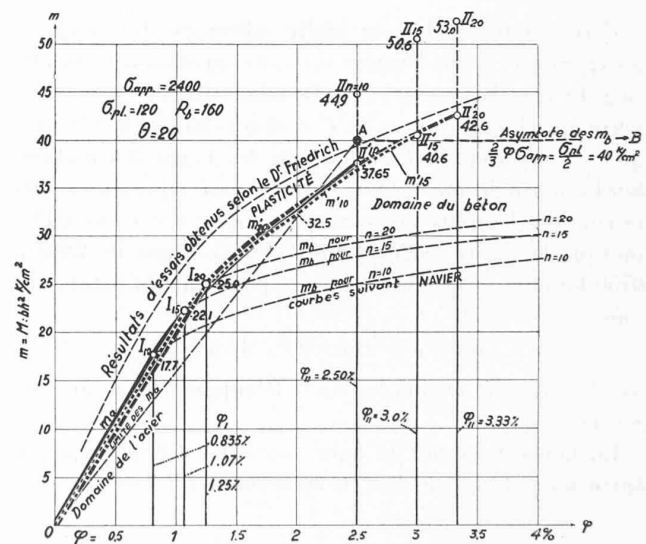
Il contient ainsi l'expression  $T_I$  des résistances spécifiques et un second terme, où ne paraissent que les dimensions du profil de poutre. L'axe neutre de Navier

$$\xi = -n\phi + \sqrt{n\phi(2+n\phi)}$$

conduit, par élimination de  $J$  et  $\xi$  dans l'équation de  $m'$ , à

$$6) m' = T_I \times \frac{2n\phi}{3} [n^2\phi^2 + 3n\phi + 1,5 - (2+n\phi)\sqrt{n\phi(2+n\phi)}] \\ = T_I \times \text{Constante de construction.}$$

Cette équation est généralisable aux profils fléchis munis d'une table de compression. La parenté, qui existe entre la capacité de résistance  $T_I$  et la loi de cumul Emperger, permet de penser qu'une généralisation serait possible au cas de flexion composée.



n = 10		n = 15	
I $\phi = 0,835\%$	$m = 17,7 \text{ kg/cm}^2$	I $\phi = 1,07\%$	$m = 21,95 \text{ kg/cm}^2$
II $\phi = 2,50$	$m = 44,9$	II $\phi = 3,00$	$m = 50,40$
II' $\phi = 2,50$	$m = 37,9$	II' $\phi = 3,00$	$m = 40,75$
n = 20			
I $\phi = 1,25\%$	$m = 24,85 \text{ kg/cm}^2$		
II $\phi = 3,33$	$m = 53,0$		
II' $\phi = 3,33$	$m = 42,45$		

Fig. 7. — Lignes d'égale capacité de résistance selon rapport modulaire  $n$ .



## § 8. Résultats d'essais.

L'équation (6) de  $m'$  est satisfaite par les coordonnées  $(\varphi_I, m_I)$  du point critique I, où elle se raccorde à la courbe éq. 2); elle permet ensuite d'explorer tout le domaine du béton, où elle donne des réponses satisfaisantes aussi longtemps que l'abscisse  $C = \theta \cdot \varphi$  (fig. 8) reste inférieure à l'unité; c'est du reste la limite pratique des profils les plus chargés d'acier, qu'on puisse réaliser dans la construction.

Le couple unitaire réduit

$$R = m' : \sigma_{pl}$$

a l'avantage de permettre le groupement serré des points relatifs à toutes sortes de conditions de résistance les plus divergentes.

D'autre part, le passage du couple  $m$  de Navier (éq. 2) à  $m'$  d'égale capacité (éq. 6) se fait, comme le montre la figure 8, sans point singulier.

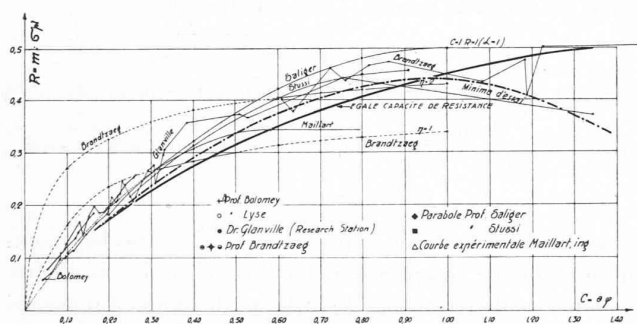


Fig. 8. — Résultats d'essais et égale capacité de résistance.

