Zeitschrift: Bulletin technique de la Suisse romande
Band: 30 (1904)
Heft: 2

Artikel: Etude sur les forces d'inertie de la bielle
Autor: Hahn, E.
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-24103

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 04.08.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

Etude sur les forces d'inertie de la bielle.

par M. E. HAHN,
Ingénieur.
Professeur extraordinaire à l'Ecole d'Ingénieurs.

Le mécanisme de la bielle et de la manivelle a déjà fait l'objet de nombreux travaux. Ceux-ci, toutefois, sont presque tous consacrés à l'étude cinématique du mécanisme seulement ; les questions relevant du domaine de la dynamique y sont le plus souvent laissées de côté. Aujourd'hui, cependant, par suite de l'emploi toujours plus fréquent de grandes vitesses dans les machines, le cas où les forces d'inertie du mécanisme ne sont plus négligeables devant les forces extérieures, se rencontrent de plus en plus souvent. L'étude dynamique du mécanisme n'a donc pas seulement un intérêt au point de vue théorique, mais aussi une importance pratique.

Nous commencerons par étudier la distribution des accélérations de la bielle, puis nous déterminerons les forces d'inertie, enfin, nous en calculerons les effets. Dans ce travail, nous suivrons une méthode que nous avons lieu de croire nouvelle.

§ I. — Détermination des accélérations des points de la bielle.

Nous appliquerons, pour résoudre ce problème, le théorème de cinématique suivant : *Lorsqu'une figure plane se déplace dans son plan, il existe à chaque instant un point d'accélération nulle A jouissant de la propriété suivante : l'accélération de chaque point de la figure est proportionnelle à sa distance de A, et forme avec le rayon joignant ce point à A un angle constant pour une position donnée de la figure. Cet angle varie d'ailleurs d'une position à une autre.*

Considérons une droite g de la figure. Soient (fig. 1) P un point quelconque de cette droite ; A, le centre des accélérations pour la position considérée ; r, la distance de P à A ; p, l'accélération de P ; p' et p'', ses composantes dans la direction de g et perpendiculairement à g ; ψ, l'angle constant formé par p et r. Nous avons :

$$p' = p\cos(\varphi + \psi),$$
$$p'' = p\sin(\varphi + \psi),$$

mais, en vertu du théorème précédent, nous pouvons écrire, en désignant par k un facteur de proportionnalité dont la valeur explicite n'importe pas ici :

$$p = kr,$$

et par suite :

$$p' = k\,(r\cos\varphi\cos\psi - r\sin\varphi\sin\psi),$$
$$p'' = k\,(r\sin\varphi\cos\psi - r\cos\varphi\sin\psi).$$

Mais, d'après la figure, on a :

$$r\cos\varphi = AB = d,$$
$$r\sin\varphi = BP = x,$$

donc :

$$(1)\qquad \begin{aligned} p' &= kd\cos\psi - kx\sin\psi, \\ p'' &= kx\cos\psi + kd\sin\psi. \end{aligned}$$

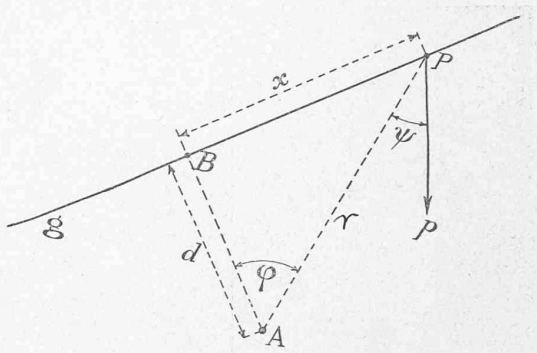

Fig. 1.

Or l'angle ψ est constant pour une position donnée, de même d et k ; si nous considérons d'autres positions de P, x seul variera. Nous pouvons donc énoncer le théorème suivant : *Les composantes de l'accélération des points d'une droite, prises dans le sens de la droite et dans le sens perpendiculaire, varient linéairement le long de cette droite.* On voit immédiatement que, si l'on connaît l'accélération de deux points de la droite g, il sera facile de déterminer l'accélération d'un point quelconque. Il suffira (fig. 2) de former les

