Zeitschrift: Bulletin technique de la Suisse romande

Band: 35 (1909)

Heft: 12

Artikel: Application de la statique graphique aux systèmes de l'espace

Autor: Mayor, B.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-27573

Application de la statique graphique aux systèmes de l'espace.

Par M. B. Mayor, professeur.

(Suite et fin[1]).

CHAPITRE IX

Le principe des travaux virtuels.

123. Le travail d'une force dont le point d'application subit un déplacement virtuel donné, peut être déterminé à l'aide d'un procédé très spécial, lorsque cette force et ce déplacement ont été représentés dualistiquement.

Pour plus de généralité, considérons en effet deux vecteurs (F_1) et (F_2) ayant une même origine, et admettons, sans préciser davantage, que l'un de ces vecteurs représente une force et l'autre le déplacement virtuel de son point d'application. Si l'on désigne par X_1, Y_1, Z_1 les composantes de (F_1) relativement à un système d'axes rectangulaires et par X_2, Y_2, Z_2 celles de (F_2) par rapport au même système, le travail virtuel de la force considérée a pour valeur

$$\delta\, T = X_1 X_2 + Y_1 Y_2 + Z_1 Z_2.$$

On peut transformer cette expression en introduisant les éléments représentatifs des vecteurs considérés.

Désignons, dans ce but, par F'_1 et F'_2 les vecteurs représentatifs des conjugués de (F_1) et de (F_2), et admettons que les axes coordonnés choisis soient tels que le plan $x\,Oy$ coïncide avec le plan Π et l'origine avec le centre de la circonférence directrice. Toutes les formules établies au paragraphe 36 deviennent applicables et, en particulier, la ligne d'action de F'_2 a pour équation

$$x\, Y_2 - y\, X_2 + a\, Z_2 = 0.$$

Un calcul élémentaire montre alors immédiatement que les coordonnées ξ_2, η_2 de l'antipole P_2 de cette droite par rapport à la circonférence directrice vérifient les relations

$$X_2 = -\frac{1}{a}\,\eta_2\, Z_2,$$
$$Y_2 = \frac{1}{a}\,\xi_2\, Z_2.$$

D'autre part, en désignant par X'_1, Y'_1,... les coordonnées du conjugué de (F_1), par X'_2, Y'_2,... celles du conjugué de (F_2) et par x'_1, y'_1 les coordonnées du point représentatif de (F_1), les formules du paragraphe 36 donnent encore :

$$X_1 = -X'_1, \qquad Y_1 = -Y'_1$$
$$Z_1 = \frac{N'_1}{a}, \qquad Z_2 = \frac{N'_2}{a},$$

et

$$Z_1 = \frac{N'_1}{a} = \frac{1}{a}\,(x'_1\, Y'_1 - y'_1\, X'_1).$$

[1] Voir *Bulletin technique* 1908, page 287.

Dans ces conditions, l'expression de travail virtuel peut être mise sous la forme suivante

$$\delta\, T = \frac{1}{a^2}\, N'_2\,[(x'_1 - \xi_2)\, Y'_1 - (y'_1 - \eta_2)\, X'_1]$$

qu'il est bien simple d'interprêter.

La quantité

$$(x'_1 - \xi_2)\, Y'_1 - (y'_1 - \eta_2)\, X'_1$$

représente, en effet, le moment de F'_1 par rapport à l'antipole P_2, tandis que N'_2 est égal au moment de F'_2 relativement au point O.

Par suite, considérons une masse fictive concentrée en P_2 et ayant N'_2 pour intensité. Cette masse dépend uniquement de F'_2 et comme, en outre, elle définit complètement ce vecteur, on peut l'appeler sa masse représentative.

