

<b>Zeitschrift:</b>	Bulletin technique de la Suisse romande
<b>Band:</b>	55 (1929)
<b>Heft:</b>	25
<b>Artikel:</b>	Calcul de systèmes hyperstatiques d'ordre élevé par décomposition en systèmes fondamentaux
<b>Autor:</b>	Paschoud, Maurice
<b>DOI:</b>	<a href="https://doi.org/10.5169/seals-42696">https://doi.org/10.5169/seals-42696</a>

### Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 23.02.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

## Calcul de systèmes hyperstatiques d'ordre élevé par décomposition en systèmes fondamentaux<sup>1</sup>,

par M. le Dr MAURICE PASCHOUUD, Recteur de l'Université de Lausanne.

(Suite et fin.)<sup>2</sup>

### Bibliographie :

1. KLEINLOGEL : *Der durchlaufende Träger*, 1<sup>re</sup> édit. 1929.
2. KLEINLOGEL : *Rahmenformeln*, 5<sup>e</sup> édit. 1925.
3. KLEINLOGEL : *Mehrstufige Rahmen*, 2<sup>e</sup> édit. 1927.
4. SALIGER : *Der Eisenbeton*, 5<sup>e</sup> édit. 1925.

Dans cette leçon, qui a un caractère essentiellement pratique, nous nous bornons à considérer des constructions du type de celles que M. Kleinlogel calcule dans ses volumes et nous employons les notations de cet auteur.

Rappelons d'abord certaines notions.

### A) Théorème des trois moments. (1. page 26.)

Si  $M_U$ ,  $M_V$  et  $M_W$  sont les moments sur trois appuis consécutifs d'une poutre continue, on a la relation :

$$(1) \left\{ \begin{array}{l} M_U K_m + 2M_V (K_m + K_n) + M_W K_n + R_m K_m + \\ + L_n K_n = 0. \end{array} \right.$$

Les indices  $m$  et  $n$  se rapportent aux travées qui relient les appuis  $UV$  et  $VW$  respectivement :

$$K_m = \frac{I_c l_m}{I_m l_c}, \quad K_n = \frac{I_c l_n}{I_n l_c},$$

$l$  est la longueur d'une travée,  $I$  son moment d'inertie,  $l_c$  et  $I_c$  sont une longueur et un moment d'inertie auxiliaires, enfin  $R$  et  $L$  sont ce qu'en allemand on appelle

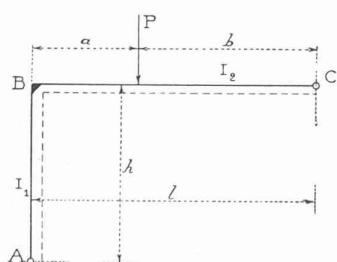


Fig. 1.

les termes dus aux charges, termes qui s'introduisent dans le calcul quand on emploie les méthodes de Mohr.

Ce théorème qui s'applique dans le cas où les 3 appuis ne subissent pas de dénivellation relative permet, par exemple, le calcul du semi-portique représenté dans la figure 1 (2. page 6), où le nœud  $B$  reste fixe, pourvu que l'on néglige, comme on le fait généralement, les défor-

<sup>1</sup> Deuxième leçon faite au Cours théorique et pratique de béton armé, organisé par la Société suisse des ingénieurs et des architectes, à Lausanne, du 8 au 12 octobre dernier.

<sup>2</sup> Voir *Bulletin technique* du 30 novembre 1929, page 281.

mations dues aux efforts tranchants et aux efforts normaux. Il s'écrit alors, en prenant  $l_c = l$  et  $I_c = I_2$  :

$$0 + 2M_B(K+1) + 0 + 0 + \frac{Pab(l+b)}{l^2} = 0,$$

$$\text{d'où } M_B = -\frac{Pab(l+b)}{2l^2(K+1)}, \quad \text{avec } K = \frac{h}{l} \frac{I_2}{I_1}.$$

Le moment fléchissant en  $B$  étant connu, les réactions d'appui se calculent sans difficulté au moyen des conditions d'équilibre.

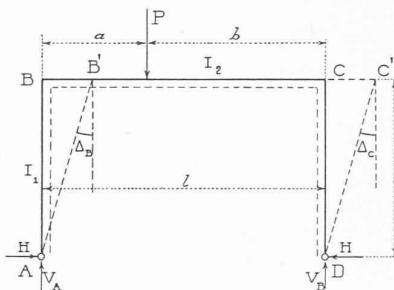


Fig. 2.

