Zeitschrift: Bulletin technique de la Suisse romande
Band: 51 (1925)
Heft: 23

Inhaltsverzeichnis

51e année 7 novembre 1925 N° 23

BULLETIN TECHNIQUE DE LA SUISSE ROMANDE

Réd. : Dr H. Demierre, ing. Paraissant tous les 15 jours

ORGANE DE PUBLICATION DE LA COMMISSION CENTRALE POUR LA NAVIGATION DU RHIN
ORGANE DE L'ASSOCIATION SUISSE D'HYGIÈNE ET DE TECHNIQUE URBAINES
ORGANE EN LANGUE FRANÇAISE DE LA SOCIÉTÉ SUISSE DES INGÉNIEURS ET DES ARCHITECTES

Le problème de la torsion et l'analogie hydrodynamique de M. Boussinesq,

par Maurice PASCHOUD, ingénieur, professeur à l'Université de Lausanne.

I. — Il est souvent utile de comparer entre eux des problèmes qui se posent dans des chapitres différents de la Physique mathématique. Une telle comparaison est particulièrement avantageuse lorsque ces problèmes, totalement distincts au premier abord, sont les mêmes analytiquement, c'est-à-dire lorsque leur résolution exige l'intégration des mêmes équations différentielles, avec les mêmes conditions aux limites. Nous dirons dans ce dernier cas que les problèmes en question sont *analogues*.

Quand deux problèmes sont analogues, toute solution de l'un est en même temps une solution de l'autre. La solution du premier de ces problèmes étant supposée connue, il suffit en quelque sorte de la « traduire » en tenant compte des termes de l'analogie pour trouver la solution du deuxième problème.

On voit sans peine toutes les simplifications que permet une telle «traduction», réalisant d'une façon particulièrement frappante l'économie de la pensée qui constitue la nature même de toute science. Certains résultats qui sont cachés pour l'un de ces problèmes deviennent quelquefois intuitifs et évidents pour l'autre. Et même, il arrive que le simple fait d'avoir démontré l'analogie de deux problèmes permettra de les résoudre tous deux ou tout au moins de prévoir de quelle nature sera leur solution.

II. — On connaît plusieurs analogies du problème de la torsion. L'une, indiquée par *Thomson et Tait* dans leur « Traité de philosophie naturelle », en 1867, est une analogie hydrodynamique. Une autre, l'*analogie de la membrane*, a été découverte par *Prandtl* en 1903. La littérature contient tous les renseignements nécessaires sur ces deux analogies et nous n'y reviendrons pas ici.

Il existe une troisième analogie du problème de la torsion, moins connue, semble-t-il, que les deux précédentes, que M. *Boussinesq* a publiée, en 1871 déjà, au « *Journal de Mathématiques pures et appliquées* ». C'est aussi une analogie hydrodynamique, mais différente de celle de Thomson et Tait. Nous allons l'exposer avec quelque détail en essayant d'en montrer l'utilité.

III. — Considérons d'une part un prisme élastique rectiligne, de section constante, pleine, c'est-à-dire sans cavité intérieure, sollicité à la torsion simple. Prenons pour axe des x l'axe de ce prisme supposé horizontal. Les axes y et z sont rectangulaires, l'un horizontal, l'autre vertical et situés dans une section droite quelconque mais déterminée du prisme.

Dans ces conditions, l'équation du contour qui limite la section droite du prisme est de la forme $f(x, y) = 0$. Désignons, avec les notations habituelles, par τ_{xy} et τ_{xz} les composantes de la tension spécifique tangentielle de torsion qui sont, dans le plan de la section droite du prisme, respectivement parallèles aux axes y et z. On démontre dans les Cours de Résistance des Matériaux, que l'on peut définir ces composantes par les relations

$$(1) \qquad \tau_{xy} = -\frac{\partial F}{\partial z} \text{ et } \tau_{xz} = \frac{\partial F}{\partial y},$$

la fonction $F(y, z)$ étant une fonction des deux variables y et z qui satisfait à l'équation

$$(2) \qquad \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial z^2} = -2G\theta = -K, \text{ en posant } K = 2G\theta,$$

où G et θ sont des constantes représentant, la première, le module d'élasticité transversale et la deuxième, l'angle unitaire de torsion. En outre, la fonction F doit prendre une valeur constante, que l'on peut supposer nulle, sur le contour $f(y, z) = 0$ de la section. On a donc, sur tout ce contour, la condition

$$(3) \qquad F = 0.$$

Envisageons d'autre part un tube rectiligne qui aurait précisément la même section normale que la tige tordue et qui serait plein d'un liquide coulant par filets rectilignes et parallèles, sous l'effort d'une pression constante.

Prenons les axes de coordonnées comme dans le cas du prisme tordu et désignons par V la vitesse du liquide. Cette vitesse ne dépendra pas de la variable x, elle sera fonction d'y et de z seulement.