Zeitschrift: Bulletin technique de la Suisse romande
Band: 34 (1908)
Heft: 21

Artikel: Application de la statiqe graphique aux systèmes de l'espace
Autor: Mayor, B.
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-26869

5 cm. reposant tous les 50 cm. sur poutrelles de 21 cm. sur 6 cm. d'épaisseur, se portait en grande partie d'un mur à l'autre sans trop charger la solive médiane qui baissait sensiblement aux étages inférieurs. Seule la charge d'essai les y a contraint. Mais une fois la flexion prise au droit de cette solive par striction du métal, le plancher ne devait plus revenir sur lui-même.

Après vérification des diverses parties de la construction, aucune trace de fatigue n'a pu être découverte.

Application de la statique graphique aux systèmes de l'espace.

Par M. B. Mayor, professeur.

(Suite [1]).

CHAPITRE VIII

La méthode des sections multiples.

115. Pour déterminer les tensions des barres d'un système articulé, on peut encore utiliser un procédé qu'il est naturel de désigner sous le nom de méthode des sections multiples et dont nous avons indiqué le principe dans une note des comptes-rendus des séances de l'Académie des sciences du 20 juillet 1908. Ainsi que cela résulte de la suite, cette méthode comprend comme cas très particulier celle de Culmann et paraît susceptible, en conséquence, d'applications plus nombreuses.

Considérons, en effet, un système articulé libre dans l'espace et en équilibre sous l'action de forces concentrées en ses nœuds. Admettons qu'il possède un groupe P de p barres, dites principales, satisfaisant aux conditions suivantes :

Il existe n sections S_1, S_2, ..., S_i, ..., S_n, dont chacune divise le système en deux parties distinctes en rencontrant toutes les barres principales sans passer par aucun nœud. De plus, chaque section telle que S_i rencontre encore un groupe Q_i de q_i barres, dites auxiliaires, les divers groupes Q_i étant supposés n'avoir en commun aucune barre. Sous certaines réserves qui résultent de la suite, il est possible de déterminer géométriquement ou analytiquement les tensions de toutes les barres principales et auxiliaires, lorsque les nombres p, q_i et n vérifient la relation

$$p + \sum_1^n q_i = 6n. \tag{1}$$

En effet, désignons d'une manière générale par A_i et B_i les deux parties en lesquelles le système se trouve divisé par la section S_i, et, pour préciser ces notations, remarquons que chacune de ces sections sépare les nœuds situés sur les barres principales en deux classes qui ne dépendent pas de l'indice i. Nous admettrons alors que les diverses parties A_i contiennent en commun tous les nœuds de l'une de ces classes, les parties B_i renfermant nécessairement tous les nœuds de l'autre.

Imaginons ensuite que la section S_i ayant été réellement opérée, on supprime la partie B_i en remplaçant son effet par des tensions équivalentes. En exprimant que la partie restante demeure en équilibre sous l'action de ces tensions et des forces extérieures qui y sont appliquées, on obtient un système de six équations linéaires où figurent comme inconnues les tensions principales et les tensions auxiliaires du groupe Q_i. Si donc on applique successivement le même raisonnement à chacune des sections S_i, on obtient un ensemble de $6n$ équations qui, en général, permet de calculer les tensions principales et auxiliaires, lorsqu'on suppose vérifiée la relation (1), puisque, dans ce cas, le nombre des inconnues est précisément égal à celui des équations.

Avant de poursuivre, quelques remarques sont indispensables.

Tout d'abord, on peut admettre que q_i est inférieur, ou au plus égal, à cinq; car, s'il en était autrement, il y aurait avantage à supprimer la section S_i qui introduirait un nombre de tensions auxiliaires inconnues supérieur ou égal à celui des équations qu'elle fournit.

D'autre part, on peut encore supposer que p est au plus égal à six. Car, si l'on avait $p > 6$, on voit, sans aucune difficulté, qu'on pourrait, par exemple, combiner la section S_1 avec chacune des suivantes de manière à constituer un nouveau système de $n-1$ sections ne rencontrant plus les barres principales et conduisant à un système de $6(n-1)$ équations entre des inconnues dont le nombre se trouverait diminué de plus de six unités. Les barres du groupe Q_1 deviendraient ainsi principales, tandis que celles des groupes $Q_2, \ldots, Q_n$ resteraient auxiliaires.

Ces diverses conditions étant supposées remplies, la relation (1) montre immédiatement que n est au maximum égal à six. De plus, il devient possible de déterminer géométriquement les tensions dans toutes les barres rencontrées par les diverses sections S_i.

