Zeitschrift: Bulletin technique de la Suisse romande

Band: 49 (1923)

Heft: 25

Artikel: Cours de la Société suisse des ingénieurs et des architectes, à Zürich, du 1er au 6 octobre 1923 (suite et fin)

Autor: Paschoud, Maurice

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-38268

QUELQUES INSTALLATIONS MODERNES DE TURBINES HYDRAULIQUES

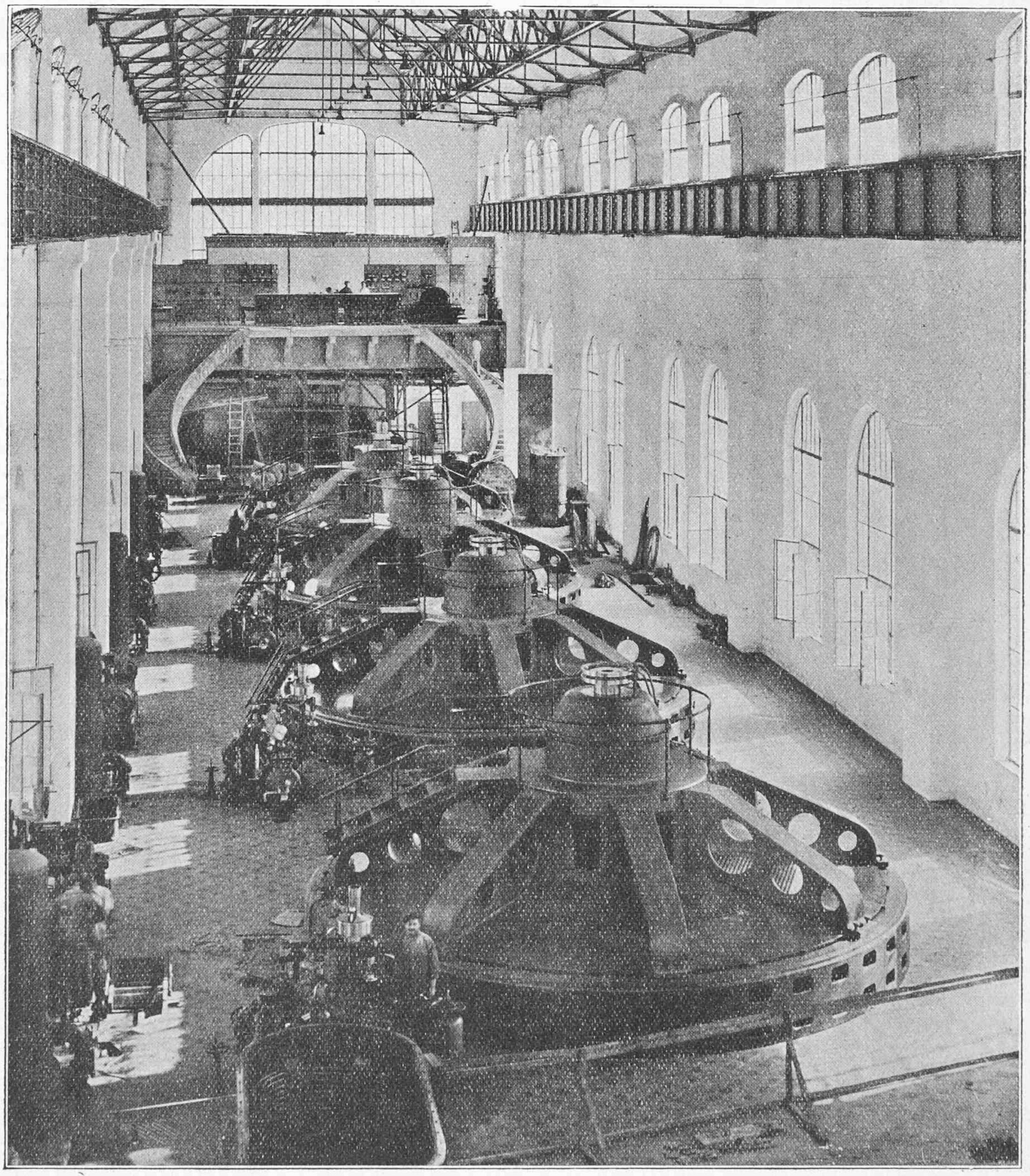

Fig. 4. — Salle des alternateurs de l'usine de Mauzac.

Cours de la Société suisse des ingénieurs et des architectes,

à Zurich, du 1er au 6 octobre 1923.

(Suite et fin.) [1]

Exposé de certains progrès récents de la théorie de l'élasticité.