Dans ces conditions, l'expression

$$N'_2\,[(x'_1 - \xi_2)\, Y'_1 - (y'_1 - \eta_2)\, X'_1]$$

est égale au produit de F'_1 par le moment statique de la masse considérée relativement à la ligne d'action de F'_1. Et comme il est naturel d'appeler simplement ce produit le moment statique par rapport au vecteur F'_1, on voit que pour obtenir le travail virtuel qui correspond à deux vecteurs de même origine, il suffit, après avoir déterminé les vecteurs représentatifs de leurs conjugués, de calculer le moment statique de la masse représentative de l'un de ces derniers vecteurs par rapport à l'autre, puis de diviser ce moment statique par le facteur a^2.

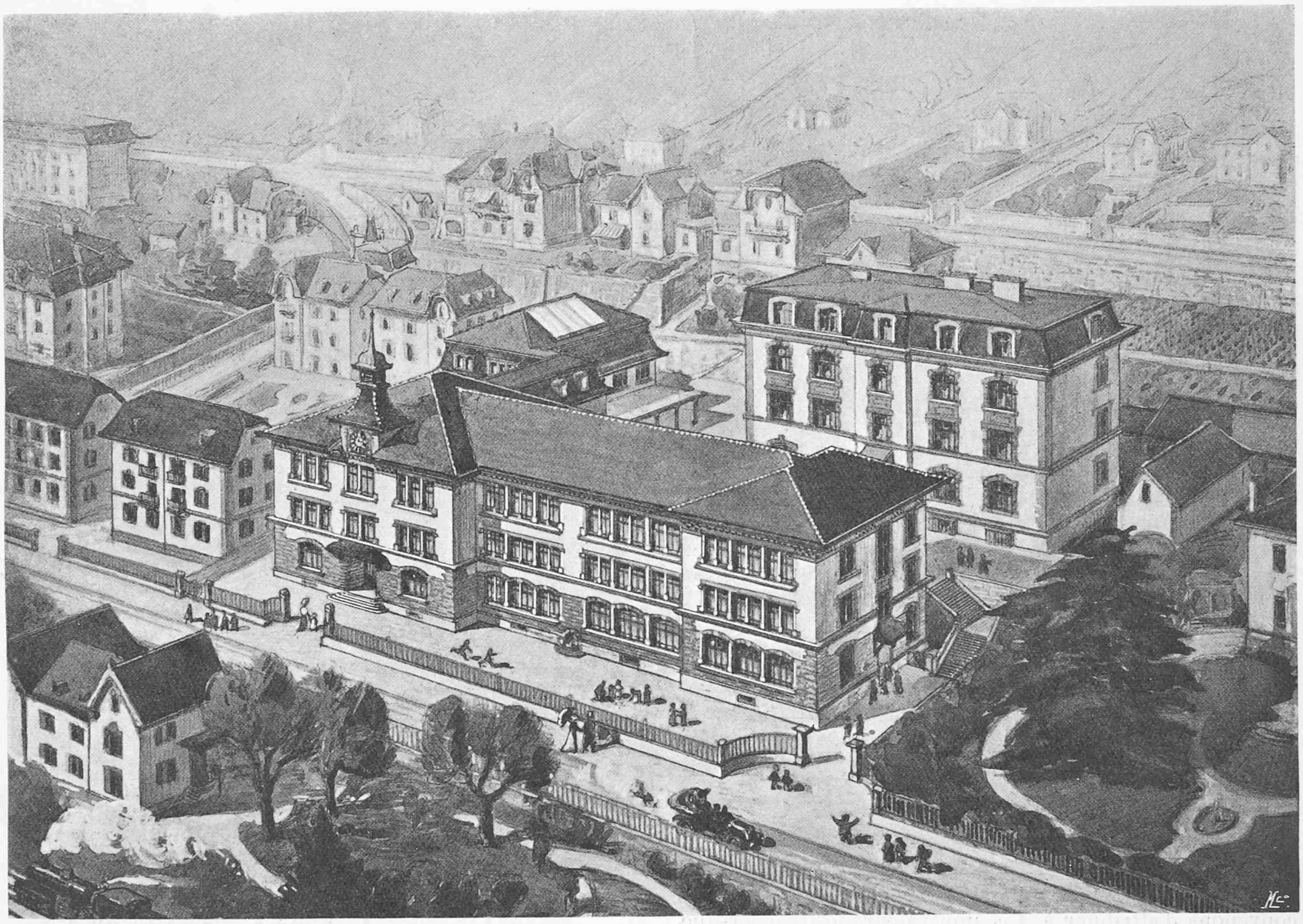
124. Le résultat qu'on vient d'obtenir permet, dans certains cas, de déterminer les tensions dans les systèmes statiquement déterminés.