Cette figure établit la limite inférieure des résultats d'expériences d'importantes séries des professeurs Brandtzaeg, Lyse et Bolomey, et du Dr Glanville. Ces séries couvrent un champ qui va de  $C = \theta \varphi$  inférieur à 0,10 jusqu'à  $C$  supérieur à l'unité; tous les types d'armature, faible, normale ou en excès, sont ainsi représentés; les résistances les plus diverses concourent à cet ensemble, puisque la limite élastique de l'acier y passe de 2800 à 6750 kg/cm<sup>2</sup>, et que la résistance plastique du béton, admise à

$$\sigma_{pl} = \text{environ } 60 \% \text{ de } \beta_{c\text{ute}}$$

oscille entre 50 et 400 kg/cm<sup>2</sup>; le rapport  $\theta$  va ainsi de 8 à 60.

La figure 8 établit la ligne moyenne d'égale capacité entre les points calculés; le battement est faible.

## § 9. Fixation des dimensions.

L'équation habituelle du moment fléchissant de service

$$M_{fl} = b h'^2 \times m_r : S$$

où  $S$  désigne le coefficient de sécurité, conduit à la forme usuelle de détermination des profils rectangulaires à armature unilatérale

$$h' = \sqrt{S/m_r} \times \sqrt{M_{fl} : b} = C_I \sqrt{M/b}.$$

Le coefficient  $S$  de sécurité émane des règlements en vigueur.

Dans le domaine de l'acier, celui de Navier donc, le couple unitaire de rupture est (éq. 2)

$$m_r = \varphi \cdot \rho \cdot \sigma_{app}$$

Pour  $S = S_a$ , on a alors

$$C_I = \sqrt{\frac{S_a}{\varphi \cdot \rho \cdot \sigma_{pp}}}$$

résultat valable jusqu'au point critique I.

Au delà de ce point, le couple de rupture prend la valeur  $m'$  (éq. 6), et l'on a

$$C_{II} = \sqrt{S : m'} = \sqrt{1 : m_{adm}}$$

On en met le résultat sous la forme :

TABLEAU I

de calcul des profils rectangulaires  $bh' = b(h - a)$   
sans armature comprimée ( $n = 10$ )

Sécurité  $S = 2$

$$(S_a = \sigma_{app} : \sigma_a \quad S_b = \sigma_{pl} : \sigma_b)$$

Pourcentage en acier $\varphi$	Béton ordin. $\sigma_b = 66 \text{ kg/cm}^2$ = 60% de 220 kg/cm <sup>2</sup> : 2		Bét. d. qual $\sigma_b = 90 \text{ kg/cm}^2$ = 60% de 300 kg/cm <sup>2</sup> : 2	
	Acier doux $\sigma_a = 1200 \text{ kg/cm}^2$ ( $\theta = 18,2$ )	Acierspécial $\sigma_a = 1750 \text{ kg/cm}^2$ ( $\theta = 26,5$ )	Acier doux $\sigma_a = 1220 \text{ kg/cm}^2$ ( $\theta = 13,3$ )	Acierspécial $\sigma_a = 1750 \text{ kg/cm}^2$ ( $\theta = 19,4$ )
$\varphi_I$	0,98 %	0,52 %	1,62 %	0,88 %
$\varphi_{II}$	2,88 %	1,62 %	4,52 %	2,62 %
$\varphi = 0,25\%$	$C_I = 0,597$	$C_I = 0,495$	$C_I = 0,597$	$C_I = 0,495$
$= 0,50$	0,428	0,354	0,428	0,354
$0,75$	0,353	$C_{II} = 0,301$	0,353	0,292
$\varphi = 1,00$	0,307	0,271	0,307	$C_{II} = 0,258$
$1,25$	$C_{II} = 0,286$	0,250	0,287	0,238
$1,50$	0,267	0,235	0,254	0,222
$1,75$	0,254	0,223	$C_{II} = 0,239$	0,213
$\varphi = 2,00$	0,244	—	0,229	0,204
$2,25$	0,234	—	0,221	0,196
$2,50$	0,226	—	0,214	0,190
$2,75$	0,221	—	0,208	0,185
$\varphi = 3,00\%$	0,216	—	0,202	—

## § 10. Degré de sécurité selon Ordonnance fédérale de 1935.

L'ordonnance suisse fonde le calcul des profils rectangulaires sur les critères que voici :

- la qualité des matériaux : acier doux ou acier spécial, béton normal ou béton à haute résistance ;
- la hauteur des profils : épaisseurs jusqu'à 12 cm, entre 12 et 20 cm, et au-dessus de 20 cm ;
- la dimension transversale : profils de poutres ou dalles de grande largeur ;
- le rapport entre tension effective dans l'acier et tension maximum autorisée.