Si nous voulions calculer le portique à 2 articulations de la figure 2, (2. page 102), il faudrait généraliser la relation (1) pour la rendre applicable au cas où les 3 appuis subissent des dénivellations relatives. En effet, les nœuds  $B$  et  $C$  peuvent subir des déplacements horizontaux  $BB'$  et  $CC'$ .

En appliquant cette relation généralisée aux nœuds  $A$ ,  $B$ ,  $C$ , elle donnerait (4. page 531) :

$$(2) \quad 2M_B(K+1) + M_C + \frac{Pab(l+b)}{l^2} = \frac{6EI_2}{l} \Delta_B,$$

et aux nœuds  $B$ ,  $C$ ,  $D$ ,

$$(3) \quad M_B + 2M_C(K+1) + \frac{Pab(l+b)}{l^2} = \frac{6EI_2}{l} \Delta_C.$$

$\Delta_B$  est la variation subie par l'angle  $ABC$  ( $\widehat{ABC}' - \widehat{ABC}$ ) et  $\Delta_C$  a une signification analogue.

Les charges étant verticales,  $M_B = M_C = Hh$ .

D'autre part

$$(4) \quad \Delta_B + \Delta_C = 0. \quad (4. \text{ page } 538.)$$

En additionnant (2) et (3) membre à membre et en tenant compte de (4), on obtient tout de suite

$$M_B = M_C = -\frac{3Pab}{2l(2K+3)} \quad \text{avec } K = \frac{I_2}{I_1} \frac{h}{l}.$$

### B) Théorème des quatre moments.

Si, au lieu de cadres simples, on avait à calculer une *Poutre continue sur appuis élastiques* comme celle qui est représentée dans la figure 3, il faudrait utiliser, au lieu du théorème des 3 moments, celui des 4 moments qui en est une généralisation immédiate (4. page 555).

Appliqué aux appuis  $B$ ,  $D$ ,  $F$ , il donne

$$M_{B_s} K_m + 2M_{D_1} K_m + 2M_{D_3} K_n + M_{F_1} K_n + R_m K_m + \\ + L_n K_n = 0.$$

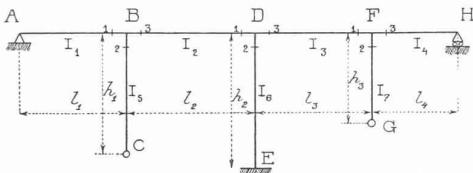


Fig. 3.

$M_{B_2}$  est le moment fléchissant dans la poutre immédiatement à droite du nœud  $B$ ,  $M_{D_1}$  ce moment immédiatement à gauche de  $D$  et ainsi de suite. Si l'appui  $A$ , au lieu d'être fixe, est mobile sur une horizontale, on a un *cadre multiple* dont l'entretoise  $AH$  peut se déplacer horizontalement sous l'action des charges. On calculerait ce cadre au moyen du théorème des 4 moments généralisé qui, appliqué, par exemple, aux appuis  $B, D, E$  s'écrirait

$$(5) \quad \left\{ \begin{array}{l} M_{B_2} K_m + 2M_{D_1} K_m + 2M_{D_2} K_n + M_E K_n + \\ + R_m K_m + L_n K_n = \frac{6EI_c}{l} \Delta_{D_{12}}. \end{array} \right.$$

C) Les théorèmes des 3 et des 4 moments permettent de calculer tous les cadres à éléments rectilignes traités par Kleinlogel. Mais, lorsque ces cadres sont compliqués, les calculs sont souvent longs et très pénibles. Ces calculs se simplifient beaucoup si l'on décompose les systèmes proposés en systèmes fondamentaux, comme le montre l'exemple suivant, très simple, mais qui fait bien saisir la portée de la méthode.

Après cet exemple, nous en traiterons d'autres, plus compliqués et nous terminerons par quelques considérations générales.

D) Considérons la poutre continue sur appuis élastiques de la figure 4. (3. page 36). C'est un système d'ordre

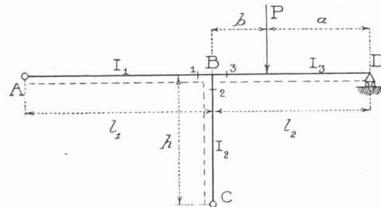


Fig. 4.