Considérons un système articulé libre dans l'espace et en équilibre sous l'action de forces extérieures concentrées en ses nœuds. Supposons que toutes les notations fixées aux paragraphes 85 et 86 aient été conservées et rappelons que, lorsqu'on imprime à ce système une déformation virtuelle arbitraire, la somme des travaux des forces extérieures est égale à la somme des travaux des forces intérieures. En conséquence, à toute déformation virtuelle bien définie on peut faire correspondre une équation renfermant comme inconnues les tensions des diverses barres. Si d'ailleurs cette déformation est choisie de manière que seule la barre (l_{ik}) subisse un allongement virtuel δl_{ik}, les autres barres conservant des longueurs invariables, l'équation correspondante prend la forme

$$\delta\, T_e = T_{ik}\, \delta\, l_{ik},$$

en convenant de désigner par δT_e la somme des travaux des forces extérieures et par T_{ik} l'intensité de la tension dans la barre l_{ik}. Dès lors, il devient possible de calculer T_{ik}.

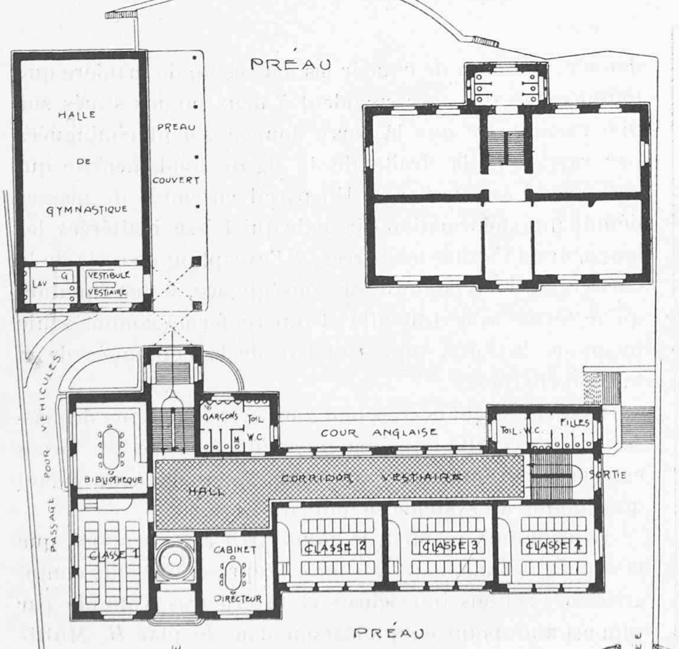
Ces principes rappelés, admettons que le système ait été représenté dualistiquement sur le plan Π, de manière qu'on connaisse la figure fondamentale formée par les droites l'_{ik} et les forces F'_i. Imprimons à ce système une déformation virtuelle que nous supposerons tout d'abord quelconque et imaginons que pour la définir, on ait choisi,



Perspective.

CONCOURS POUR LE BATIMENT SCOLAIRE DES SABLONS, A NEUCHATEL

IIIe prix : projet « MCMIX », de MM. Châble et Bovet, architectes, à Neuchâtel.



