Zeitschrift: Bulletin technique de la Suisse romande
Band: 30 (1904)
Heft: 4

Artikel: Application de la statique graphique aux systèmes de l'espace
Autor: Mayor, B.
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-24113

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 04.08.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

30me Année. 25 février 1904. N° 4.

Bulletin technique de la Suisse romande

ORGANE EN LANGUE FRANÇAISE DE LA SOCIÉTÉ SUISSE DES INGÉNIEURS ET DES ARCHITECTES. — Paraissant deux fois par mois.

Rédacteur en chef: M. P. HOFFET, professeur à l'Ecole d'Ingénieurs de l'Université de Lausanne.

Secrétaire de la Rédaction : M. F. GILLIARD, ingénieur.

SOMMAIRE : *Application de la statique graphique aux systèmes de l'espace* (suite et fin), par M. B. Mayor, professeur, à Lausanne. -- *La responsabilité contractuelle de l'architecte* (suite et fin), par M. J. Spiro, avocat et professeur, à Lausanne. — *Passage voûté de 7 m. d'ouverture sous la voie ferrée à la gare de Chexbres,* par M. A. Meyer, ingénieur, à Lausanne. Planche 6. — **Divers :** Pont sur l'Arve, aux Acacias. Rapport du jury. — Monument Philibert Berthelier. — Chemins de fer. — Wildstrubel et Lötschberg. — *Bibliographie.* — *Sociétés.*

Application de la statique graphique aux systèmes de l'espace.

Par M. B. MAYOR,
ingénieur et professeur.

(Suite et fin) [1].

78. La propriété que possède tout polygone funiculaire relatif à des forces données, de coïncider avec la figure d'équilibre d'un fil sollicité par ces forces peut encore être généralisée.

Dans ce but, considérons préalablement un solide S assujetti à des liaisons données, mais quelconques. On sait que tout déplacement infiniment petit de ce solide est caractérisé géométriquement par le complexe linéaire formé par les droites normales aux trajectoires de leurs divers points. De plus, ce complexe peut être considéré comme le complexe d'action du système de rotations qu'il est toujours possible de faire correspondre au déplacement considéré.

Ceci posé, admettons que S soit sollicité par des forces données (F_1), (F_2),...., (F_i),..., (F_n) et soient, d'une manière générale,

$$X_i,\ Y_i,\ Z_i,\ L_i,\ M_i,\ N_i$$

les coordonnées de la force (F_i) et

$$X,\ Y,\ Z,\ L,\ M,\ N$$

celles du système (F) qu'elles forment. Proposons-nous, alors, en appliquant le principe des vitesses virtuelles, de déterminer les conditions auxquelles doit satisfaire (F) pour que S demeure en équilibre.

A cet effet, imprimons à S un déplacement virtuel compatible avec les liaisons, et ϑ désignant une quantité infiniment petite, soient

$$\vartheta p,\ \vartheta q,\ \vartheta r,\ \vartheta\lambda,\ \vartheta\mu,\ \vartheta\nu$$

les coordonnées du système de rotation qui définit ce déplacement. Si l'on désigne par x_i, y_i et z_i les coordonnées du point d'application de la force (F_i), les projections, sur les axes, du déplacement de ce point ont pour valeurs

$$\delta x_i = \vartheta\,(\lambda + q z_i - r y_i)\,,$$
$$\delta y_i = \vartheta\,(\mu + r x_i - p z_i)\,,$$
$$\delta z_i = \vartheta\,(\nu + p y_i - q x_i)\,,$$

et le travail virtuel de la force (F_i) a pour valeur

$$\vartheta\,[X_i\,\lambda + Y_i\,\mu + Z_i\,\nu + p\,(y_i\,Z_i - z_i\,Y_i) + q\,(z_i\,X_i - x_i\,Z_i) + r\,(x_i\,Y_i - y_i\,X_i)\,]$$

ou, ce qui revient au même,

$$\vartheta\,[X_i\,\lambda + Y_i\,\mu + Z_i\,\nu + L_i\,p + M_i q + N_i\,r].$$

On aura donc pour la somme des travaux virtuels de toutes les forces données,

$$\vartheta\,[X\,\lambda + Y\,\mu + Z\,\nu + Lp + Mq + Nr].$$

Dans ces conditions, il faut et il suffit, pour que S soit en équilibre, que l'équation

$$X\,\lambda + Y\,\mu + Z\,\nu + Lp + Mq + Nr = O$$

soit satisfaite pour toutes les valeurs de p, q, r, λ, μ, ν qui correspondent à un déplacement compatible avec les liaisons. Mais, puisque les quantités p, q, r, λ, μ et ν peuvent être considérées comme les coordonnées du complexe attaché au déplacement considéré et que, par suite, l'équation obtenue exprime que ce complexe est en involution avec le complexe d'action de (F), on peut énoncer le théorème suivant :

Pour qu'un solide, assujetti à des liaisons quelconques et sollicité par un système de forces donné, soit en équilibre, il faut et il suffit que le complexe d'action du système de forces soit en involution avec les complexes linéaires attachés à tous les déplacements qui sont compatibles avec les liaisons du solide.