2 que l'on peut calculer en appliquant deux fois le théorème des 4 moments, à  $AB_1B_2C$ , puis à  $AB_1B_3D$ .

Mais, on peut procéder autrement, en décomposant le système proposé en deux autres, l'un étant une poutre à deux appuis simples  $AB$ , l'autre un semi-portique à deux articulations (où  $D$  est fixe puisque dans le système proposé  $A$  est fixe), comme il est indiqué dans la figure 5.

Pour tenir compte de la continuité, on fait agir sur chacun de ces deux systèmes fondamentaux un couple de moment  $M$  qu'il s'agit de déterminer et qui n'est pas autre chose que le moment  $M_{B_1}$  de la poutre proposée. Calculons le semi-portique  $CBD$  quand il est sollicité par la force  $P$ . Si  $M'_{B_2} = M'_{B_3}$  sont les moments fléchissants

produits de part et d'autre de  $B$  par cette charge, on a, d'après le calcul fait au § A, en tenant compte des changements de notations,

$$M'_{B_2} = M'_{B_3} = -\frac{Pab(l_2 + a)}{2l_2^2(K+1)}, \quad \text{avec } K = \frac{l_3}{l_2} \frac{h}{l_2}.$$

Pour trouver les moments produits de part et d'autre de  $B$ , dans ce semi-portique, par le couple  $M$ , on peut utiliser la relation précédente en supposant que  $P$  aug-

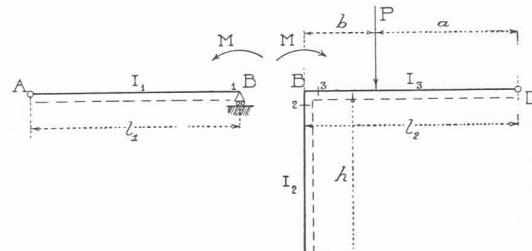


Fig. 5.

mente indéfiniment, que  $b$  tend vers zéro, mais de façon que le produit  $Pb$  tende vers  $M$ . Alors,  $a$  tend vers  $l_2$  et l'on a

$$M''_{B_2} = M''_{B_3} = -\frac{M}{K+1}.$$

Si le semi-portique est sollicité à la fois par  $P$  et par  $M$ , le principe de superposition donne,

$$(6) \quad M_{B_2} = M_{B_3} = M_{B_2} + M''_{B_2} = -\frac{Pab(l_2 + a)}{2l_2^2(K+1)} - \frac{M}{K+1}.$$

Il reste à exprimer que, réunis, les deux systèmes fondamentaux constituent le système proposé.

Le théorème des 4 moments appliqué à  $AB_1B_2C$  donne la relation d'où l'on tire la valeur de  $M = M_{B_1}$  indiquée par Kleinlogel

$$M_{B_1} = -\frac{Pa(1-\alpha^2)K_2}{2N}, \quad \text{où } K_1 = \frac{l_1}{h} \frac{I_2}{I_1},$$

$$K_2 = \frac{l_2}{h} \frac{I_2}{I_3} = \frac{1}{K}, \quad N = K_1 + K_2 + K_3 \quad \text{et} \quad \alpha = \frac{a}{l_2}.$$

$M_{B_1}$  connu, (6) donne  $M_{B_2}$  et le calcul se termine sans difficulté. On a ainsi remplacé le calcul d'un système d'ordre 2 par celui d'un système d'ordre 1 et d'un système isostatique. Il suffit d'appliquer *une seule fois* le théorème des 4 moments pour arriver au résultat.

Au lieu de résoudre un système de 2 équations à 2 inconnues, on n'a eu à résoudre que des équations à une inconnue.

Le calcul a été facilité par le fait que nous avions calculé, au préalable, le semi-portique à deux articulations. Nous aurions du reste trouvé les résultats nécessaires dans 2. Si donc l'on possède le volume 2, mais pas le volume 3, le calcul du système proposé, d'ordre 2, se fait en résolvant simplement une équation à une inconnue.

L'avantage ainsi obtenu n'est pas très sensible dans l'exemple qui précède parce que le système à calculer est simple. Il deviendra plus net sur les exemples suivants.

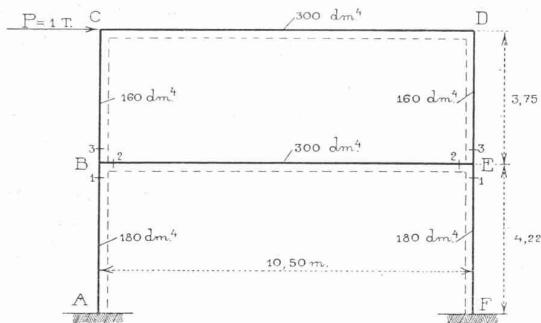


Fig. 6.

