

Zeitschrift:	Bulletin technique de la Suisse romande
Band:	46 (1920)
Heft:	16
Artikel:	Résistance des matériaux: calcul des poutres continues sur piliers élastiques
Autor:	Busset-Schiller, J.-P.-L.
DOI:	https://doi.org/10.5169/seals-35796

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 26.01.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

Résistance des matériaux

Calcul des poutres continues sur piliers élastiques

par J.-P.-L. BUSSET-SCHILLER, ingénieur civil.

Les travaux des professeurs Ritter, de Zürich, Müller-Breslau et de leurs continuateurs permettent de résoudre les problèmes concernant la poutre continue sur piliers élastiques.

Les méthodes de ces auteurs exigent la détermination préalable de la position des foyers du système, l'évaluation des ordonnées des lignes de fermeture à l'aplomb des foyers et le calcul, pour chaque charge, des moments fléchissants dans la travée chargée et de leur répercussion dans toutes les autres barres y compris les piliers.

La dernière opération consiste à additionner tous les moments négatifs ou positifs. Que les calculs soient faits analytiquement ou graphiquement ils sont longs et exigent beaucoup d'attention.

Autre inconvénient grave : la méthode par les points fixes ne tient, en général, pas compte du *déplacement horizontal longitudinal* des travées qui se produit fatalement sauf dans le cas où l'ouvrage présente une symétrie complète par rapport à l'axe vertical passant par le milieu de la portée totale et où les charges sont réparties symétriquement à gauche et à droite de cet axe.

Au déplacement horizontal correspond une modification de la valeur des moments fléchissants qui peut être importante si le pont est supporté par des piliers élancés et en nombre restreint.

La méthode de calcul que nous envisageons admet l'invariabilité de la longueur des barres et néglige les déformations dues à l'effort tranchant ; elle évite la détermination des foyers et fournit directement, par un seul système d'équations les valeurs des moments sur les appuis pour les quatre cas suivants :

1^o *Action des charges verticales*, le déplacement horizontal étant supposé nul.

2^o *Action d'un déplacement horizontal* de l'ensemble des travées, les bases des piliers restant fixes dans l'espace. (Cas du *freinage* d'un convoi.)

3^o *Action du déplacement horizontal* des nœuds ou têtes de piliers dû à une *variation de température*.

4^o *Action du déplacement vertical d'un pilier*, les nœuds étant supposés dépourvus de tout déplacement horizontal.

A chacun de ces quatre cas correspond un système d'équations linéaires comportant, pour n piliers et $(n-1)$ travées, $2(n-1)$ moments statiquement indéterminés qui sont les moments fléchissants aux extrémités des travées. Les moments aux extrémités des piliers se déduisent très simplement des moments des travées adjacentes.

Les équations du cas 1 donnent des résultats incomplets puisque nous avons supposé que le mouvement de translation des nœuds ne pouvait pas se produire. La somme algébrique des efforts tranchants des piliers qui devrait être nulle, puisque le système est soumis à l'action unique de forces verticales, aura une certaine valeur

F . Cette force est égale et de signe contraire à la force horizontale qu'il faudrait placer au niveau des travées pour empêcher le mouvement longitudinal de celles-ci.

Le système d'équations du cas 2, nécessaire pour déterminer les effets du freinage d'un convoi, nous fournira les moments fléchissants, correspondant à la force F , qu'il faut ajouter algébriquement à ceux du cas 1 pour obtenir les moments fléchissants réellement produits par les charges verticales.

Les moments fléchissants des équations correspondant aux cas 3 et 4 doivent être corrigés de la même façon et pour la même raison que ceux du cas 1.

Les déterminants « symétriques » des premiers membres des quatre systèmes d'équations, correspondant aux quatre cas envisagés, sont extrêmement simples ; chacune des lignes comporte les mêmes coefficients, seuls les signes de ceux-ci et la colonne des constantes changent d'un cas au suivant. Il résulte de ceci des avantages précieux pour les calculs numériques.