79. Le théorème qu'on vient d'obtenir peut être énoncé sous une forme un peu différente qui nous sera utile.

Si l'on désigne, en effet, par s le degré de liberté du solide S on démontre facilement que les complexes attachés à tous les déplacements compatibles avec les liaisons forment un système dont le nombre de termes est précisément égal à s. Comme ce système définit ou caractérise complètement les liaisons du solide, il en est évidemment de même du système complémentaire que nous désignerons dans la suite par (C^s). Dans ces conditions, le théorème précédent peut s'énoncer de la manière suivante :

Pour qu'un solide, assujetti à des liaisons caractérisées par le système complémentaire (C^s) soit en équilibre, il faut et il suffit que le complexe d'action des forces données appartienne à (C^s).

[1] Voir N° du 10 février 1904, page 112. — Article publié à l'occasion du cinquantième anniversaire de la fondation de l'École d'Ingénieurs de l'Université de Lausanne. (Voir *Note de la Rédaction*, page 104.)

80. A l'aide de ces résultats, il est bien simple d'obtenir la généralisation cherchée.

Considérons, en effet, une suite de solides S_1, S_2,..., S_i,..., S_n respectivement sollicités par les systèmes de forces (F_1), (F_2),..., (F_i),... (F_n) ; admettons, de plus, que S_1 soit lié à S_2, S_2 à S_1 et S_3, et ainsi de suite, jusqu'à S_n que nous ne supposons lié qu'à S_{n-1}. Les liaisons entre ces divers solides peuvent être absolument quelconques ; mais, nous les supposerons données et caractérisées de la manière suivante : considérant, d'une manière générale, les deux solides consécutifs S_{i-1} et S_i, nous supposerons connu le système complémentaire de complexes (C_{i-1}, i) qui correspond à tous les déplacements infiniment petits que peut prendre S_{i-1} lorsqu'on maintient fixe S_i. Il est d'ailleurs évident que ce même système complémentaire (C_{i-1}, i) correspond aux déplacements que peut prendre S_i lorsqu'on maintient fixe S_{i-1}.

A l'aide des résultats précédents, il est bien simple d'obtenir les conditions d'équilibre de la suite considérée.

Tout d'abord, le principe de solidification appliqué à toute cette suite montre que les systèmes de forces (F_1),..., (F_i),..., (F_n) doivent se faire équilibre. Le polygone des résultantes de cet ensemble doit donc être fermé ; de plus, si nous représentons par $(F_1, {}_{i-1})$ le système résultant de (F_1), (F_2),..., (F_{i-1}), et par $(F_i, {}_n)$ le système résultant de (F_i), (F_{i+1}),..., (F_n), ces deux systèmes auront un même complexe d'action qui sera désigné par (Γ_{i-1}, i).

Si l'on imagine, ensuite, que les liaisons entre les solides consécutifs S_{i-1} et S_i soient seules conservées, toutes les autres ayant été solidifiées de manière que la suite considérée se réduise en définitive à deux solides, il résulte du théorème énoncé en dernier lieu que l'équilibre ne peut avoir lieu que lorsque le complexe (Γ_{i-1}, i) appartient au système complémentaire (C_{i-1}, i).

Réciproquement, on voit sans peine que lorsque le polygone des résultantes est fermé et que la condition ci-dessus est satisfaite pour toutes les valeurs que l'on peut attribuer à l'indice i, la suite considérée est en équilibre.

