Zeitschrift: Bulletin technique de la Suisse romande
Band: 34 (1908)
Heft: 12

Artikel: Application de la statiqur graphique aux systèmes de l'espace
Autor: Mayor, B.
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-26856

34me Année. 25 juin 1908. N° 12.

Bulletin technique de la Suisse romande

ORGANE EN LANGUE FRANÇAISE DE LA SOCIÉTÉ SUISSE DES INGÉNIEURS ET DES ARCHITECTES. — Paraissant deux fois par mois.

Rédacteur en chef : P. MANUEL, ingénieur, professeur à l'Ecole d'Ingénieurs de l'Université de Lausanne.

Secrétaire de la Rédaction : Dr H. DEMIERRE, ingénieur.

Application de la statique graphique aux systèmes de l'espace.

Par M. B. Mayor, professeur.

(Suite[1]*).*

106. Considérons toujours le système articulé précédemment défini et admettons qu'il soit sollicité par des forces concentrées en ses nœuds et se faisant équilibre. Convenons encore de désigner par (F) le système constitué par les forces extérieures qui agissent sur la partie A et par T_i la tension produite dans la barre (l_i) rencontrée par la section S. Admettons enfin que seule cette dernière barre soit élastique et déformable, toutes les autres étant, provisoirement du moins, considérées comme formées d'une substance qui ne s'allonge ni ne se raccourcit sous l'influence des forces extérieures. Si l'on désigne alors par E_i son module d'élasticité et σ_i l'aire de sa section transversale, l'allongement qu'elle subit est donné par la formule bien connue

$$\delta l_i = \frac{T_i\, l_i}{E_i\, \sigma_i}.$$

Si donc on suppose la partie B maintenue fixe, la résultante du système de rotations qui caractérise le déplacement de la partie mobile A a pour valeur

$$\theta_i = - \frac{T_i\, l_i}{E_i\, \sigma_i\, (l_i\, \omega_i)},$$

ou, en tenant compte de la formule

$$T_i = - \frac{(F,\, \omega_i)}{(l_i\, \omega_i)},$$

qui vient d'être établie,

$$\theta = \frac{(F,\, \omega_i)\, l_i}{E_i\, \sigma_i (l_i,\, \omega_i)^2}.$$

Or, dans cette dernière expression, les quantités l_i, $(l_i\, \omega_i)$, E_i et σ_i ne dépendent en aucune façon des forces qui agissent sur le système, et la valeur de l'expression

$$\frac{l_i}{E_i\, \sigma_i (l_i,\, \omega_i)^2}$$

doit être considérée comme une constante caractéristique de la barre (l_i). Elle va jouer le rôle de la quantité qu'on appelle quelquefois, dans le cas des systèmes plans, le poids élastique de la barre (l_i), et nous la désignerons simplement par μ_i. On aura donc

$$\theta_i = (F,\, \omega_i)\, \mu_i.$$

Imaginons alors qu'on multiplie par μ_i les intensités de tous les vecteurs dont l'ensemble constitue la vis désignée par (ω_i) ; on obtient un nouveau système ayant encore le complexe opposé à (l_i) pour complexe d'action et qui, comme μ_i, est caractéristique de la barre considérée en ce sens qu'il ne dépend pas des forces extérieures. Pour désigner ce nouveau système, dont le rôle est essentiel, nous utiliserons encore un terme introduit en mécanique par les géomètres anglais et nous l'appellerons le *torseur adjoint* à la barre (l_i) ; de plus, nous le désignerons par la notation symbolique (Ω_i). Dans ces conditions, la formule précédente peut être mise sous la forme

$$\theta_i = (F,\, \Omega_i),$$

et l'on peut énoncer le théorème suivant :

Lorsque la barre (l_i) s'allonge seule sous l'action d'un système de forces (F) agissant sur la partie modèle A, la résultante du système de rotations qui représente le déplacement de A est égal au moment de (F) par rapport au torseur adjoint à (l_i).

107. Il est actuellement possible de caractériser d'une manière simple et précise le système de rotations qui représente le déplacement de la partie mobile, lorsque la barre (l_i) s'allonge seule sous l'action de (F).