Principe de la méthode.

Toutes les équations nécessaires pour résoudre les cas envisagés sont obtenues en écrivant que les tangentes trigonométriques des angles de rotation des barres courantes en un nœud sont égales ; comme chaque angle est une fonction linéaire des moments statiques ou forces et des moments d'encastrements sur les appuis et des paramètres $\frac{l}{E.J}$ nous obtenons le nombre voulu d'équations indépendantes.

Les relations entre les moments et les angles s'obtiennent par deux intégrations successives de l'équation différentielle de la ligne élastique d'une barre reposant librement sur deux appuis.

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{M}{E.J}$$

Nous rappelons brièvement les relations concernant les cas les plus usuels que nous aurons à utiliser dans ce qui suit en supposant une barre de longueur l ayant un moment d'inertie constant J et un module d'élasticité E .

Les figures 1 à 4 indiquent les forces ou les moments agissant sur la barre, la forme de la ligne élastique ainsi que le signe des tangentes des angles. Nous aurons les relations suivantes en remplaçant le paramètre $\frac{l}{E.J}$ par R :

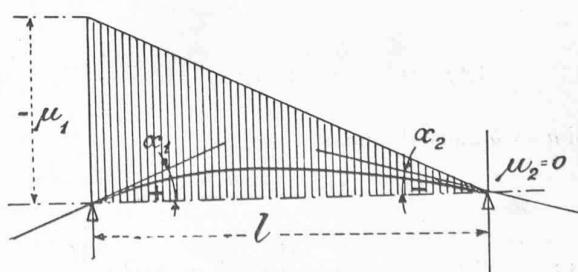


Fig. 1.

Fig. 1. $\operatorname{tg} \alpha_1 = R \cdot \frac{\mu_1}{3}; \quad \operatorname{tg} \alpha_2 = -R \cdot \frac{\mu_2}{6}$ (1)

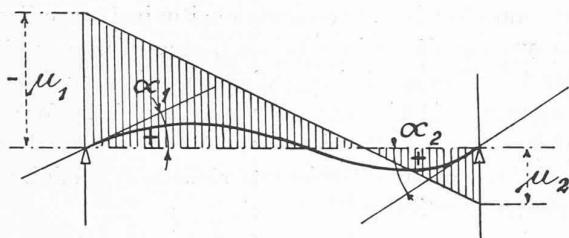


Fig. 2.

Fig. 2. $\operatorname{tg} \alpha_1 = R \left(\frac{\mu_1}{3} - \frac{\mu_2}{6} \right); \quad \operatorname{tg} \alpha_2 = R \left(\frac{\mu_2}{3} - \frac{\mu_1}{6} \right)$ (2)

Si $\mu_2 = \frac{1}{2} \mu_1$: $\operatorname{tg} \alpha_1 = R \frac{\mu_1}{4}; \quad \operatorname{tg} \alpha_2 = 0$ (encaissement) (3)

Fig. 3. La charge uniforme totale étant P nous introduisons, pour simplifier les notations, le moment $\mathfrak{M} = \frac{P \cdot l}{8}$:

$\operatorname{tg} \alpha_1 = -R \cdot \frac{\mathfrak{M}}{3}; \quad \operatorname{tg} \alpha_2 = R \cdot \frac{\mathfrak{M}}{3}$ (4)

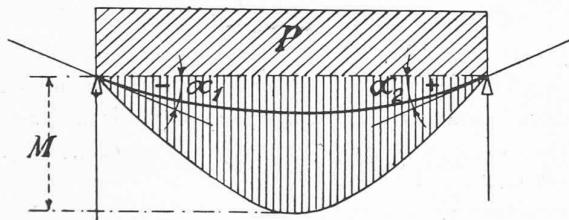


Fig. 3.