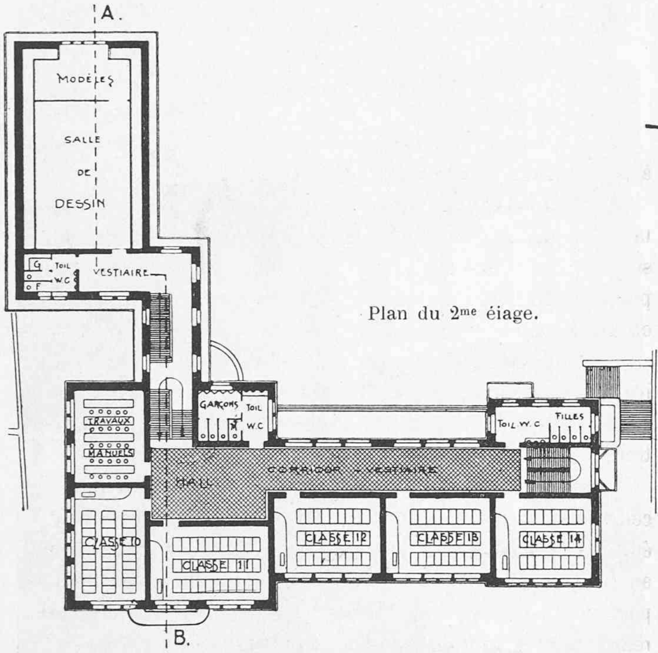
Plan du rez-de-chaussée.

arbitrairement d'ailleurs, les masses représentatives qui correspondent aux déplacements virtuels des divers nœuds. Si l'on convient de désigner d'une manière générale par m_i la masse qui correspond au nœud (A_i), la règle énoncée à la fin du paragraphe précédent permet de déterminer les travaux des forces extérieures et intérieures.

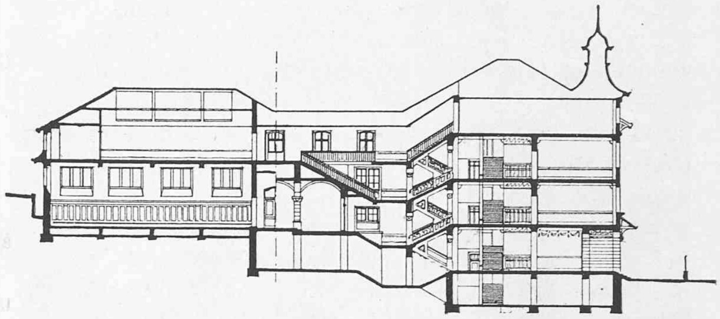
D'une part, en effet, le travail de la force extérieure (F_i) est égal, au facteur $\frac{1}{a^2}$ près, au moment statique de la masse m_i relativement à la force F'_i ; dans ces conditions, l'évaluation de la somme des travaux des forces extérieures est immédiate.

Pour obtenir ensuite la forme que prend la somme des travaux des forces intérieures, considérons, par exemple, la barre (l_{ik}) qui réunit les deux nœuds (A_i) et (A_k). A cette barre correspondent deux forces intérieures représentées dans la figure fondamentale par deux vecteurs T'_{ik} et T'_{ki}, égaux, mais de sens opposés et ayant la droite l'_{ik} pour ligne d'action commune. Imaginons alors qu'on ait choisi,

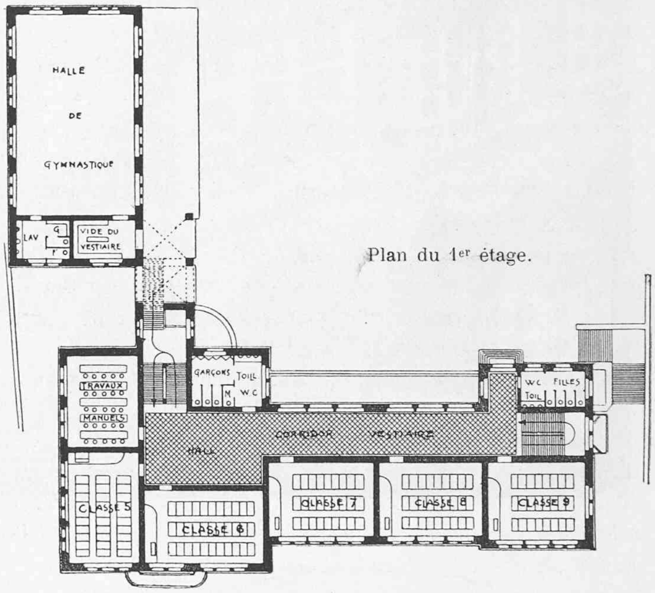
CONCOURS POUR LE BATIMENT SCOLAIRE DES SABLONS, A NEUCHATEL



Plan du 2me éiage.