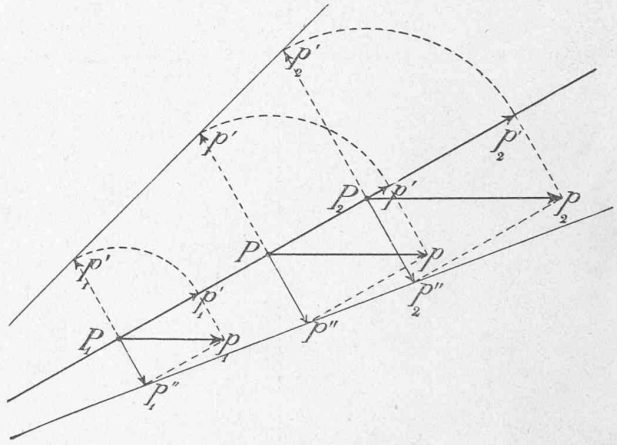

Fig. 2.

composantes p'_1, p''_1 et p'_2 et p''_2 des accélérations données, p_1 et p_2 (les composantes p' étant tracées perpendiculairement à la droite pour la construction) ; en joignant les extrémités de p'_1 *et* p'_2 d'une part, et de p''_1 et p''_2 d'autre part, on obtiendra les deux droites définies par les équations (1) ; par conséquent les longueurs Pp' et Pp'', déterminées sur une pendiculaire à la droite considérée, passant par un point quelconque P, ne sont pas autre chose que les composantes p' et p'' de l'accélération p de P.

Application à la bielle. Soit (fig. 3) une bielle AB de longueur l, articulée en B à une manivelle BC de rayon r. Nous supposerons que la manivelle se meut d'un mouvement de rotation *uniforme ;* soit ω la vitesse angulaire. L'accélération p_B du point B est, dans cette hypothèse, égale à $\omega^2 r$ et dirigée suivant le rayon BC.

Quant au point A, son mouvement étant rectiligne, son accélération p_A est dirigée suivant $A_1\ A_2$. On voit que si l'on connaissait la valeur de p_A, on se trouverait dans les

conditions du problème que nous venons de résoudre, et que, par suite, l'accélération d'un point quelconque de la bielle pourrait être déterminée facilement.

La valeur de p_A est donnée algébriquement par la formule

$$p_A = \omega^2 r \left(\cos\varphi \pm \frac{r}{l}\cos 2\varphi\right)$$

(voir par exemple Bach, *Eléments de machines)*, on sait aussi que p_A est égale à la sous-normale de la courbe des vitesses du point A (Construction de Prœll, voir *des Ing. Taschenbuch Hütte*) et peut être ainsi déterminée graphiquement. Cette construction toutefois ne donne pas de résultats exacts par suite des erreurs inévitables que l'on commet dans le tracé de la normale. Nous allons indiquer une nouvelle construction de p_A.

Interprétons graphiquement ce résultat :

$$\frac{r\cos\varphi}{\cos\alpha} = \frac{EC}{\cos\alpha} = BD\,;$$

en substituant dans p_A et en réduisant au même dénominateur dans la parenthèse, nous trouvons :

$$p_A = \frac{\omega^2\, CD}{\cos\alpha}\left[\frac{BD - l\sin\alpha\sin\alpha}{l\sin\alpha}\right].$$

Mais

$$l\sin\alpha = BE$$

$$l\sin\alpha\sin\alpha = BE\sin\alpha = BF, \qquad (EF \perp AD)$$

donc :

$$p_A = \frac{\omega^2\, CD\,(BD - DF)}{BE\cos\alpha}.$$

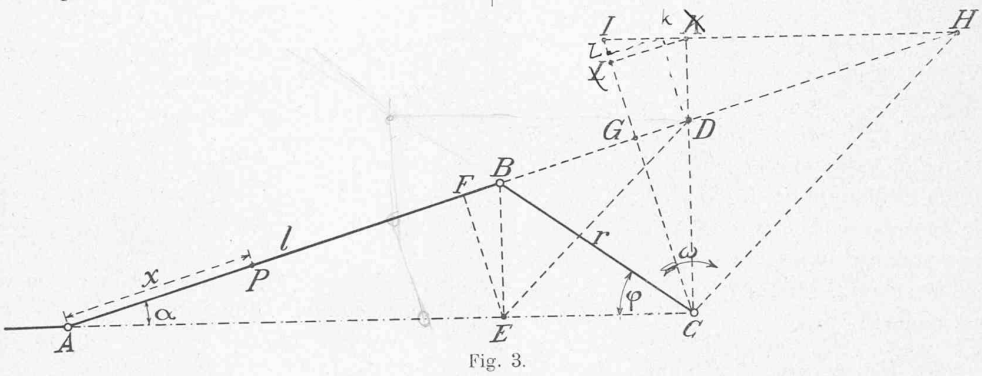

Fig. 3.