M. le Docteur Meissner, professeur à l'Ecole polytechnique fédérale, a consacré les quatre heures de son cours à l'exposé de *certains progrès récents, au point de vue technique, de la théorie de l'élasticité.*

[1] Voir *Bulletin technique* du 27 octobre 1923, page 270.

Avant de parler de ces perfectionnements récents qui concernent spécialement la théorie de la torsion et celle des plaques planes et courbes (nous traduisons dans ce qui suit : *Platte* par plaque plane, *Schale* par plaque courbe et *Scheibe* par disque), M. Meissner fait une large esquisse du développement de la théorie mathématique de l'élasticité, en rappelant ses progrès essentiels et son but qui, au point de vue technique, est de pouvoir répondre aux questions que pose la pratique. Ces problèmes dont la technique réclame impérieusement une solution ne se rapportent plus seulement à des corps à une seule dimension, comme les tiges, mais ils concernent des corps à deux dimensions, comme les plaques, et même à trois dimensions.

La théorie pure ne fournit des solutions de ces problèmes que dans des cas très particuliers et encore les solutions rigoureuses qu'elle donne dans ces cas sont si compliquées que la pratique ne peut les utiliser telles quelles.

Galilée, sans être en possession de la loi fondamentale de l'élasticité, cherche à déterminer la résistance d'une poutre encastrée à un bout et libre à l'autre. Hooke et Mariotte donnent la loi expérimentale qui lie les efforts aux déformations. Ce dernier applique la loi de Hooke pour répondre à la question posée par Galilée. Euler et les Bernoulli étudient le problème de la ligne élastique. Le même Euler et Lagrange créent la théorie du flambage. Coulomb reprend le calcul de la poutre à la flexion simple et montre l'existence de la couche neutre. Il donne aussi une théorie de la torsion, théorie inexacte du reste, sauf pour les tiges à section circulaire, mais dont on fera usage jusqu'à de Saint-Venant. Young définit son module d'élasticité. Enfin Navier établit les équations fondamentales de l'élasticité. Cauchy retrouve ces équations en se basant sur les théories, qu'il crée de toutes pièces, des pressions et des déformations dans les solides. Les équations de Cauchy, qui sont celles que l'on donne actuellement encore pour les solides isotropes, diffèrent de celles de Navier en ce qu'elles contiennent deux constantes d'élasticité au lieu d'une seule. Poisson retrouve les équations de Cauchy par une tout autre voie, mais surtout, il applique ces équations à une foule de problèmes particuliers. Green crée la notion de potentiel d'élasticité et la développe avec Stokes et Lord Kelvin. Clapeyron et Lamé résolvent certains problèmes d'équilibre élastique au moyen de la méthode des développements en série.

Puis, de Saint-Venant rattache la Résistance des Matériaux à la Théorie de l'Elasticité. Il énonce et justifie le principe qui porte son nom, principe qui s'est toujours vérifié jusqu'ici. Voici ce principe : « Si l'on applique sur une région d'étendue limitée d'un corps de grandes dimensions un système de forces extérieures *en équilibre*, il ne se produit des pressions et des déformations sensibles qu'au voisinage immédiat de la région d'application de ces forces extérieures. Ces pressions et ces déformations sont négligeables dans toutes les autres parties du corps considéré ». De Saint-Venant crée aussi la théorie moderne, exacte, de la torsion. Pendant un certain temps, cette théorie correcte de la torsion passe inaperçue, les préoccupations des chercheurs vont ailleurs et se tournent vers la théorie des systèmes hyperstatiques, articulés ou pleins, employés dans la construction et auxquels se rattachent les noms de Clapeyron, Maxwell, Castigliano, Mohr, Betti et Müller-Breslau. Ce n'est que tout récemment qu'on s'occupe à mettre en œuvre les bases de la théorie de la torsion posées par de Saint-Venant.

(Le lecteur que cela intéresse trouvera une histoire du développement de la théorie mathématique de l'élasticité dans l'ouvrage de *Love* intitulé « Treatise on the theory of elasticity ».)

Cet historique terminé, M. Meissner montre, à grands traits, comment on établit les équations de l'équilibre élastique pour les corps isotropes.