Coupe A.-B.



Plan du 1er étage.

IIIe prix : projet « MCMIX », de MM. Châble et Bovet, architectes, à Neuchâtel.

arbitrairement d'ailleurs, un sens positif sur cette droite et convenons d'attribuer à T'_{ik} une valeur positive lorsque cette force est dirigée dans le sens positif de l'axe l'_{ik}. On voit immédiatement que la somme des travaux virtuels des deux forces intérieures considérées est égale, au facteur $\frac{1}{a^2}$ près, au produit de T'_{ik} par la différence des moments statiques des deux masses m_i et m_k relativement à l'axe l'_{ik}. Et comme les travaux virtuels des autres forces intérieures peuvent être évalués d'une manière analogue, l'équation relative à la déformation définie par les masses m_i s'obtient sans aucune difficulté.

D'autre part, il est possible d'indiquer les conditions qui doivent être remplies par les masses m_i pour que l'équation correspondante permette le calcul d'une tension désignée à l'avance.

A cet effet, considérons encore la barre (l_{ik}) et supposons que les deux masses m_i et m_k soient telles qu'elles forment un groupe harmonique avec leur centre de gravité et le point de rencontre de la droite qui les réunit avec la droite l'_{ik}. La différence de leurs moments statiques s'annule alors par rapport à cette dernière droite, et il en est de même de la somme des travaux des deux forces intérieures qui correspondent à la barre considérée. Pour simplifier un peu le langage, nous conviendrons de dire que, lorsque ces conditions sont remplies, les masses m_i et m_k sont conjuguées par rapport à la droite l'_{ik}.

D'après cela, pour obtenir la tension dans une barre donnée, il suffira de choisir les masses m_i de manière que toutes celles qui correspondent à deux nœuds situés sur une barre autre que la barre donnée soient conjuguées par rapport à la droite de la figure fondamentale qui correspond à cette barre. Un pareil ensemble de masses définit une déformation virtuelle qui laisse inaltérées les longueurs de toutes les barres, à l'exception de celle de la barre donnée ; il conduit, en conséquence, à une équation qu'on forme sans difficulté et qui renferme comme seule inconnue la force représentative de la conjuguée de la tension cherchée.

L'équation qui correspond à un système donné de masses fictives résulte immédiatement du fait que les forces extérieures et intérieures qui sont appliquées à un nœud quelconque du système se font équilibre.

Considérons, en effet, le nœud (A_i) et exprimons que la somme des moments des forces représentives des conjuguées des actions intérieures et extérieures s'annule par rapport à un point m_i quelconque dans le plan II. Multiplions ensuite la relation ainsi obtenue par une quantité arbitraire à laquelle nous ferons jouer le rôle d'une masse fictive concentrée au point m_i et que, pour cette raison, nous désignerons par m_i. Enfin, supposons qu'après avoir répété des opérations analogues pour chacun des nœuds du système, on additionne membre toutes les relations obtenues. Il est alors immédiatement visible que l'équation résultante obtenue est précisément celle qui correspond à la déformation virtuelle définie par les masses m_i.

D'après cela, la méthode qui précède résulte de considérations très élémentaires. Cependant, comme nous allons le voir, il n'était pas inutile de faire ressortir les liens qui la rattachent au principe des travaux virtuels.

En premier lieu, on conçoit sans aucune peine, en effet, que la recherche des masses fictives conduisant à une équation renfermant une seule tension inconnue peut être singulièrement facilitée lorsqu'on sait que ces masses représentent les déplacement virtuels que subissent les nœuds du système lorsqu'une seule barre s'allonge infiniment peu.