Fig. 4. Nous introduisons dans les relations les quantités

$$M' = \frac{P \cdot a \cdot b (l + b)}{l^2} \quad \text{et} \quad M'' = \frac{P \cdot a \cdot b (l + a)}{l^2};$$

nous aurons :

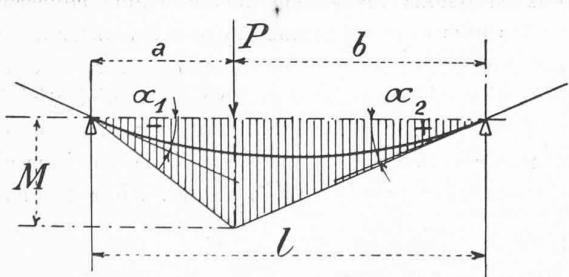


Fig. 4.

$\operatorname{tg} \alpha_1 = -\frac{RM'}{6}; \quad \operatorname{tg} \alpha_2 = R \frac{M''}{6}$ (5)

Si $a = b$ nous obtenons

$M' = M'' = \frac{P \cdot a \cdot b}{l} = M$ (5)

puis : $\operatorname{tg} \alpha_1 = -R \cdot \frac{M}{4}; \quad \operatorname{tg} \alpha_2 = R \cdot \frac{M}{4}$ (6)

Actions des forces verticales.

La fig. 5 représente schématiquement une poutre continue sur quatre piliers élastiques, la continuité existant aussi bien entre les travées successives qu'entre les piliers et les travées.

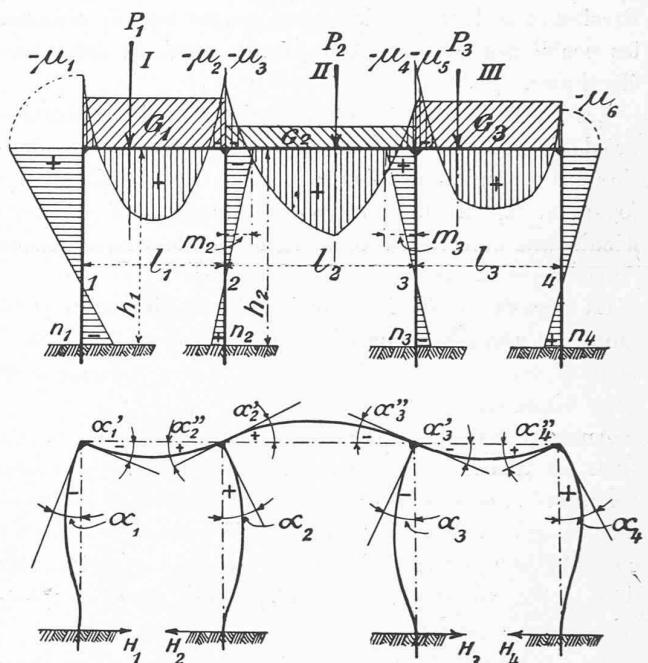


Fig. 5 et 6.

Les paramètres $\frac{l}{E \cdot J}$ seront pour les travées :

$$R_1 = \frac{l_1}{E \cdot J_1}; \quad R_2 = \frac{l_2}{E \cdot J_2}; \quad R_3 = \frac{l_3}{E \cdot J_3};$$

pour les piliers :

$$\rho_1 = \frac{h_1}{E \cdot J_1}; \quad \rho_2 = \frac{h_2}{E \cdot J_2}; \quad \rho_3 = \frac{h_3}{E \cdot J_3}; \quad \rho_4 = \frac{h_4}{E \cdot J_4}$$

Les charges uniformes G_1 , G_2 et G_3 donnent les constantes suivantes :

$$\mathfrak{M}_1 = \frac{G_1 \cdot l_1}{8}; \quad \mathfrak{M}_2 = \frac{G_2 \cdot l_2}{8}; \quad \mathfrak{M}_3 = \frac{G_3 \cdot l_3}{8}$$