Quand un corps élastique se déforme sous l'action de forces extérieures en équilibre qui lui sont appliquées, les coordonnées x, y et z d'un point quelconque du corps subissent des accroissements (positifs ou négatifs) que nous appellerons *déplacements élémentaires* en ce point et que nous représenterons par ξ, η, ζ, D'ailleurs, la théorie des pressions montre qu'il faut considérer en ce point 6 composantes de la pression, 3 normales σ et 3 tangentielles τ. (En anglais : « Stress », en allemand : « Zwang »). De même, la théorie des déformations («Strain-Drang ») considère en chaque point 6 déformations élémentaires, soit 3 dilatations ε et 3 glissements γ. La loi de Hooke établit des relations linéaires entre les pressions σ, τ et les déformations élémentaires ε et γ. D'autre part enfin, il existe des relations, linéaires également, entre les déformations élémentaires ε, γ et les dérivées premières par rapport à x, y, z des déplacements élémentaires ξ, η, ζ. On peut donc exprimer les composantes des pressions en un point en fonction linéaire des dérivées premières des déplacements élémentaires. Il reste à introduire ces expressions dans les relations d'équilibre qui existent entre les composantes des pressions en un point, relations qui contiennent les dérivées premières des σ et des τ, au 1^er^ degré,pour aboutir à 3 *équations aux dérivées partielles* du 2^me^ ordre entre les déplacements élémentaires. Ce sont les équations fondamentales de l'équilibre élastique. On peut démontrer que ces équations, si l'on tient en outre compte des conditions qui doivent être remplies au contour des corps élastiques dont on étudie l'équilibre, admettent toujours une solution et une seule.

Ce qui complique énormément la résolution analytique des problèmes de l'élasticité et donne une importance considérable aux méthodes expérimentales du genre de celle de M. Mesnager, dont il a été parlé plus haut, c'est le fait que l'on a affaire à des *équations aux dérivées partielles.* De même que par l'intégration des équations différentielles ordinaires il s'introduit des *constantes d'intégration* arbitraires, dans l'intégration des équations aux dérivées partielles, il s'introduit des *fonctions arbitraires.* Suivant la forme des corps considérés et les conditions qui doivent être vérifiées sur le contour de ces corps, on a affaire à une immense variété de problèmes.

On dispose essentiellement de deux méthodes distinctes pour intégrer les équations de l'élasticité. L'une est la *méthode des séries*, dont Fourier a fait un emploi étendu dans sa théorie analytique de la chaleur. On cherche des solutions particulières, *solutions simples*, des équations de l'élasticité et on affecte ces solutions de constantes arbitraires. Comme les équations de l'élasticité sont *linéaires*, en ajoutant un très grand nombre de ces solutions simples, on peut obtenir des solutions générales en déterminant les constantes arbitraires de façon à vérifier les conditions au contour. Dans la deuxième méthode, on part de l'*équation de Laplace*, qui joue un rôle essentiel dans toute la physique mathématique. Cette deuxième méthode convient particulièrement pour la résolution des problèmes d'équilibre élastique de corps sollicités par une force concentrée.

(Pour avoir d'amples détails et une foule d'exemples de ces méthodes d'intégration des équations aux dérivées partielles de la physique mathématique, consulter le Cours d'Analyse de M. Boussinesq, Tome II, fascicule 2, Compléments p. 374-510.)

Le nombre des problèmes d'élasticité qui sont résolus rigoureusement est minime. L'un de ces problèmes est celui de M. Boussinesq, dont il a été parlé dans le compte rendu des leçons de M. Mesnager. Un autre est celui de la sphère isotrope (Lamé, Kelvin, Almansi). Un troisième est celui du cylindre (Tedone).

Pour les applications pratiques, il n'est pas indispensable de posséder des solutions rigoureuses des problèmes d'élasticité. Souvent des solutions approchées, moins compliquées que les solutions exactes, rendent d'aussi bons services. Une de ces méthodes approchées, qui donne des résultats avantageux dans le calcul des déformations est celle de Ritz. Elle est moins utile, par contre, pour le calcul des pressions.

Théorie de la torsion.

(Barré de Saint-Venant). Les théories que Coulomb puis Navier avaient données de la torsion se basaient sur l'hypothèse, admissible pour la flexion simple, que les sections planes avant la torsion restaient planes encore après celle-ci. De Saint-Venant a montré que ce n'est vrai que dans le seul cas de la tige à section circulaire. Pour toutes les autre formes de section, c'est inexact. Actuellement, la solution rigoureuse du problème de la torsion a été donnée pour une foule de formes de la section, le cercle, l'anneau circulaire, l'ellipse, le triangle équilatéral, le rectangle, plein ou creux, etc., etc.

Un moyen très utile de résoudre rigoureusement ou d'une façon approchée certains problèmes de physique mathématique est de ramener la solution de ceux-ci à celle de problèmes déjà résolus dans d'autres parties de la physique mathématique. Il existe pour le problème de la torsion plusieurs analogies de cette espèce. Voici les deux les plus intéressantes : l'*analogie de la membrane* (Prandtl, Phys. Zeitschrift, Vol. 4, 1903) et l'*analogie hydrodynamique* (Kelvin et Tait, Traité de philosophie naturelle, T. II).