Or, si l'on trace une chaîne funiculaire dont le pôle coïncide avec le sommet du polygone des résultantes qui correspond aux deux systèmes (F_1) et (F_n) et dont le premier complexe soit confondu avec le complexe d'action de (F_1), il est visible que ses complexes intermédiaires coïncident respectivement avec ceux qui ont été désignés par (Γ_{i-1}, i). Dès lors, pour vérifier qu'une suite de solides pareille à celle que nous avons considérée est en équilibre, il suffit de procéder comme suit : le polygone des résultantes étant fermé, tracer la seule chaîne funiculaire qui soit assujettie aux conditions qui viennent d'être indiquées, et s'assurer que chacun de ses complexes intermédiaires tel que (Γ_{i-1}, i) appartienne au système complémentaire (C_{i-1}, i) qui caractérise les liaisons existantes entre S_{i-1} et S_i. En particulier, le premier complexe de cette chaîne qui coïncide, par construction, avec le complexe d'action de (F_1) et qu'on peut, en vertu des notations adoptées, désigner indifféremment par (Γ_{11}) ou (Γ_{12}), doit appartenir à (C_{12}). Et, de même, le dernier complexe $(\Gamma_n, {}_n)$ ou $(\Gamma_{n-1}, {}_n)$ qui, d'ailleurs, coïncide avec le complexe d'action de (F_n), doit appartenir à $(C_{n-1}, {}_n)$.

Représentation plane des chaînes funiculaires.

81. Les principes développés jusqu'ici permettent de représenter très simplement les chaînes funiculaires relatives à un ensemble quelconque.

Considérons, en effet, un ensemble formé des systèmes (F_1), (F_2), (F_3), (F_4) et admettons qu'ils soient définis sur le plan Π par les éléments représentatifs de leurs complexes d'action et par un polygone dont les côtés représentent en grandeur, direction et sens leurs composantes horizontales. C'est ainsi que, dans la figure 15, f_1, f'_1, φ_1 et φ'_1 désignent les éléments représentatifs donnés du complexe d'action de (F_1) et ainsi de suite. Quant au polygone des composantes horizontales, il admet pour sommets les points A_{01}, A_{12}, A_{23}, A_{34}, A_{45} qui sont tous déterminés lorsqu'on a fixé, arbitrairement d'ailleurs, le premier d'entre eux.

Avant de poursuivre, il est utile d'observer que si l'on décrit le pourtour de ce polygone en sens inverse de son sens naturel, ses divers côtés représentent en grandeur, direction et sens les composantes horizontales des conjugués des systèmes donnés.

Cette remarque faite, proposons-nous, en premier lieu, de représenter le polygone des résultantes générales de l'ensemble considéré.

A cet effet, et dans le but de simplifier les opérations, choisissons, pour origine de ce polygone, un point (A_{01}) de l'espace, tel que son point représentatif coïncide avec l'extrémité initiale A_{01} du polygone des composantes horizontales. La ligne représentative A'_{01} est alors astreinte à la seule condition d'être parallèle à la droite OA_{01} ; si donc on convient de considérer O comme le pôle du polygone des composantes horizontales, on voit que A'_{01} est parallèle au premier rayon polaire de ce polygone.

En désignant ensuite par (A_{12}) le sommet du polygone des résultantes qui correspond aux deux systèmes consécutifs (F_1) et (F_2), on voit immédiatement que son point représentatif coïncide avec A_{12} : car la composante horizontale de la résultante générale de (F_1) est égale en grandeur, direction et sens à la composante horizontale F_1 de ce même système. De plus, la ligne représentative A'_{12} de ce sommet peut être immédiatement construite. La droite de l'espace qui réunit (A_{01}) et (A_{12}) est parallèle, en effet, à l'axe du complexe d'action de (F_1) ; sa ligne représentative coïncide, par conséquent, avec f'_1 et son point représentatif est nécessairement situé sur cette dernière droite. D'autre part, A'_{01} et A'_{12} passent également par ce point représentatif et la droite A'_{12} est bien déterminée : elle est parallèle, en effet, à la droite OA_{12}, c'est-à-dire au deuxième rayon polaire du polygone des composantes horizontales, et passe par le point de rencontre de f'_1 et de A'_{01}.