Ce dernier critère accentue la sécurité des profils élancés, dans lesquels le béton peut travailler jusqu'à 20 kg/cm<sup>2</sup> au-dessus de la contrainte normale, à condition que l'acier reste en dessous du taux normalement admissible, et ceci d'une marge conditionnée qui peut atteindre 400 kg/cm<sup>2</sup>.

Les caractéristiques des matériaux types sont :

- acier doux  $\sigma_{app} = 2400 \text{ kg/cm}^2$   
 acier spécial  $\sigma_{app} = 3500 \text{ kg/cm}^2$   
 béton normal  $\beta_{28} = 220 \text{ kg/cm}^2$   
 d'où  $\sigma_{pl} \sim 60 \%$  de  $220 = 132 \text{ kg/cm}^2$   
 béton de qualité  $\beta_{28} = 300 \text{ kg/cm}^2$   
 d'où  $\sigma_{pl} 60 \%$  de  $300 = 180 \text{ kg/cm}^2$ .

On trouve ainsi :

TABLEAU II

Types de profils	Contraintes		Arma- ture (pour- cent) $\varphi$ ‰	$C =$ $\theta \cdot \varphi$	$R_{adm} =$ $m_s : \sigma_{pl}$ $=$ $\varphi \rho \sigma_a :$ $\sigma_{pl}$	$R_r$ (Calcul rup- ture)	$S =$ $R_r :$ $R_{adm}$ Sécurité théoriq.
	Acier	Béton					
	$\sigma_a$	$\sigma_b$					
	kg/cm <sup>2</sup>						
1° Béton normal et acier doux $\theta = 18,2$							
a) Dalles jusqu'à 12 cm	1200	50	0,61	0,111	0,050	0,103	2,06
	1000	60	1,12	0,204	0,075	0,170	2,25
	800	70	2,04	0,372	0,104	0,265	2,55
b) Poutres de 12 à 20 cm	1200	60	0,83	0,151	0,067	0,128	1,92
	1000	70	1,44	0,262	0,094	0,204	2,16
	800	80	2,50	0,455	0,126	0,302	2,40
c) Poutres de plus de 20 cm	1200	70	1,08	0,197	0,086	0,161	1,87
	1000	80	1,77	0,322	0,114	0,240	2,10
	800	90	2,98	0,545	0,149	0,332	2,23
d) Dalles de 12 à 20 cm	1400	60	0,64	0,117	0,061	0,108	1,76
	1200	70	1,07	0,195	0,085	0,160	1,88
	1000	80	1,77	0,323	0,114	0,241	2,11
e) Dalles de plus de 20 cm	1400	70	0,83	0,151	0,079	0,131	1,66
	1200	80	1,33	0,242	0,105	0,195	1,86
	1000	90	2,13	0,390	0,136	0,276	2,02
2° Béton de qualité et acier doux $\theta = 13,3$							
f) Dalles jusqu'à 12 cm	1200	70	1,08	0,144	0,063	0,128	2,02
	1000	80	1,77	0,235	0,084	0,187	2,22
	800	90	2,98	0,397	0,109	0,278	2,55
g) Poutres de 12 à 20 cm	1200	85	1,46	0,194	0,084	0,160	1,90
	1000	95	2,32	0,309	0,108	0,234	2,15
	800	105	3,72	0,485	0,134	0,318	2,38
h) Poutres supérieures à 20 cm	1200	100	1,88	0,250	0,106	0,200	1,89
	1000	110	2,88	0,383	0,132	0,273	2,06
	800	120	4,50	0,609	0,160	0,352	2,21
i) Dalles de 12 à 20 cm	1400	85	1,14	0,152	0,078	0,133	1,70
	1200	95	1,74	0,231	0,099	0,185	1,87
	1000	105	2,68	0,357	0,124	0,260	2,10
j) Dalles de plus de 20 cm	1400	100	1,49	0,198	0,100	0,166	1,66
	1200	110	2,18	0,290	0,122	0,225	1,85
	1000	120	3,28	0,437	0,148	0,295	2,00
3° Béton de qualité et acier spécial $\theta = 19,4$							
k) Dalles jusqu'à 12 cm	1600	70	0,67	0,130	0,054	0,118	2,18
	1400	80	1,04	0,202	0,071	0,165	2,32
	1200	90	1,60	0,311	0,091	0,235	2,58
l) Poutres de 12 à 20 cm	1600	85	0,92	0,178	0,072	0,150	2,12
	1400	95	1,37	0,266	0,093	0,210	2,26
	1200	105	2,03	0,395	0,114	0,279	2,45
m) Poutres de plus de 20 cm	1600	100	1,20	0,233	0,093	0,182	1,97
	1400	110	1,73	0,335	0,115	0,248	2,15
	1200	120	2,50	0,483	0,138	0,312	2,25
n) Dalles de 12 à 20 cm	1700	85	0,83	0,160	0,070	0,138	1,97
	1500	95	1,23	0,238	0,089	0,190	2,13
	1300	105	1,79	0,347	0,110	0,255	2,30
o) Dalles de plus de 20 cm	1700	100	1,09	0,212	0,090	0,173	1,93
	1500	110	1,55	0,302	0,111	0,232	2,10
	1300	120	2,20	0,428	0,134	0,294	2,19