D'autre part, supposons que le système considéré soit librement dilatable. Il est alors possible d'attribuer aux diverses barres des allongements infiniment petits absolument arbitraires. Le principe des travaux virtuels permettra donc, dans ce cas, de déterminer les tensions produites dans toutes les barres, ce qu'on exprime en disant que le système considéré est statiquement déterminé. On peut affirmer, dès lors, que dans tout système statiquement déterminé, il est possible de faire correspondre à chaque barre un ensemble de masses fictives telles que l'équation correspondante renferme comme seule inconnue la tension dans la barre considérée.

On peut remarquer maintenant que la méthode suivie au paragraphe 90 pour le calcul de la tension dans la barre (l_{17}) n'est qu'un cas particulier de celle que nous venons d'exposer. Les masses fictives correspondent aux nœuds de la couronne supérieure de la coupole et ont été concentrées aux points m_1, m_2,..., de la figure fondamentale 2 de la planche VI. Elles sont égales en valeur absolue, mais alternativement de signes contraires. De plus, il est visible qu'elles correspondent à une déformation virtuelle qui n'allonge que la barre (l_{17}) et ne déplace que les nœuds de la couronne supérieure.

La méthode qui précède est évidemment applicable aux systèmes plans. Mais comme on peut, dans ce cas, supposer que toutes les masses fictives sont égales entre elles, on retombe sur une méthode connue et qui, sauf erreur, a été signalée pour la première fois par M. Saviotti.

Pour déterminer les travaux virtuels à l'aide de la règle énoncée, les déplacements virtuels ont été, dans tout ce qui précède, remplacés par des masses fictives. Il est clair qu'on peut aussi remplacer les forces données et les tensions inconnues par de nouvelles masses fictives, les déplacements virtuels des nœuds étant alors représentés par des vecteurs. On est ainsi conduit, pour la recherche des tensions, à une nouvelle méthode, qui est, en quelque sorte, dualistique de la précédente. Mais comme elle exige, en tout premier lieu, la recherche de la figure réciproque de la figure fondamentale par rapport à la circonférence directrice, elle ne paraît guère susceptible d'applications simples, et nous nous bornons, ici, à la signaler sans la développer.

Le béton armé et les tremblements de terre.

Conférence de M.S. de Mollins, faite le 27 mars 1909 devant la Société vaudoise des ingénieurs et architectes.[1]

Choix des matériaux.

Les qualités demandées aux matériaux correspondent à la définition même du béton armé.

Les matériaux anciens tels que : bois, maçonnerie, métal, ne donnaient que de mauvais résultats, tant par l'insuffisance de leur résistance aux secousses sismiques que par leur destruction facile par l'incendie qui suit toujours ou accompagne tout tremblement de terre.

Je n'insisterai que sur l'une des principales qualités intrinsèques à réaliser par les matériaux employés, qualité suffisamment mise en lumière par d'autres communications.

L'homogénéité, qui permet l'unité de vibration et d'accélération, facteur indispensable à la conservation des édifices en cas de séisme. Or, qu'un édifice soit construit en maçonnerie ou en maçonnerie et métal, chacune des parties vibre pour son compte avec les accélérations correspondantes et l'on assiste alors dans les séismes à ce spectacle courant de la projection de matériaux en tous sens (fig. 1).

Fig. 1. — Brisure des constructions en bois, ce qui montre l'insuffisance de liaison entre les diverses parties de la construction.

Cette remarque permet de ramener à leur juste valeur toutes les appréciations théoriques élogieuses sur les constructions composées de matériaux hétérogènes, juxtaposés, et plus ou moins bien réunis. Dans cette catégorie rentrent toutes les contructions en bois et toutes les constructions en métal avec remplissage ou garniture en maçonnerie, *terra cotta,* tôle, brique, etc.

Le béton armé, outre ses qualités de grande résistance, de continuité, d'élasticité et d'incombustibilité, offre au plus haut point cette qualité d'homogénéité indispensable : le métal en éléments de petit échantillon emprisonnés dans la masse la rend fibreuse en même temps que la gangue enveloppe celui-là, le protège et rend son action uni-

[1] Cette conférence est la reproduction d'une conférence faite par M. *Flament* devant la *Société des ingénieurs civils de France.*