Les constantes relatives aux forces concentrées seront :

Travée I :

$$M'_1 = \frac{P_1 \cdot a_1 \cdot b_1 (l_1 + b_1)}{l_1^2}; \quad M''_1 = \frac{P_1 \cdot a_1 \cdot b_1 (l_1 + a_1)}{l_1^2}$$

Travée II :

$$M'_2 = \frac{P_2 \cdot a_2 \cdot b_2 (l_2 + b_2)}{l_2^2}; \quad M''_2 = \frac{P_2 \cdot a_2 \cdot b_2 (l_2 + a_2)}{l_2^2}$$

Travée III :

$$M'_3 = \frac{P_3 \cdot a_3 \cdot b_3 (l_3 + b_3)}{l_3^2}; \quad M''_3 = \frac{P_3 \cdot a_3 \cdot b_3 (l_3 + a_3)}{l_3^2}$$

Lorsque les moments fléchissants négatifs des travées sont déterminés on en déduit les moments aux sommets des piliers 2 et 3 par les relations connues :

$$m_2 = \mu_2 - \mu_3; \quad m_3 = \mu_5 - \mu_4 \quad (7)$$

	Δ_1						CONSTANTES
	μ_1	μ_2	μ_3	μ_4	μ_5	μ_6	
1	$+ 3\rho_1 + 4R_1$	$+ 2R_1$	0	0	0	0	$4R_1\mathfrak{N}_1 + 2R_1M_1'$
2	$+ 2R_1$	$+ 3\rho_2 + 4R_1$	$- 3\rho_2$	0	0	0	$4R_1\mathfrak{N}_1 + 2R_1M_1''$
3	0	$- 3\rho_2$	$+ 3\rho_2 + 4R_3$	$+ 2R_2$	0	0	$4R_2\mathfrak{N}_2 + 2R_2M_2'$
4	0	0	$+ 2R_2$	$+ 3\rho_3 + 4R_2$	$- 3\rho_3$	0	$4R_2\mathfrak{N}_2 + 2R_2M_2''$
5	0	0	0	$- 3\rho_3$	$+ 3\rho_3 + 4R_3$	$+ 2R_3$	$4R_3\mathfrak{N}_3 + 2R_3M_3'$
6	0	0	0	0	$+ 2R_3$	$+ 3\rho_4 + 4R_3$	$4R_3\mathfrak{N}_3 + 2R_3M_3''$

A la base des piliers nous aurons, d'après les relations (3) du cas d'encastrement :

$$n_1 = \frac{\mu_1}{2}; \quad n_2 = \frac{m_2}{2}; \quad n_3 = \frac{m_3}{2}; \quad n_4 = \frac{\mu_6}{2} \quad (8)$$

Si nous appliquons les formules (1) à (8) aux angles $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ et α_4 nous obtenons les équations suivantes :

1^{er} pilier et 1^{re} travée : (1)

$$\operatorname{tg} \alpha_1 = -\rho_1 = R_1 \left(-\frac{\mathfrak{N}_1}{3} - \frac{M_1'}{6} + \frac{\mu_1}{3} + \frac{\mu_2}{6} \right) = \operatorname{tg} \alpha'_1$$

2^{me} pilier et 1^{re} travée : (2)

$$\operatorname{tg} \alpha_2 = +\rho_2 \left(\frac{\mu_2 - \mu_3}{4} \right) = R_1 \left(\frac{\mathfrak{N}_1}{3} + \frac{M_1''}{6} - \frac{\mu_2}{3} - \frac{\mu_4}{6} \right) = \operatorname{tg} \alpha''_2$$

2^{me} pilier et 2^{me} travée : (3)

$$\operatorname{tg} \alpha_2 = +\rho_2 \left(\frac{\mu_2 - \mu_3}{4} \right) = R_2 \left(-\frac{\mathfrak{N}_2}{3} - \frac{M_2'}{6} + \frac{\mu_3}{3} + \frac{\mu_4}{6} \right) = \operatorname{tg} \alpha'_2$$