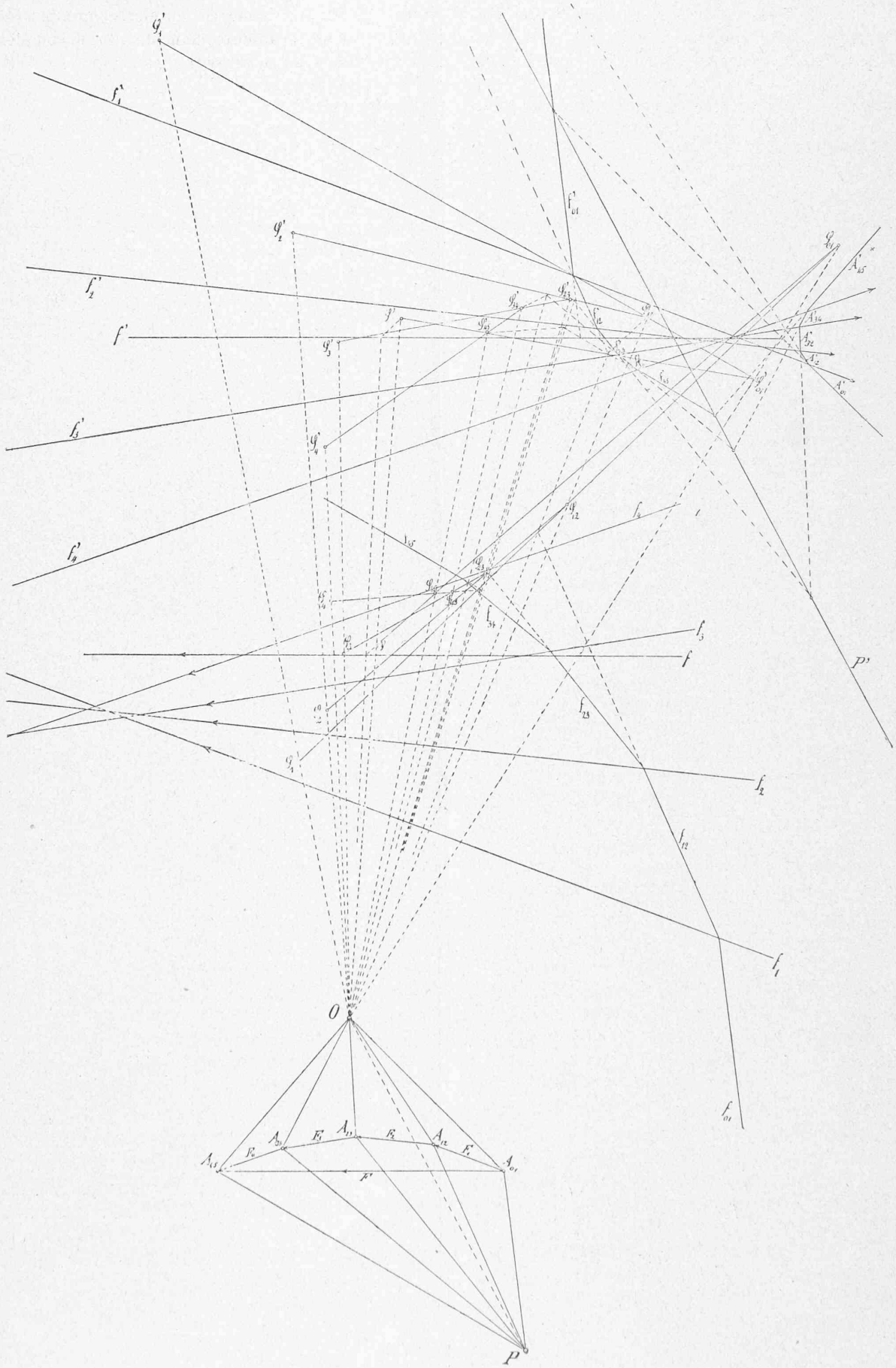

Fig. 15.

On verrait de la même manière que le sommet du polygone des résultantes qui correspond aux deux systèmes (F_2) et (F_3), admet A_{23} pour point représentatif; que, de plus, sa ligne représentative A'_{23} est parallèle au troisième rayon polaire du polygone des composantes horizontales, et la loi de formation du polygone cherché est, dès lors, bien évidente. Si, d'ailleurs, on tient compte du fait que le polygone A_{01}, A_{12}, A_{23}... parcouru en sens inverse de son sens naturel coïncide avec le polygone des composantes horizontales des conjugués des systèmes donnés et que, d'autre part, les lignes d'action de ces composantes coïncident précisément avec les droites f'_1, f'_2,... f'_4, on peut résumer cette loi à l'aide de l'énoncé suivant :

Pour représenter, sur le plan Π, l'un quelconque des polygones des résultantes d'un ensemble de systèmes, il suffit de construire un polygone des forces relatif aux composantes horizontales des systèmes conjugués, puis de décrire, en prenant O pour pôle et en choisissant arbitrairement le point de départ, un polygone funiculaire relatif à ces mêmes composantes. Les éléments représentatifs des sommets du polygone des résultantes sont alors constitués, d'une part, par les sommets du polygone des composantes et, d'autre part, par les côtés correspondants du polygone funiculaire qu'on vient de définir.