Nous venons de voir, en effet, qu'il admet même complexe d'action que (Ω_i) ou (ω_i), et que l'intensité de sa résultante générale a $(F,\, \Omega_i)$ pour valeur. Il ne dépend donc que de (F) et de (Ω_i) et constitue en définitive un nouveau torseur que nous appellerons le *dérivé* de (F) par rapport à (Ω_i). On peut l'obtenir en multipliant par $(F,\, \Omega_i)$ les vecteurs dont l'ensemble constitue la vis (ω_i) ; mais il est clair qu'on parvient au même résultat en multipliant les vecteurs dont l'ensemble forme le torseur adjoint (Ω_i) par ce même moment, préalablement divisé par l'intensité de la résultante générale de (Ω_i).

Comme nous le verrons dans un instant, la notion de torseur dérivé facilite notablement l'étude des déformations des systèmes articulés. Elle intervient également dans la

[1] Voir N° du 25 mai 1908, p. 113.

théorie des poutres à fibre moyenne gauche ainsi que dans diverses questions de mécanique rationnelle. En particulier, elle permet de résumer, dans l'énoncé suivant, les résultats obtenus jusqu'ici :

Lorsque la barre (l_i) *s'allonge seule sous l'action d'un système de forces* (F) *agissant sur la partie mobile* A, *le déplacement subi par cette dernière est entièrement représenté par le torseur dérivé de* (F) *relativement au torseur adjoint à* (l_i).

108. Pour étudier les déplacements qui prennent naissance dans un système lorsque plusieurs barres s'allongent simultanément sous l'action de forces extérieures données, il est nécessaire d'étendre quelque peu la notion de torseur dérivé.

Considérons, dans ce but, un système de forces (F) et des torseurs, en nombre quelconque, (Ω_1), (Ω_2), ..., (Ω_i), ..., (Ω_n). Déterminons les torseurs dérivés de (F) par rapport aux divers torseurs (Ω_i). Composons enfin tous ces torseurs dérivés en appliquant les règles ordinaires de la composition des vecteurs et des systèmes de vecteurs : on est alors conduit à un torseur résultant qui sera dit le dérivé de (F) par rapport à l'ensemble des (Ω_i).

Cette notion acquise, considérons un système articulé possédant n barres (l_1), (l_2), ..., (l_i), ..., (l_n), admettant chacune un torseur adjoint bien défini, et soit, d'une manière générale, (Ω_i) celui qui correspond à (l_i).

Pour déterminer ces torseurs adjoints, n sections S_1, S_2, ..., S_i, ..., S_n auront dû être pratiquées. Ces sections ne sont pas nécessairement différentes les unes des autres, mais chacune d'elles doit diviser le système en deux parties distinctes en rencontrant six barres. Nous désignerons alors par A_i et B_i les deux parties qui correspondent à la section S_i et nous admettrons essentiellement que ces parties constituent des systèmes indéformables lorsqu'on supprime les barres coupées, et cela quelle que soit la valeur de l'indice i. De plus, nous supposerons encore que toutes les parties A_i possèdent en commun un certain nombre de nœuds reliés par des barres non rencontrées par les diverses sections S_i, ces barres et ces nœuds formant encore un système indéformable désigné par A ; que, de même, toutes les parties B_i possèdent en commun un deuxième système indéformable B.

Ces diverses conditions étant remplies, imaginons qu'on applique aux nœuds de A des forces extérieures formant un système (F). Si l'on maintient fixes les nœuds de B et que seules les n barres considérées (l_1), (l_2), ..., (l_n) puissent se déformer sous l'action de (F), la partie A, que nous appellerons encore la partie mobile, subit un déplacement qu'on peut facilement déterminer à l'aide du principe de la superposition des déplacements infiniment petits.