Analogie de la membrane. Supposons un récipient fermé à sa partie supérieure par une tôle plane mince horizontale. Perçons dans cette tôle une ouverture ayant la forme de la section que l'on veut étudier pour la torsion. Fermons cette ouverture par une membrane mince, une lame d'eau de savon par exemple et augmentons légèrement la pression à l'intérieur du récipient, en y insufflant un peu d'air. La membrane se bombe et forme ce que Prandl appelle une *colline* au-dessus du plan de la tôle. On peut alors démontrer que cette colline jouit des propriétés suivantes :

1° Les tangentes en chacun des points de ses courbes de niveau donnent en ce point la direction de la composante tangentielle de la pression.

2° L'intensité de la composante tangentielle est proportionnelle à la pente de la colline au point considéré.

3° Le volume compris entre la membrane et le plan de la tôle est proportionnel à la *Constante de torsion* de la section étudiée. (Nous traduisons ici par Constante de torsion le terme allemand de *Drillungswiderstand.* Voici exactement ce que l'on entend par ce terme. Pour une tige de section donnée, l'angle de torsion est proportionnel au moment de torsion. Dans l'expression qui lie cet angle de torsion au moment de torsion, il y a au dénominateur du 2me membre le produit du module d'élasticité transversale G par une constante, celle que nous appelons la constante de torsion. Cette constante mesure en quelque sorte la résistance de la section à la torsion).

On voit sans peine l'importance de cette analogie pour l'étude de la torsion. Par exemple, pour des sections formées de rectangles minces et longs juxtaposés, elle montre immédiatement que la constante de torsion de la section totale est très sensiblement égale à la somme des constantes de torsion des divers rectangles. Ceci s'applique entre autres à des profils Differdange en double T. De même, l'analogie de Prandl est très utile pour l'étude de la torsion des prismes à section creuse.

L'analogie hydrodynamique n'est pas moins précieuse. Cette analogie ramène le problème de la torsion d'une tige à celui du mouvement permanent plan bien continu d'un liquide dans un récipient cylindrique fermé dont la section est semblable à celle de la tige considérée. Alors, la vitesse du liquide en un point de la section du récipient a la direction de la composante tangentielle en ce point et il y a proportionnalité entre les intensités de cette vitesse et de cette composante tangentielle.

Par exemple, l'analogie hydrodynamique montre immédiatement le danger que présentent, dans une section, les angles rentrants. Dans le récipient correspondant à cette section, les filets fluides se tassent près du sommet de l'angle rentrant et leur vitesse y devient très grande. La tension est donc très considérable en ce sommet. De la même manière, l'analogie hydrodynamique fait voir l'inutilité d'angles saillants dans les sections sollicitées à la torsion.

Plaques planes et plaques courbes.

La théorie de la flexion des *plaques planes* date de plus d'un siècle. Mais c'est Kirchhoff, vers 1850, qui a énoncé pour elles les hypothèses analogues à celle de Bernoulli que l'on prend comme base de la théorie de la flexion simple dans les poutres. Kirchhoff a admis que tous les points de la plaque qui avant sa déformation par la flexion étaient situés sur une même perpendiculaire à son feuillet moyen restaient, après la déformation, sur une droite normale à ce feuillet moyen. De plus, dans le feuillet moyen, il ne se produit ni extension ni compression.

Il faut d'ailleurs distinguer le cas des plaques planes qui sont sollicitées à la flexion par les forces qui leur sont appliquées et dont le feuillet moyen se courbe sous l'action de ces forces, de celui des *disques*, où les forces extérieures sont contenues dans le plan du feuillet moyen qui reste plan après la déformation. Signalons simplement en passant, à propos des disques, le problème du disque tournant, traité par Stodola et Grübler et celui de l'éprouvette percée d'un trou et sollicitée à la traction, étudié par Preuss et par Kirsch.

Le nombre des problèmes qui se posent à propos de la flexion des plaques planes est très considérable. Ces plaques sont soit libres, soit appuyées, soit encastrées sur tout leur contour. Les conditions d'appui peuvent du reste ne pas être les mêmes le long de tout le contour et cela complique beaucoup les calculs correspondants. De plus, ces plaques ont des formes extrêmement variées et pour chaque forme particulière, il faut une solution spéciale.

Grâce à la symétrie qui simplifie les questions, la plupart des problèmes relatifs à la *plaque circulaire* sont résolus. Ceux concernant les plaques en demi-cercle sont plus difficiles.