Les barres du groupe Q_1 peuvent être considérées comme les directrices de q_1 complexes spéciaux; elles définissent donc, en général, un système linéaire de complexes dont le système complémentaire possède $6 - q_1$ termes. Choisissons, dans ce système complémentaire, $6 - q_1$ complexes n'appartenant pas à un même système linéaire dont le nombre de termes soit inférieur à $6 - q_1$, et répétons cette opération pour chacune des sections S_i. On est ainsi conduit à une suite de complexes dont le nombre est précisément égal à p, puisque, d'après la relation (1),

$$\sum_1^n (6 - q_i) = 6n - \sum_1^n q_i = p.$$

Convenons de les désigner par (Γ_1), (Γ_2), ..., (Γ_p), les $6 - q_1$ premiers dépendant de S_1, les $6 - q_2$ suivants de S_2, et ainsi de suite.

On peut déjà observer que ces complexes permettent une détermination analytique très simple de toutes les tensions principales.

[1] Voir N° du 25 juin 1908, page 137.

Si, d'une manière générale, on désigne en effet par (F_i) le système constitué par les forces extérieures agissant sur la partie A_i, il résulte d'une remarque déjà faite que A_1 demeure en équilibre sous l'action de (F_1) et des tensions des barres des groupes P et Q_1. La somme des moments de ces diverses forces s'annule donc par rapport au complexe (Γ_1), et comme celui-ci est en involution avec chacune des barres du groupe Q_1, l'équation qu'on obtient de cette manière renferme comme seules inconnues les tensions principales. Si donc on applique le même raisonnement à chacun des complexes (Γ_i), on obtient en définitive un système de p équations linéaires renfermant comme seules inconnues les p tensions principales qui, de cette manière, peuvent se déterminer analytiquement.

On peut déduire de ce qui précède une solution purement géométrique en remarquant que les barres principales peuvent, à leur tour, être considérées comme les directrices de p complexes spéciaux. Elles définissent donc un système linéaire à p termes que nous désignerons par (C) et possédant, en général, un complexe et un seul qui se trouve simultanément en involution avec les $p-1$ complexes (Γ_2), (Γ_3), ..., (Γ_p). Soit alors (Γ_1') ce complexe. Puis, de même, désignons par (Γ_2') le complexe de (C) qui est en involution avec (Γ_1), (Γ_3), (Γ_4), ..., (Γ_p), et ainsi de suite jusqu'à (Γ_p') qui appartient encore à (C) et se trouve en involution avec (Γ_1), (Γ_2), ..., (Γ_{p-1}).

Imaginons alors qu'on décompose, ce qu'il est possible de faire d'une manière et d'une seule, le système (F_1) en deux systèmes dont l'un, (F_1'), admette (Γ_1') pour complexe d'action et dont l'autre soit en involution avec (Γ_1). Les moments de (F_1) et de (F_1') sont alors égaux par rapport à (Γ_1), de sorte que, dans l'application de la méthode analytique, ces deux systèmes peuvent être substitués l'un à l'autre, lorsqu'on forme l'équation des moments par rapport à (Γ_1). De même, si l'on décompose encore (F_1) en deux systèmes dont l'un (F'_2) admette (Γ_2') pour complexe d'action et dont l'autre soit en involution avec (Γ_2), il est encore permis, lorsqu'on forme l'équation des moments relative à (Γ_2), de remplacer (F_1) par (F'_2). On voit immédiatement dès lors qu'il est possible, sans altérer les équations dont dépendent les tensions principales, de substituer aux n systèmes (F_i), p systèmes (F_i') admettant respectivement les complexes (Γ_i') pour complexes d'action.

Si, d'autre part, on désigne par (F') le système résultant de tous les (F_i'), il est encore possible, dans l'application de la méthode analytique, de remplacer l'un quelconque de ces (F_i') et, par suite, chacun d'eux par (F') ; car, par exemple, le moment de (F_1') par rapport à (Γ_1) est le même que celui de (F'), les complexes d'action de (F_2'), (F_3') étant tous en involution avec (Γ_1).

Si donc on désigne par (T) le système formé par les tensions principales, il résulte de ce qui précède que les moments de (T) et de (F') sont égaux par rapport aux p complexes (Γ_i). Comme, d'autre part, les complexes d'action de ces deux systèmes appartiennent à (C), (T) et (F') sont nécessairement identiques. Pour obtenir les tensions principales il suffira donc de décomposer (F') suivant les p barres principales, ce qu'il est toujours possible de faire d'une manière et d'une seule, le complexe d'action de (F') appartenant à (C).