Lorsqu'en effet, la barre (l_i) s'allonge seule sous l'action de (F), le déplacement de la partie mobile est représenté par le torseur dérivé de (F) relativement à (Ω_i). Comme, d'ailleurs, ce déplacement peut être considéré comme infiniment petit, lorsque les n barres considérées se déforment simultanément sous l'action de (F), le déplacement total de A est évidemment défini par le torseur dérivé de (F) relativement à l'ensemble des torseurs adjoints (Ω_i). On peut donc énoncer le théorème suivant :

Lorsque n barres se déforment simultanément, sous l'action d'un même système de forces (F), *le déplacement de la partie mobile est complètement représenté par le dérivé de* (F) *relativement à l'ensemble des torseurs adjoints aux barres considérées.*

Il convient de faire observer que, dans la recherche du dérivé, il n'est pas permis de remplacer les torseurs adjoints par leur système résultant. Le problème de la composition ou plutôt de l'équivalence des torseurs adjoints au point de vue du dérivé est l'analogue de celui de l'équivalence des masses dans la théorie des moments d'inertie des systèmes plans. Cela va, d'ailleurs, clairement ressortir de la suite.

109. Il est nécessaire maintenant d'exprimer sous une forme analytique la correspondance qui lie un système (F) à son torseur dérivé.

Dans ce but, désignons par X, Y, Z, L, M, N les coordonnées de (F) et par X', Y', Z', L', M', N' celles du dérivé (F'). Soient, de plus, a_i, b_i, c_i, λ_i, μ_i, ν_i les coordonnées de (Ω_i) et R_i l'intensité de la résultante générale de ce torseur adjoint.

Le moment de (F) par rapport à (Ω_i) ayant pour expression

$$(F, \Omega_i) = X\lambda_i + Y\mu_i + Z\nu_i + La_i + Mb_i + Nc_i,$$

les coordonnées du dérivé de (F) par rapport à (Ω_i) auront pour valeurs

$$X'_i = \frac{a_i}{R_i}(F, \Omega_i), \qquad L'_i = \frac{\lambda_i}{R_i}(F, \Omega_i),$$
$$Y'_i = \frac{b_i}{R_i}(F, \Omega_i), \qquad M'_i = \frac{\mu_i}{R_i}(F, \Omega_i),$$
$$Z'_i = \frac{c_i}{R_i}(F, \Omega_i), \qquad N'_i = \frac{\nu_i}{R_i}(F, \Omega_i).$$

Par suite, celles de (F') auront pour expressions

$$X' = \sum_1^n \frac{a_i}{R_i}(F, \Omega_i), \qquad L' = \sum_1^n \frac{\lambda_i}{R_i}(F, \Omega_i),$$
$$Y' = \sum_1^n \frac{b_i}{R_i}(F, \Omega_i), \qquad M' = \sum_1^n \frac{\mu_i}{R_i}(F, \Omega_i),$$
$$Z' = \sum_1^n \frac{c_i}{R_i}(F, \Omega_i), \qquad N' = \sum_1^n \frac{\nu_i}{R_i}(F, \Omega_i).$$

Or si l'on remplace, dans ces formules, (F, Ω_i) par sa valeur, on voit immédiatement qu'on peut les mettre sous la forme suivante :

$$X' = \alpha_{11}L + \alpha_{12}M + \alpha_{13}N + \alpha_{14}X + \alpha_{15}Y + \alpha_{16}Z,$$
$$Y' = \alpha_{21}L + \alpha_{22}M + \alpha_{23}N + \alpha_{24}X + \alpha_{25}Y + \alpha_{26}Z,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$N' = \alpha_{61}L + \alpha_{62}M + \alpha_{63}N + \alpha_{64}X + \alpha_{65}Y + \alpha_{66}Z,$$

où l'on a posé

$$\alpha_{11} = \sum_1^n \frac{a_i^2}{R_i}, \quad \alpha_{22} = \sum_1^n \frac{b_i^2}{R_i}, \quad \ldots, \quad \alpha_{66} = \sum_1^n \frac{\nu_i^2}{R_i},$$
$$\alpha_{12} = \sum_1^n \frac{a_i b_i}{R_i}, \quad \alpha_{13} = \sum_1 \frac{a_i c_i}{R_i}, \quad \ldots, \quad \alpha_{56} = \sum_1^n \frac{\mu_i \nu_i}{R_i}.$$