Navier a donné une solution rigoureuse du problème de la *plaque rectangulaire* appuyée sur tout son pourtour, mais les séries doubles qu'il obtient sont peu maniables. Tout récemment, Nadai et Hencky ont, pour le même problème, donné des solutions approchées plus directement utilisables pour les praticiens. Il faut rappeler aussi que Ritz a résolu rigoureusement le problème de la *plaque rectangulaire encastrée*. Les remarques générales faites plus haut à propos de sa méthode s'appliquent également à la solution qu'il a donnée dans ce cas particulier.

Enfin Galerkine s'est occupé de la *plaque elliptique*. Il a montré que, pour son calcul, on pouvait utiliser avantageusement les résultats obtenus pour la plaque rectangulaire circonscrite à l'ellipse formée par son contour.

Une méthode toute récente de calcul des plaques planes est celle de Marcus qui se sert d'un procédé semblable à celui que Mohr a donné pour la construction graphique de la ligne élastique d'une poutre.

Tout ce qui précède se rapporte aux *plaques minces*. Les solutions obtenues pour ces plaques minces ne s'appliquent pas aux plaques dites *très minces*, qui sont beaucoup plus flexibles que les précédentes et où les flèches sont beaucoup plus grandes. Elles ne s'appliquent pas non plus aux *plaques épaisses* pour lesquelles les hypothèses de Kirchhoff ne sont pas valables, pas plus, par exemple, que l'hypothèse de Bernouilli n'est légitime pour le calcul des pièces à forte courbure, crochets de grue ou de wagon.

Plaques courbes. La théorie des plaques courbes a été faite d'abord, mais d'une manière très abstraite, par Love. En 1913, Fankhauser ramène le calcul de la plaque courbe sphérique à l'intégration d'une équation différentielle du 5me ordre. H. Keller, à cause de l'importance pratique du problème (pour les fonds de chaudière, par exemple) a cherché à intégrer cette équation par la méthode des différences. Mais les calculs que nécessite le procédé de Keller sont d'une longueur rebutante.

Reissner, par un choix différent des variables, a ramené le problème à l'intégration d'une équation du 4me ordre seulement que Meissner a réduite, à son tour, à celle de deux équations du 2me ordre. Bolle, un élève de Meissner, a consacré sa thèse au calcul des plaques courbes sphériques. Plus tard, d'autres élèves de Meissner, Wissler et Dubois ont traité les plaques courbes en forme de tore et en forme de cône à épaisseur constante. Enfin, Honegger, en utilisant une remarque faite en 1915 par Meissner également, s'est occupé du calcul des plaques coniques à paroi d'épaisseur variable suivant une loi linéaire.

(Sur toutes ces questions des plaques planes ou courbes, le lecteur trouvera d'abondants renseignements dans l'ouvrage de Föppl intitulé « Drang und Zwang », Vol. 1, p. 125-232 et Vol. 2, p. 1-55. Ce dernier volume, p. 55-160 contient aussi une théorie très développée de la torsion).

Le temps nous manque pour résumer d'une façon digne de leur valeur les autres cours auxquels nous avons eu le privilège d'assister. Les deux exemples qui précèdent montrent assez la variété et la richesse des aperçus donnés dans les cours de Zurich.

Nous n'avons eu le plaisir de pouvoir prendre part aux excursions du Wäggital et du Gotthard, pour lesquelles les inscriptions étaient nombreuses.

Disons simplement pour terminer que le Comité central et la Commission des cours avaient organisé le mercredi soir 3 octobre un dîner au « Zimmerleuten » en l'honneur des professeurs des cours. Ils ont eu l'amabilité d'y inviter le *Bulletin technique*. Des paroles cordiales y furent prononcées par M. Andreae et par M. Mesnager qui, avec émotion, remercia encore la Suisse de l'accueil fait aux blessés de la grande guerre. Ce dîner a été suivi d'une séance à la Société Zurichoise des Ingénieurs et des Architectes, à laquelle les professeurs du cours et les participants pouvaient assister et où l'on discuta la question brûlante de l'exportation de l'énergie électrique après un rapport intéressant du Dr Ing. B. Bauer, de Berne, sur ce sujet.

MAURICE PASCHOUD,
Professeur à l'Université de Lausanne.

Concours pour l'étude d'un Musée des Beaux-Arts à ériger à la Chaux-de-Fonds.

(Suite[1].)

No 4, « Lumière ». Projet présentant de bonnes qualités dans son ensemble. L'entrée commune au parc et au Musée est bien étudiée, cette solution a cependant l'inconvénient d'exiger un développement du vestibule trop important. Le plan du

[1] Voir *Bulletin technique* du 24 novembre 1923, page 295.