82. Ce résultat obtenu, il est facile de représenter une chaîne funiculaire relative à l'ensemble considéré.

Désignons, en effet, par P et P' les éléments représentatifs du pôle (P), la droite P' étant, bien entendu, tracée parallèlement à OP. Comme nous l'avons vu, le premier complexe (Γ_{01}) d'une chaîne correspondante à ce pôle est astreint à la seule condition d'avoir son axe parallèle au premier rayon polaire (PA_{01}) du polygone des résultantes générales. La droite représentative f'_{01} de ce complexe est dès lors complètement déterminée : elle est parallèle, en effet, à PA_{01} et passe par le point de rencontre de P' et de A'_{01} puisque ce point n'est autre chose que le point représentatif du premier rayon polaire (PA_{01}). Quant aux autres éléments représentatifs de (Γ_{01}), ils sont astreints à la seule condition de vérifier les relations générales qui lient les éléments représentatifs de tout complexe linéaire. Pour achever de les déterminer, il suffira, par exemple, d'astreindre f_{01} à passer par un point arbitrairement choisi et φ_{01} et φ'_{01} à se trouver sur deux droites quelconques.

A partir de là, le tracé de la chaîne est complètement déterminé. Le deuxième complexe (Γ_{12}) appartient, en effet, au système à deux termes défini par (Γ_{01}) et par le complexe d'action de (F_1) ; de plus, son axe est parallèle au deuxième rayon polaire (PA_{12}). Par suite, f_{12} passe par le point commun à f_{01} et f_1 ; de même, f'_{12} est parallèle à la même direction et passe par le point de rencontre de f'_{01} et de f'_1 ; enfin, φ_{12} et φ'_{12} sont respectivement situés sur les droites $\varphi_{01}\,\varphi_1$ et $\varphi'_{01}\,\varphi'_1$ et peuvent se déterminer en cherchant, comme nous l'avons déjà expliqué, la droite qui correspond à $\varphi_{01}\,\varphi_1$ dans l'homologie relative à (Γ_{01}).

Un procédé analogue permet ensuite de déterminer les éléments représentatifs f_{23}, f'_{23}, φ_{23} et φ'_{23} du troisième complexe de la chaîne, dont le tracé se poursuit alors régulièrement et s'achève sans aucune difficulté.

Il résulte de là qu'une chaîne funiculaire est en définitive représentée à l'aide de deux polygones funiculaires et de deux séries de points. Le premier de ces polygones est relatif aux composantes horizontales des systèmes qui constituent l'ensemble considéré et le deuxième correspond aux composantes horizontales de l'ensemble conjugué ; de plus, ces deux polygones sont décrits à l'aide du même pôle et du même polygone des forces, de sorte que leurs côtés correspondants sont parallèles. Quant aux deux séries de points, on peut, dans une certaine mesure, les envisager comme les figures dualistiques de celles que forment les deux polygones funiculaires.

On doit encore remarquer que les côtés du polygone funiculaire formé par les lignes représentatives A'_{01}, A'_{12},..., A'_{45} des sommets du polygone des résultantes rencontrent sur la droite P' les côtés correspondants du polygone funiculaire relatif aux composantes horizontales de l'ensemble conjugué. Cette propriété est, en premier lieu, une conséquence immédiate du fait que les points représentatifs des rayons issus du pôle (P) sont alignés sur la droite représentative P' de ce pôle. Mais elle résulte aussi du théorème d'après lequel les côtés correspondants de deux polygones funiculaires relatifs à un même système de forces se coupent en des points situés sur une droite parallèle à celle qui joint les pôles.

Ajoutons encore que sur la figure 15, où toutes les opérations qui conduisent à la représentation d'une chaîne funiculaire ont été indiquées, on a déterminé, en outre, les éléments représentatifs f, f', φ et φ' du système résultant (E) de l'ensemble considéré. D'ailleurs, le tracé de la chaîne étant achevé, cette détermination est immédiate : en vertu du théorème fondamental, le complexe d'action de ce système passe, en effet, par la congruence commune aux complexes extrêmes de la chaîne considérée. Par suite, les lignes représentatives f et f' qui doivent être parallèles à la droite $A_{01}\,A_{45}$ passent respectivement, en outre, par les points de concours des côtés extrêmes des deux polygones funiculaires à l'aide desquels on a pu représenter cette chaîne ; de plus, φ et φ' sont respectivement situés sur les droites $\varphi_{01}\,\varphi_{45}$, $\varphi'_{01}\,\varphi'_{45}$ et se correspondent dans l'homologie qui relie f à f'.

83. Les constructions qui précèdent montrent avec quelle facilité le mode de représentation dont nous n'avons pu qu'indiquer ici les principes généraux, se prête à la solution du premier problème général que soulève l'extension des méthodes de la statique graphique. Dans une nouvelle et prochaine série d'articles, nous aurons l'occasion d'établir que l'usage de ce même procédé est particulièrement bien indiqué dans l'étude des systèmes articulés à trois dimensions.