Le tableau formé par les coefficients a est symétrique par rapport aux éléments de sa diagonale, et si l'on considère la forme quadratique

$$\Phi = \frac{1}{2}[a_{11}L^2 + a_{22}M^2 + a_{33}N^2 + a_{44}X^2 + a_{55}Y^2 + a_{66}Z^2] +$$
$$+ a_{12}LM + a_{13}LN + a_{14}LX + a_{15}LY + a_{16}LZ +$$
$$+ a_{23}MN + a_{24}MX + a_{25}MY + a_{26}MZ + a_{34}NX +$$
$$+ a_{35}NY + a_{36}NZ + a_{45}XY + a_{46}XZ + a_{56}YZ,$$

on voit immédiatement que les coordonnées de (F') peuvent être mises sous la forme

$$\text{(I)} \quad \begin{aligned} X' &= \frac{\partial\Phi}{\partial L}, \quad Y' = \frac{\partial\Phi}{\partial M}, \quad Z' = \frac{\partial\Phi}{\partial N}, \\ L' &= \frac{\partial\Phi}{\partial X}, \quad M' = \frac{\partial\Phi}{\partial Y}, \quad N' = \frac{\partial\Phi}{\partial Z}. \end{aligned}$$

110. Pour interprêter ces résultats, convenons d'envisager, d'une façon générale, les complexes linéaires comme des éléments géométriques à l'aide desquels on puisse constituer des figures dans l'espace. Comme alors, les coordonnées X, Y, Z, L, M, N du système (F) peuvent être considérées comme les coordonnées homogènes de son complexe d'action, l'équation

$$\Phi = 0$$

représente une quadruple infinité de complexes linéaires dont l'ensemble constitue ce que nous appellerons, dans la suite, le système quadratique (Φ). Ainsi que nous allons le montrer, c'est précisément ce système quadratique qui joue, dans l'espace, le même rôle que l'ellipse d'élasticité relative aux systèmes articulés plans. Mais, auparavant, il est indispensable d'étendre quelque peu la notion de déplacement d'un point d'un solide suivant un axe passant par ce point.

Supposons donc qu'un solide subisse un déplacement infiniment petit représenté par un torseur que nous désignerons encore par (F'). Par un point quelconque (P) de ce solide faisons passer un axe, c'est-à-dire une droite sur laquelle on peut admettre qu'un vecteur unité a été porté dans un sens déterminé. On peut alors démontrer immédiatement que la projection sur cet axe du déplacement que subit le point (P) est égal au moment du torseur (F') par rapport au vecteur unité porté par cet axe. Cette projection ne dépend donc pas de la position particulière du point (P) sur l'axe, et il est permis, en conséquence, de l'appeler le déplacement du solide suivant cet axe. Dans le cas particulier où elle s'annule, l'axe devient un axe de déplacement nul et appartient au complexe d'action de (F').

Au lieu d'un axe considérons ensuite une vis ou, ce qui revient au même, un complexe linéaire sur l'axe duquel un sens positif (sens de la résultante unité de la vis considérée) a été fixé. Il devient alors naturel d'appeler *déplacement du solide suivant cette vis,* le moment du torseur (F') par rapport à cette même vis. Lorsqu'en particulier ce moment s'annule, la vis et le complexe qui la porte peuvent être appelés une vis et un complexe de déplacement nul, et l'on voit immédiatement que tous les complexes de déplacement nul forment un système linéaire à cinq termes qui coïncide avec le système complémentaire du complexe d'action de (F').

Ces définitions données, reprenons le système articulé précédemment considéré, et supposons toujours que la partie mobile A soit sollicitée par un système de forces (F). Proposons-nous alors de déterminer l'ensemble formé par les complexes de déplacement nul, lorsque les n barres (l_1), (l_2), ..., (l_n) se déforment simultanément sous l'action de (F).

Désignons, à cet effet, par X'', Y'', Z'', L'', M'', N'' les coordonnées de l'un quelconque (Γ'') de ces complexes de déplacement nul. Par définition, le moment du torseur dérivé (F') de (F) par rapport à une vis portée par (Γ'') doit s'annuler. On aura donc

$$X''L' + Y''M' + Z''N' + L''X' + M''Y' + N''Z' = 0,$$

ou, en tenant compte des formules (I)

$$X''\frac{\partial\Phi}{\partial X} + Y''\frac{\partial\Phi}{\partial Y} + Z''\frac{\partial\Phi}{\partial Z} + L''\frac{\partial\Phi}{\partial L} + M''\frac{\partial\Phi}{\partial M} + N''\frac{\partial\Phi}{\partial N} = 0.$$

Mais le premier membre de cette relation n'est autre chose que la forme polaire de Φ relativement aux deux complexes (Γ'') et (Γ) ; il est donc permis de dire que les complexes de déplacement nul de la partie mobile forment un système linéaire à cinq termes qui coïncide avec le système polaire de (Γ) relativement à (Φ).