Les tensions principales ayant été ainsi déterminées, il est bien simple d'en déduire les tensions de toutes les barres auxiliaires.

Considérons, en effet, la section S_1 et convenons de désigner par (T_1) le système de forces constitué par les tensions des barres formant le groupe Q_1. Un raisonnement déjà utilisé tout au début de ce chapitre montre immédiatement que les trois systèmes (T), (F_1) et (T_1) se font équilibre ; et, comme les deux premiers sont connus, on peut facilement déterminer (T_1), puis le décomposer suivant les barres auxiliaires du groupe Q_1. Un procédé analogue permettrait de déterminer toutes les tensions auxiliaires.

116. Lorsque le système considéré et les forces qui le sollicitent ont été représentés dualistiquement sur le plan Π, toutes les opérations que nécessite l'application de la méthode des sections multiples peuvent être effectuées graphiquement.

Pour déterminer, en premier lieu, les complexes (Γ_i), il suffit d'appliquer une méthode analogue à celle qui se trouve exposée au paragraphe 97 et à l'aide de laquelle on peut obtenir le complexe en involution avec cinq droites données.

Supposons, en effet, qu'on veuille déterminer le complexe (Γ_1) qui doit être en involution avec toutes les barres auxiliaires du groupe Q_1, et, pour fixer les idées, admettons que ce groupe renferme trois barres que nous désignerons par (l_1), (l_2) et (l_3).

Choisissons alors trois complexes (G'), (G'') et (G''') ne faisant pas partie d'un même système à deux termes et renfermant tous trois la droite (l_1) ; un pareil choix, nous l'avons déjà vu, est possible d'une infinité de façons différentes. Considérons ensuite le système à deux termes défini par (G') et (G''), puis déterminons, à l'aide du procédé indiqué au paragraphe 96, le complexe de ce système qui renferme la droite (l_2). Soit alors (G_1''') ce complexe qui, en vertu d'un théorème établi, contient aussi la droite (l_1) et, par conséquent, se trouve en involution avec (l_1) et (l_2).

En considérant encore le système à deux termes défini par (G'') et (G'''), on peut déterminer d'une manière semblable un nouveau complexe (G_1') contenant aussi les deux droites (l_1) et (l_2). Enfin, par des opérations analogues et à l'aide de (G_1') et (G_1'''), on peut obtenir un dernier complexe renfermant (l_1), (l_2) et (l_3), et qui, nécessairement, peut jouer le rôle de (Γ_1). De plus, il est évident que tous les complexes (Γ_i) peuvent être obtenus par cette méthode à laquelle, d'ailleurs, on peut apporter des simplifications identiques à celles qui font l'objet du paragraphe 98.

Les complexes (Γ_i') peuvent être déterminés ensuite par un procédé semblable.

Il est facile, en effet, de déterminer préalablement autant de complexes qu'on le veut du système à p termes (C) défini par les barres principales. Car, d'une part, tout complexe spécial admettant une de ces barres comme directrice appartient à ce système, et, d'autre part, il en est de même de tout complexe d'un faisceau défini par deux complexes quelconques de (C).

Choisissant alors un nombre suffisant de ces complexes, des opérations analogues à celles qui viennent d'être décrites permettent de déterminer facilement tous les complexes (Γ_i').

Actuellement, il est possible d'obtenir les systèmes de forces (F_i').

Le complexe d'action de (F_i) et (Γ_i') définissent, en effet, un système à deux termes possédant un seul complexe en involution avec (Γ_i). La méthode indiquée au paragraphe 96 conduit immédiatement à ce complexe et la recherche de (F_i') ne dépend plus que de la décomposition de (F_i), suivant ce même complexe et suivant (Γ_i). D'ailleurs, cette décomposition n'exige que la construction d'un triangle dont un côté représente en grandeur, direction et sens la force représentative de (F_i), tandis que les deux autres côtés sont respectivement parallèles aux droites représentatives des deux complexes considérés.

Tous les systèmes (F_i') étant ainsi déterminés, la recherche de leur système résultant (F') n'offre aucune difficulté et peut, par exemple, s'effectuer à l'aide d'une chaîne funiculaire. Il suffit dès lors, pour obtenir les tensions principales, de décomposer (F') suivant les barres principales. Et, comme le complexe d'action de (F') appartient nécessairement à (C), la décomposition de (F') s'opère d'autant plus facilement que le nombre p des barres principales est plus petit. Examinons en effet quelques cas particuliers.