E) Considérons le cadre à deux étages de la figure 6, encastré. C'est un système d'ordre 6 dont les formules ne sont pas données dans 3 où les cadres à 2 étages considérés sont articulés à la base. Le calcul direct de ce cadre est assez long. Voyons comment ce calcul se simplifie quand on décompose ce cadre en systèmes fondamentaux de façon à pouvoir utiliser 2.

Le premier de ces systèmes fondamentaux sera le cadre supérieur (fig. 7) supposé à deux articulations et

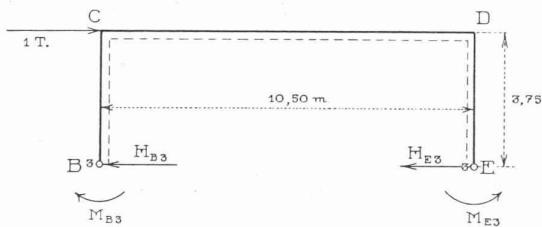


Fig. 7.

sollicité par la force  $P$ , par deux couples  $M_{B_3}$  et  $M_{E_3}$  et par les forces  $H_{B_3}$  et  $H_{E_3}$  dont il n'y a pas lieu de tenir compte puisqu'on néglige les déformations dues aux efforts normaux.

Le second (fig. 8) sera le cadre inférieur, encastré et sollicité par les deux forces  $H_B$  et  $H_E$  dont la somme est 1 Tonne et par les couples  $M_{B_3}$  et  $M_{E_3}$ .

Pour le premier système, on obtient tout de suite (2. pages 114 et 128)

$$(7) \quad \left\{ \begin{array}{l} M_C = +1,875 + 0,423 M_{B_3} - 0,577 M_{E_3} \\ M_D = -1,875 - 0,577 M_{B_3} + 0,423 M_{E_3} \end{array} \right.$$

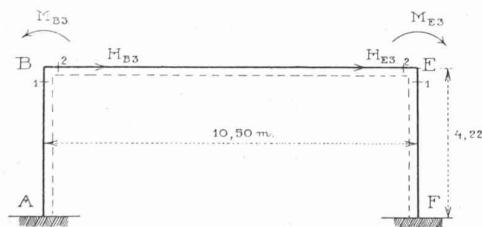


Fig. 8.

Pour le second on trouve (2. pages 139 et 149)

$$(8) \quad \left\{ \begin{array}{l} M_A = -1,262 - 0,088 M_{B_3} - 0,287 M_{E_3} \\ M_{B_1} = +0,845 + 0,475 M_{B_3} + 0,275 M_{E_3} \\ M_{B_2} = +0,845 - 0,525 M_{B_3} + 0,275 M_{E_3} \\ M_{E_1} = -0,845 + 0,275 M_{B_3} - 0,525 M_{E_3} \\ M_E = -0,845 + 0,275 M_{B_3} + 0,475 M_{E_3} \\ M_F = +1,262 - 0,287 M_{B_3} - 0,088 M_{E_3} \end{array} \right.$$

Il faut maintenant exprimer que, réunis, les deux systèmes fondamentaux constituent le système proposé.

On a évidemment

$$\Delta_{B_3} + \Delta_C = 0 \quad \text{et} \quad \Delta_{E_3} + \Delta_D = 0.$$

La première de ces relations donne, si l'on calcule  $\Delta_{B_3}$  et  $\Delta_C$  au moyen du théorème des 4 moments

$$3,90 M_{B_3} - 1,92 M_{E_3} + 4,78 = 0$$

et la deuxième

$$-1,92 M_{B_3} + 3,90 M_{E_3} - 4,78 = 0.$$

De ces deux équations on tire

$$M_{B_3} = -0,82 \text{ mt}, \quad M_{E_3} = +0,82 \text{ mt}.$$

et les équations (7) et (8) donnent

$$\begin{aligned} M_C &= +1,06 \text{ mt}, \quad M_D = -1,06 \text{ mt}, \\ M_A &= -1,43 \text{ mt}, \quad M_{B_1} = +0,68 \text{ mt}, \\ M_{B_2} &= +1,50 \text{ mt}, \quad M_{E_2} = -1,50 \text{ mt}, \\ M_{E_1} &= -0,68 \text{ mt}, \quad M_F = +1,43 \text{ mt}. \end{aligned}$$

Le premier système fondamental est d'ordre 1, le deuxième d'ordre 3 et il a suffi, ces systèmes calculés, de résoudre 2 équations à 2 inconnues pour calculer le système proposé qui est d'ordre 6. Le calcul que nous venons de faire est beaucoup plus rapide que le calcul direct et il est particulièrement simple si l'on possède 2.