La figure 9 illustre le degré de sécurité théorique réalisé par ces exigences. Ce degré est très variable, comme le montrent les points « R admissible » qui couvrent une bande de 15 à 20 % de l'espace limité par les minima d'essai.

Le tableau souligne le fait connu de ses fortes valeurs dans les petits profils et les grosses contraintes du béton.

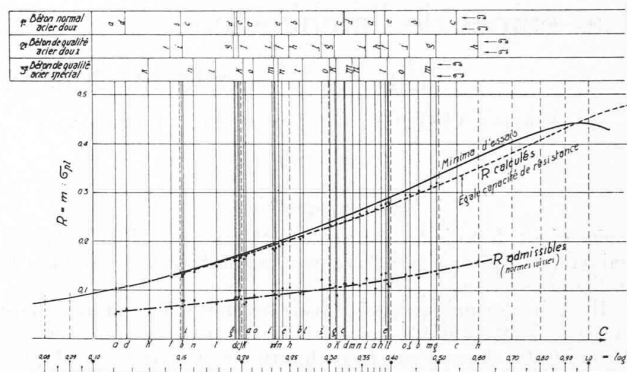


Fig. 9. — Degré de sécurité croissant assuré par l'ordonnance fédérale.

Le minimum de sécurité théorique, 1,66, est donné par les dalles de plus de 20 cm, en béton ordinaire et acier doux (groupe e). Le maximum, 2,58 (groupe k), est assuré par les dalles jusqu'à 12 cm en béton de qualité et acier spécial.

#### Conclusions.

Les cinq premières conclusions ci-après résultent des paragraphes de mêmes rangs. Les trois dernières sont d'allure plus générale.

1. Le règlement suisse de 1909 contenait déjà la prévision d'une utilisation rationnelle de l'acier et du béton au delà du point critique de Navier.

2. Cette indication faisait prévoir une action de l'armature au delà de la limite des normes.

3. Les essais d'éprouvettes fléchies à forte armature ont confirmé le fait, que le couple de rupture dépasse fortement les valeurs fournies par l'hypothèse d'élasticité dans le domaine du béton.

4. La fissuration dépend de la nature des aciers d'armature ; elle ne paraît pas s'opposer à l'emploi des aciers à haute limite apparente dans la construction des poutres fléchies abritées des intempéries ; il faudra définir son effet sur le rapport entre couple de rupture instantané et résistance de la poutre sous l'effort de durée.

5. La méthode de Navier donne une image satisfaisante de l'équilibre intérieur en période d'élasticité des deux matériaux. Les méthodes de calcul basées sur l'effet de la plasticité, sur la constance de capacité de résistance en particulier, permettent une évaluation sûre du couple de rupture d'éprouvettes normalement constituées.

6. Il est nécessaire d'élucider l'influence, sur la poutre fléchie, du palier de limite apparente et de la résistance de l'acier durant la période d'écoulement.

7. Il faudra examiner la manière dont les prescriptions tiendront compte de la résistance à la durée du prisme fléchi, pour permettre l'utilisation économique des profils de béton à haute résistance et à forte armature.

8. Le rapport modulaire  $n$  ne porte pas la responsabilité des divergences entre résultats du calcul normalisé suivant Navier et des méthodes basées sur la plasticité.

Lausanne, le 7 juillet 1939.