111. La propriété qui précède montre bien que (Φ) constitue l'extension naturelle à l'espace de la notion d'ellipse d'élasticité ou, plutôt, de la notion de conique conjuguée de cette ellipse. Parmi les nombreuses conséquences qu'on en peut déduire, nous nous bornerons à en indiquer une qui peut servir de définition au système quadratique Φ.

Pour que le complexe d'action de (F) soit, en même temps, un complexe de déplacement nul, il faut et il suffit que l'on ait

$$X\frac{\partial\Phi}{\partial X} + Y\frac{\partial\Phi}{\partial Y} + Z\frac{\partial\Phi}{\partial Z} + L\frac{\partial\Phi}{\partial L} + M\frac{\partial\Phi}{\partial M} + N\frac{\partial\Phi}{\partial N} = 0,$$

ou bien, puisque Φ est une forme homogène et quadratique,

$$2\Phi = 0.$$

En conséquence, tout complexe du système (Φ) est caractérisé par le fait qu'il est de déplacement nul, lorsqu'il coïncide avec le complexe d'action d'un système de forces agissant sur la partie mobile A.

112. On peut se placer à un point de vue un peu différent pour interprêter les formules obtenues.

Si l'on considère les quantités X, Y, Z, L, M, N comme les coordonnées d'une droite, la relation

$$LX + MY + NZ = 0$$

étant, cela est bien entendu, supposée vérifiée, l'équation

$$\Phi = 0$$

est celle d'un complexe quadratique évidemment formé par les directrices de tous les complexes spéciaux qui sont contenus dans le système (Φ). Ce complexe possède de nombreuses propriétés qui le rapprochent aussi de l'ellipse d'élasticité des systèmes plans et l'on peut montrer, en particulier, qu'il se réduit en définitive à la conique conjugée de cette dernière, lorsque le système considéré est entièrement contenu dans un plan.

Toute droite appartenant à ce complexe est, en effet, une droite de déplacement nul, lorsque (F) se réduit à une résultante unique ayant précisément cette droite pour ligne d'action. D'autre part, les droites qui sont situées dans un plan quelconque enveloppent une conique ; et, comme cette propriété subsiste dans le cas où le système considéré est plan, il résulte immédiatement des propriétés de la conjuguée de l'ellipse d'elasticité, que cette dernière conique se confond avec celle du complexe relative au plan du système.