3^{me} pilier et 2^{me} travée : (4)

$$\operatorname{tg} \alpha_3 = -\rho_3 \left(\frac{\mu_5 - \mu_4}{4} \right) = R_2 \left(\frac{\mathfrak{N}_2}{3} + \frac{M_2''}{6} - \frac{\mu_4}{3} - \frac{\mu_3}{6} \right) = \operatorname{tg} \alpha''_3$$

3^{me} pilier et 3^{me} travée : (5)

$$\operatorname{tg} \alpha_3 = -\rho_3 \left(\frac{\mu_5 - \mu_4}{4} \right) = R_3 \left(-\frac{\mathfrak{N}_3}{3} - \frac{M_3'}{6} + \frac{\mu_5}{3} + \frac{\mu_6}{6} \right) = \operatorname{tg} \alpha'_3$$

4^{me} pilier et 3^{me} travée : (6)

$$\operatorname{tg} \alpha_4 = +\rho_4 \frac{\mu_6}{4} = R_3 \left(\frac{\mathfrak{N}_3}{3} + \frac{M_3''}{6} - \frac{\mu_6}{3} - \frac{\mu_5}{6} \right) = \operatorname{tg} \alpha''_4$$

Ces six équations, après réduction des termes semblables, fournissent, pour les premiers membres, le déterminant ci-dessus (voir tableau).

Le déterminant reste le même, quelles que soient les forces verticales, tant que les moments $\mu_1, \mu_2, \mu_3, \dots, \mu_6$ sont négatifs.

Si la première travée seule est chargée les moments μ_4 et μ_5 changent de signe, il en résulte que dans les

lignes 3 à 6 il faut changer le signe de R . Avec la deuxième travée chargée les signes de R sont à modifier dans les lignes 1, 2, 5 et 6. *(A suivre.)*

Détermination des dimensions des bateaux de navigation intérieure de fort tonnage et du gabarit des voies navigables.

Le Ministère français des Travaux publics a créé, le 9 mai 1919, une commission « avec mission de fournir d'urgence des bases pratiques aux ingénieurs ou aux entreprises chargés de l'étude des transformations et des créations de voies navigables ». Cette commission a résumé les résultats de ses recherches dans un rapport publié in extenso par les Annales des Ponts et Chaussées¹. Nous en reproduisons les conclusions :

I. — L'avantage du bateau de fort tonnage sur la péniche ne peut être affirmé à priori pour les parcours en canal.

II. — L'économie du prix de revient des transports qu'il permet de réaliser est, dans tous les cas, inférieure à celle que l'amélioration de l'exploitation (organisation de la traction, outillage des ports, suppression des arrêts et institution d'un service d'affrètement) apporterait à l'emploi de la péniche tel qu'il résulte de la situation présente.

Tonnage des bateaux	Dimensions des bateaux			Caractéristique de la voie navigable						
	Longueur	Largueur	Mouillage	Longueur à 2 m. sous la retenue	Profondeur sur l'axe	Dans les courbes	Sur-largue	Rayon maximum	Dimensions des écluses	
300	38,50	5,00	1,80	10,00	2,40	$\frac{380}{R}$	300	40,50	6,00	2,50
600	60,00	7,10	1,80	15,65	2,40	$\frac{920}{R}$	585	65,00	9,00	2,50
900	75,00	8,60	1,80	20,00	2,50	$\frac{1440}{R}$	820	80,00	10,50	2,50
1200	90,00	10,00	1,80	23,70	2,55	$\frac{2400}{R}$	1070	95,00	12,00	2,50

Le plafond de la cuvette sera réglé suivant une courbe elliptique à axe vertical tangent aux talus.

Le tirant d'air minimum sera de 3 m. 70.

¹ No II (mars-avril 1920).