F) En utilisant 3, le calcul du système précédent peut encore se faire de la façon suivante. On considère comme système fondamental celui de la figure 9, à 2 articulations,

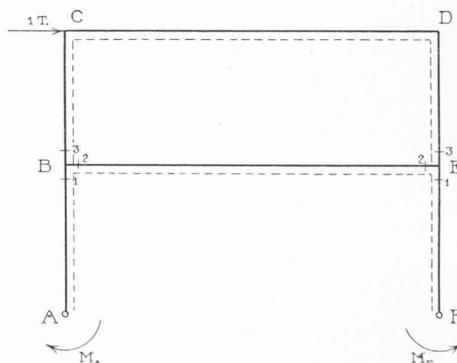


Fig. 9

sollicité par la force de 1 T. en  $C$  et par deux couples inconnus, de moments  $M_A$  et  $M_F$  appliqués en  $A$  et en  $F$  respectivement. On trouve alors (3. pages 336 et 326).

$$\begin{aligned} M_{B_1} &= +2,110 + 0,343 M_A - 0,657 M_F, \\ M_{B_2} &= +2,695 + 0,372 M_A - 0,464 M_F, \\ M_{B_3} &= -0,585 - 0,034 M_A - 0,200 M_F, \\ M_C &= +1,290 + 0,100 M_A - 0,066 M_F, \\ M_D &= -1,290 - 0,066 M_A + 0,100 M_F, \\ M_{E_1} &= +0,585 - 0,200 M_A - 0,034 M_F, \\ M_{E_2} &= -2,695 - 0,464 M_A + 0,372 M_F, \\ M_{E_3} &= -2,110 - 0,657 M_A + 0,343 M_F. \end{aligned}$$

Pour que, sous l'action de la charge et des deux couples, le système fondamental soit identique au système proposé, il faut que l'on ait

$$\Delta_A + \Delta_{B_{12}} = 0 \quad \text{et} \quad \Delta_F + \Delta_{E_{12}} = 0.$$

En appliquant 2 fois le théorème des 4 moments, la première condition donne

$$2,01M_A + 2,01M_{B_1} + 2M_{B_2} + M_{E_1} = 0$$

$$\text{ou} \quad 2,98M_A - 1,88M_F + 6,95 = 0.$$

La deuxième donne ensuite

$$-1,88M_A + 2,98M_F - 6,95 = 0$$

et l'on trouve comme plus haut,

$$M_A = -1,43 \text{ mt} \quad \text{et} \quad M_F = +1,43 \text{ mt.}$$

G) La méthode employée ci-dessus peut se résumer comme suit : Par des sections appropriées, on partage le système proposé en systèmes fondamentaux, en remplaçant, dans chaque coupure, la continuité par un moment fléchissant, un effort tranchant et un effort normal. On calcule chacun des systèmes fondamentaux quand ils sont sollicités par les charges et les forces qui tiennent lieu de la continuité. On exprime enfin qu'à l'endroit où l'on a fait des coupures, les relations qui, dans le système proposé, lient les déformations, sont vérifiées.

Bien entendu, le nombre des systèmes fondamentaux varie dans chaque cas. Si  $K$  est l'ordre du système proposé,  $K_i$  celui du *ime* système fondamental, on aura

$$K = \sum K_i + e$$

$e$  étant le nombre d'équations à  $e$  inconnues qu'il faudra résoudre pour effectuer le calcul.

Il est clair que la décomposition en systèmes fondamentaux peut se faire de bien des façons différentes. Dans chaque cas, on choisira celle qui conduit aux calculs les plus simples et les plus rapides. Si l'on possède les volumes 2 et 3 de Kleinlogel, on s'arrangera, autant que possible, de façon à obtenir comme systèmes fondamentaux des systèmes calculés dans ces ouvrages. Ainsi, le champ d'application de ces volumes, si utiles déjà, est considérablement élargi et l'on pourra, en allant du simple au compliqué, s'attaquer au calcul de systèmes d'ordre très élevé et dont l'étude directe conduirait à des calculs d'une longueur rebutante et d'une exactitude sujette à caution.

