Inhaltsverzeichnis

30me Année. 25 février 1904. N° 4.

Bulletin technique de la Suisse romande

ORGANE EN LANGUE FRANÇAISE DE LA SOCIÉTÉ SUISSE DES INGÉNIEURS ET DES ARCHITECTES. — Paraissant deux fois par mois.

Rédacteur en chef: M. P. HOFFET, professeur à l'Ecole d'Ingénieurs de l'Université de Lausanne.

Secrétaire de la Rédaction : M. F. GILLIARD, ingénieur.

Application de la statique graphique aux systèmes de l'espace.

Par M. B. MAYOR,
ingénieur et professeur.

(Suite et fin) [1].

78. La propriété que possède tout polygone funiculaire relatif à des forces données, de coïncider avec la figure d'équilibre d'un fil sollicité par ces forces peut encore être généralisée.

Dans ce but, considérons préalablement un solide S assujetti à des liaisons données, mais quelconques. On sait que tout déplacement infiniment petit de ce solide est caractérisé géométriquement par le complexe linéaire formé par les droites normales aux trajectoires de leurs divers points. De plus, ce complexe peut être considéré comme le complexe d'action du système de rotations qu'il est toujours possible de faire correspondre au déplacement considéré.

Ceci posé, admettons que S soit sollicité par des forces données (F_1), (F_2),...., (F_i),..., (F_n) et soient, d'une manière générale,

$$X_i,\ Y_i,\ Z_i,\ L_i,\ M_i,\ N_i$$

les coordonnées de la force (F_i) et

$$X,\ Y,\ Z,\ L,\ M,\ N$$

celles du système (F) qu'elles forment. Proposons-nous, alors, en appliquant le principe des vitesses virtuelles, de déterminer les conditions auxquelles doit satisfaire (F) pour que S demeure en équilibre.

A cet effet, imprimons à S un déplacement virtuel compatible avec les liaisons, et ϑ désignant une quantité infiniment petite, soient

$$\vartheta p,\ \vartheta q,\ \vartheta r,\ \vartheta\lambda,\ \vartheta\mu,\ \vartheta\nu$$

les coordonnées du système de rotation qui définit ce déplacement. Si l'on désigne par x_i, y_i et z_i les coordonnées du point d'application de la force (F_i), les projections, sur les axes, du déplacement de ce point ont pour valeurs

$$\begin{aligned} \delta x_i &= \vartheta\,(\lambda + q z_i - r y_i)\,, \\ \delta y_i &= \vartheta\,(\mu + r x_i - p z_i)\,, \\ \delta z_i &= \vartheta\,(\nu + p y_i - q x_i)\,, \end{aligned}$$

et le travail virtuel de la force (F_i) a pour valeur

$$\vartheta\,[X_i\,\lambda + Y_i\,\mu + Z_i\,\nu + p\,(y_i\,Z_i - z_i\,Y_i) + q\,(z_i\,X_i - x_i\,Z_i) + r\,(x_i\,Y_i - y_i\,X_i)\,]$$

ou, ce qui revient au même,

$$\vartheta\,[X_i\,\lambda + Y_i\,\mu + Z_i\,\nu + L_i\,p + M_i q + N_i\,r].$$

On aura donc pour la somme des travaux virtuels de toutes les forces données,

$$\vartheta\,[X\,\lambda + Y\mu + Z\,\nu + Lp + Mq + Nr].$$

Dans ces conditions, il faut et il suffit, pour que S soit en équilibre, que l'équation

$$X\,\lambda + Y\mu + Z\,\nu + Lp + Mq + Nr = 0$$

soit satisfaite pour toutes les valeurs de p, q, r, λ, μ, ν qui correspondent à un déplacement compatible avec les liaisons. Mais, puisque les quantités p, q, r, λ, μ et ν peuvent être considérées comme les coordonnées du complexe attaché au déplacement considéré et que, par suite, l'équation obtenue exprime que ce complexe est en involution avec le complexe d'action de (F), on peut énoncer le théorème suivant :

Pour qu'un solide, assujetti à des liaisons quelconques et sollicité par un système de forces donné, soit en équilibre, il faut et il suffit que le complexe d'action du système de forces soit en involution avec les complexes linéaires attachés à tous les déplacements qui sont compatibles avec les liaisons du solide.

79. Le théorème qu'on vient d'obtenir peut être énoncé sous une forme un peu différente qui nous sera utile.

Si l'on désigne, en effet, par s le degré de liberté du solide S on démontre facilement que les complexes attachés à tous les déplacements compatibles avec les liaisons forment un système dont le nombre de termes est précisément égal à s. Comme ce système définit ou caractérise complètement les liaisons du solide, il en est évidemment de même du système complémentaire que nous désignerons dans la suite par (C^s). Dans ces conditions, le théorème précédent peut s'énoncer de la manière suivante :

Pour qu'un solide, assujetti à des liaisons caractérisées par le système complémentaire (C^s) *soit en équilibre, il faut et il suffit que le complexe d'action des forces données appartienne à* (C^s).

[1] Voir N° du 10 février 1904, page 112. — Article publié à l'occasion du cinquantième anniversaire de la fondation de l'Ecole d'Ingénieurs de l'Université de Lausanne. (Voir *Note de la Rédaction*, page 104.)