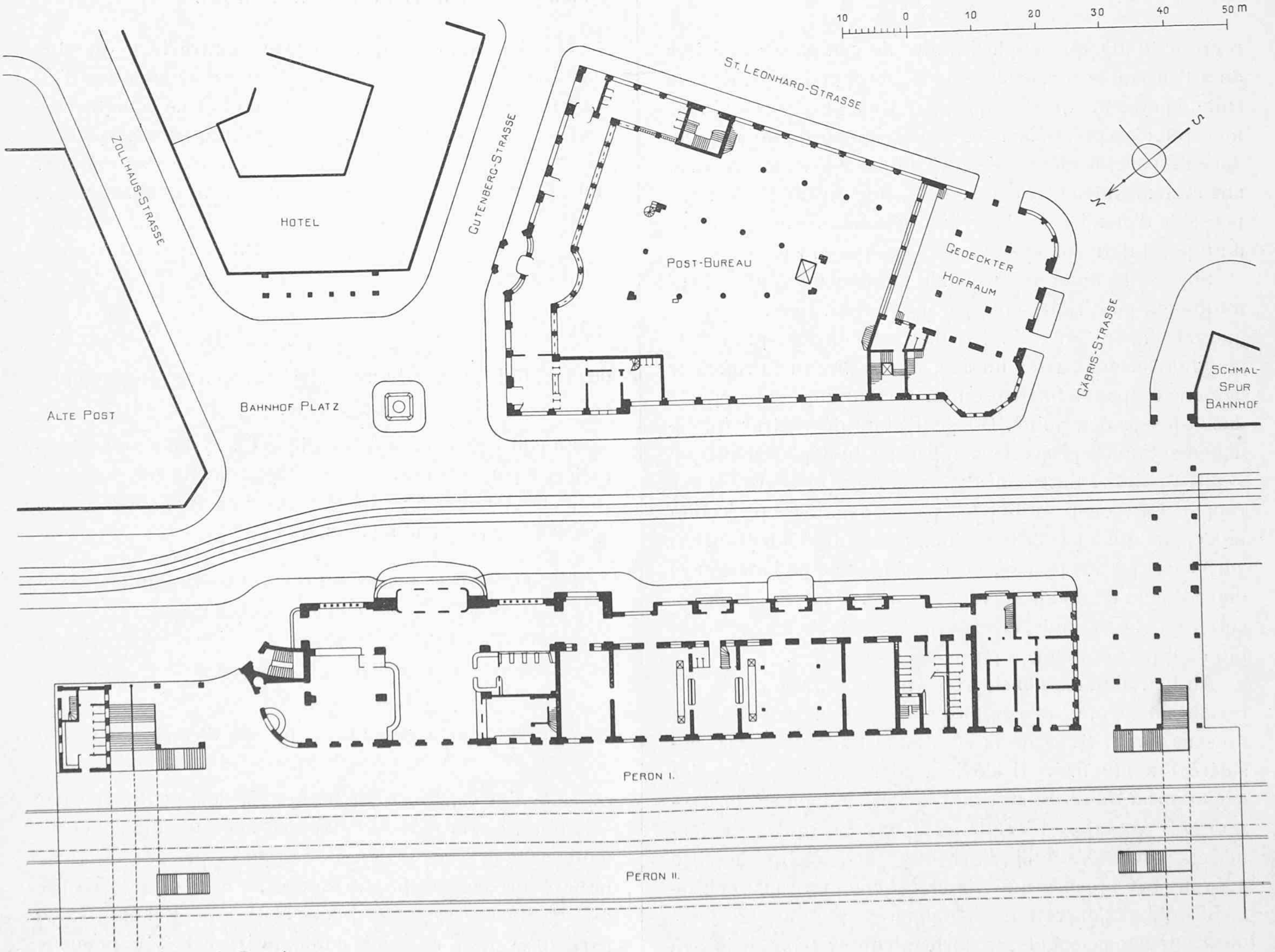
113. La connaissance de tous les torseurs (Ω_i) entraîne celle du système quadratique (Φ). Ce dernier sera donc parfaitement représenté sur le plan Π, à l'aide des seuls éléments représentatifs de ces torseurs, éléments que l'on détermine sans aucune peine, à l'aide des considérations développées au cours de ce chapitre. Dans ces conditions, l'étude graphique des déformations des systèmes articulés, pour lesquels chaque barre possède un complexe opposé, est possible ; en revanche, son intérêt est minime, étant donné le peu de généralité des systèmes auxquels elle est applicable et la complexité des opérations qu'elle entraîne. Pour toutes ces raisons, nous n'insisterons pas davantage sur ce sujet qui, actuellement du moins, ne peut offrir qu'un intérêt théorique.

114. Une dernière remarque doit encore être faite.

L'existence du système (Φ) paraît dépendre essentiellement de celle des complexes opposés aux barres qui se déforment. Il n'en est rien cependant, et l'on peut démontrer, à l'aide du principe de la superposition des effets des forces et d'une extension convenable du théorème de Maxwell sur la réciprocité des déplacements, que l'on peut faire correspondre à un ensemble de barres, dont aucune ne possède un complexe opposé, un système quadratique jouant exactement le même rôle que (Φ). Mais nous ne pouvons donner ici cette démonstration qui n'a, d'ailleurs, aucun rapport avec la méthode de Culmann.

(A suivre.)

CONCOURS DE PROJETS D'ENSEMBLE DES BATIMENTS DE LA NOUVELLE PLACE DE LA GARE, A ST-GALL.



Cliché de la « *Schweizerische Bauzeitung* ».

Plan de situation et plans du rez-de-chaussée des divers bâtiments. — 1 : 1000.

IIe prix ex æquo : Projet « Campanile », de MM. Pfleghard et Hæfeli, architectes, à Zurich.