En premier lieu, supposons que p ait la plus grande valeur possible, c'est-à-dire qu'il soit égal à six. Le complexe d'action de (F') est alors quelconque puisqu'un système à six termes renferme tous les complexes de l'espace, et sa décomposition suivant les six barres principales peut s'opérer à l'aide du procédé indiqué à propos de la méthode de Culmann.

Admettons, en second lieu, que les barres principales soient au nombre de cinq et désignons-les par (l_1), (l_2), (l_3), (l_4) et (l_5). Proposons-nous de déterminer la tension (T_5) de la barre (l_5) et, dans ce but, convenons de représenter par (T_5') le système, d'ailleurs inconnu, formé par les tensions restantes. Les trois systèmes (F'), (T_5) et (T_5') se font équilibre et, en vertu d'une propriété souvent appliquée, leurs complexes d'action appartiennent à un même système à deux termes.

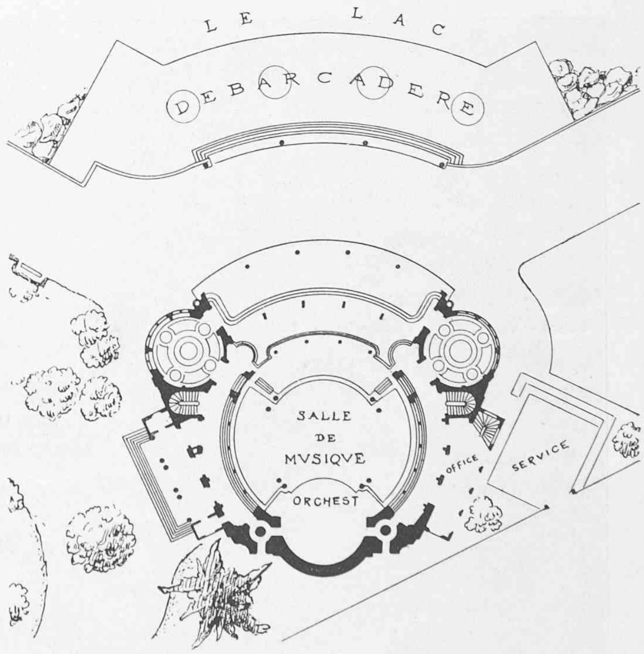
D'autre part, on démontre sans aucune peine que le système à cinq termes (C) défini par les barres principales renferme un complexe et un seul qui soit en involution avec (l_1), $l_2)$, (l_3) et (l_4); de plus, une méthode semblable à celle que nous avons indiquée pour la recherche du complexe opposé à une barre permet de l'obtenir. En le désignant par (G_5), on voit immédiatement qu'il est en involution avec le complexe d'action de (T_5'). Et comme ce dernier appartient à un système à deux termes défini plus haut, on l'obtient sans aucune peine. Il suffit dès lors, pour déterminer (T_5), de décomposer (F') suivant ce dernier complexe et la barre (l_5). D'ailleurs, il est bien évident que les tensions des autres barres principales peuvent être obtenues à l'aide du même procédé. Enfin, il est maintenant bien visible que les cas où p est inférieur à cinq se résolvent à l'aide de considérations analogues à celles que nous venons de développer.

117. Dans tout ce qui précède nous nous sommes préoccupés uniquement de la recherche des tensions principales. Mais, dès que celles-ci sont connues, il est bien simple d'en déduire les tensions auxiliaires.

Considérons, en effet, la section S_i et convenons de désigner par (θ_i) le système des tensions auxiliaires correspondantes et par (T) celui des tensions principales. (F_i), (T) et (θ_i) se font équilibre et l'on peut déterminer (θ_i), puisque (F_i) et (T) sont connus. En décomposant alors (θ_i) suivant les barres auxiliaires du groupe Q_i, ce qui n'exige que des opérations analogues à celles que nous venons de décrire, on obtient toutes les tensions auxiliaires de ce même groupe. *(A suivre.)*

Concours pour un pavillon de musique, à Genève [1].

Nous reproduisons aux pages 251 à 253 les principales planches des projets « *Odéon* » (2^{me} prix), de MM. Ed. Fatio et Ad. Thiers, architectes, à Genève, et « *Sur le lac* » (3^{me} prix), de MM. De Rham et Peloux, architectes, à Lausanne.



Plan du rez-de-chaussée.

2^{me} prix : projet « Odéon », de MM. Ed. Fatio et Ad. Thiers, architectes, à Genève.

[1] Voir N° du 25 octobre 1908, page 237.