Les constructeurs ont coutume de représenter le comportement d'une turbine en fonction de trois paramètres essentiels — le débit ( $Q$ ), la vitesse ( $n$ ), exprimée en nombre de tours par minute, et le rendement ( $e$ ) — par une *surface topographique* dont  $Q$  et  $n$  sont, respectivement, l'ordonnée et l'abscisse et  $e$  la « cote ». Afin d'éliminer l'influence des variations de la hauteur de chute ( $H$ ) sur les variables  $Q$  et  $n$ , celles-ci sont rapportées, à l'aide des formules bien connues, à une chute arbitraire mais constante qui est, généralement, prise égale à un mètre.

Pour les mêmes raisons de convenance,  $Q$  et  $n$  peuvent être rapportés à cette chute unité *et*, simultanément, au diamètre unité de la roue ( $n_1^1, Q_1^1$ ). Ceci posé, les diagrammes de la figure 1 se lisent immédiatement. Sur la surface topographique [ $e = f(Q, n)$ ], le faisceau de lignes à peu près rectilignes représente la variation du débit en fonction de la vitesse, à ouverture ( $\alpha$ ) constante du distributeur, chacune de ces lignes correspondant à une ouverture déterminée. Le diagramme supérieur [ $e = f(n)_{\alpha=const.}$ ] représentant les variations du rendement à ouverture constante du distributeur, en fonction de la vitesse, est la projection sur un plan vertical et parallèle à l'axe des  $n$  des intersections de la surface topographique par des cylindres verticaux ayant pour directrices respectives les lignes  $Q = f(n)_{\alpha=const.}$ . Enfin, le diagramme de droite représente les variations du rendement en fonction du débit, à vitesse constante, [ $e = f(Q)_{n=const.}$ ] autrement dit, les sections de la surface topographique par des plans verticaux parallèles à l'axe des  $Q$ . La comparaison des surfaces topographiques correspondant à des turbines de  $n_s$  (vitesse « caractéristique »  $n_s = n_1^1 \sqrt{10Q_1^1}$ ) différents révèle que les ellipses (courbes de niveau) figuratives du rendement s'aplatissent de plus en plus et que leur grand axe s'oriente de plus en plus obliquement sur l'axe des ( $Q$ ) au fur et à mesure que  $n_s$  croît. De sorte que les courbes  $e = f(Q)_{n=const.}$  ou  $e = f(P)_{n=const.}$  ( $P$  = puissance) affectent, pour les  $n_s$  élevés des turbines-hélices à pales fixes, la forme en « crochet » (voir fig. 2), caractéristique des turbines Kaplan.

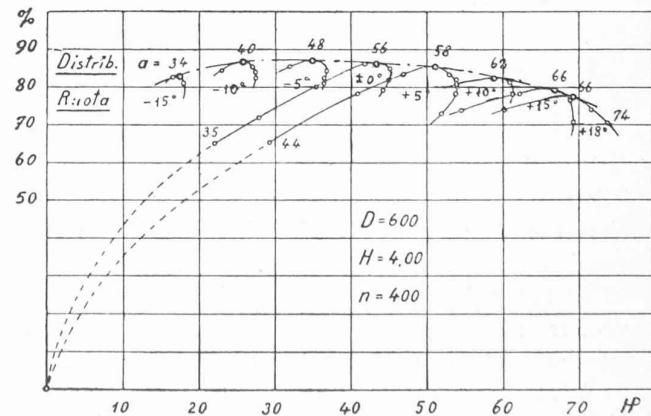


Fig. 2.

Rendements en fonction de la charge d'une turbine Kaplan. Courbes en « crochet » correspondant aux pales supposées fixes et courbe-enveloppe correspondant aux pales pivotantes de la turbine.

Distrib. = distributeur. — Ruota = roue.

## Sur le principe des turbines Kaplan.

Les turbines hydrauliques du type « hélice », à pales fixes ou à pales pivotantes, étant en grande vogue, M. G. Buchi caractérise donc ces machines avec beaucoup d'à propos, dans le numéro d'octobre dernier de *L'Energia Elettrica* (Milan), en une étude remarquable par sa clarté et sa précision, comme on en jugera par le résumé ci-dessous des chapitres exposant le principe des turbines *Kaplan*.