On sait que la vitesse v_A de A est exprimée par le produit :

$$v_A = \omega\, CD,$$

par conséquent :

$$p_A = \frac{dv_A}{dt} = w\,\frac{d(CD)}{dt}.$$

Mais :

$$CD = AC\,\mathrm{tg}\,\alpha,$$

$$\frac{d}{dt}(CD) = AC\,\frac{1}{\cos^2\alpha}\,\frac{d\alpha}{dt} - \mathrm{tg}\,\alpha\,\frac{d}{dt}(AC)^1.$$

De plus, nous pouvons écrire :

$$AC = \frac{CD}{\mathrm{tg}\,\alpha} \qquad \text{et} \quad \frac{d(AC)}{dt} = v_A = \omega\, CD,$$

de sorte que :

$$p_A = \omega\left[\frac{CD}{\mathrm{tg}\,\alpha}\,\frac{1}{\cos^2\alpha}\,\frac{d\alpha}{dt} - \omega CD\,\mathrm{tg}\,\alpha\right].$$

Nous avons en outre :

$$BE = l\sin\alpha = r\sin\varphi,$$

et en dérivant par rapport au temps t :

$$l\cos\alpha\,\frac{d\alpha}{dt} = r\cos\varphi\,\frac{d\varphi}{dt} = r\,\omega\cos\varphi\,;$$

nous tirons de là $\frac{d\alpha}{dt}$; en remplaçant dans p_A, il vient finalement :

$$p_A = \frac{\omega^2\, CD}{\cos\alpha}\left[\frac{r\cos\varphi}{l\sin\alpha\cos\alpha} - \sin\alpha\right].$$

[1] Le signe — devant le second terme du membre de gauche provient de ce que AC décroît lorsque ϕ va en croissant.

Menons CG parallèle à FE, CH parallèle à ED, les triangles FBE et GDC ainsi que BED et DCH sont semblables par suite :

$$\frac{DF}{BE} = \frac{GH}{DC}$$

$$GH = \frac{CD\,.\,DF}{BE}.$$

Si nous désignons généralement par p' et p'' les mêmes composantes de l'accélération que plus haut, nous avons:

$$p'_A = p_A\cos\alpha = \omega^2\,(DH - DG),$$

$$p_A = \omega^2\,(KH - KI)^1,$$

$$p''_A = p_A\sin\alpha = \omega^2\,(GL - IL).$$

La construction est, on le voit, fort simple, il suffit de tracer les lignes GC, CH, HI, DK et KL pour obtenir, au facteur ω^2 près, p_A et ses deux composantes.

Nous avons remarqué que :

$$p_B = \omega^2\, r = \omega^2\, BC,$$

nous trouvons, sans nouvelle construction :

$$p'_B = \omega^2\, BG,$$

$$p''_B = \omega^2\, GC.$$

Quant au sens des vecteurs p, il est facile à fixer : p_B est une accélération centripète, p_A est, comme on sait, positif pour $\varphi \begin{smallmatrix} > 0 \\ < 79^\circ\,16' \end{smallmatrix}$, négatif pour $\varphi \begin{smallmatrix} > 79^\circ\,16' \\ < 180^\circ \end{smallmatrix}$. (La valeur $79^\circ 16'$ pour laquelle p_A s'annule, est calculée dans

[1] Dans la figure 3, DK est par erreur perpendiculaire à AC, en réalité DK doit être mené perpendiculaire à AB.

l'hypothèse d'un rapport $\frac{r}{l} = \frac{1}{5}$); pour le retour, si l'on compte l'angle φ à partir du point mort opposé, la valeur de φ pour laquelle p_A change de signe est 100° 44'.

Si maintenant nous répétons pour la bielle AB la construction de la figure 2, nous aurons pour les composantes p' et p'' de l'accélération d'un point quelconque, P, de la bielle, situé à une distance x de la crosse A, les relations suivantes :

$$(2)\quad \begin{aligned} p' &= p'_A + \frac{x}{l}(p'_B - p'_A), \\ p'' &= p''_A + \frac{x}{l}(p''_B - p''_A). \end{aligned}$$

§ II. — Calcul des forces d'inertie de la bielle.

Nous remarquerons d'abord que, les dimensions des sections transversales de la bielle étant généralement faibles comparativement à r ou l, nous pouvons supposer les masses concentrées sur l'axe AB. Ceci étant, nous trouvons la force d'inertie dF agissant sur l'élément de masse dm situé en x (fig. 3), en formant le produit pdm.

Plutôt que de considérer les forces dF, nous envisagerons leurs composantes dF' et dF'' prises dans le sens de AB et perpendiculairement à AB. En tenant compte des relations (2), nous avons :

$$dF' = p'_A\, dm + \frac{x}{l}(p'_B - p'_A)\, dm,$$

$$dF'' = p''_A\, dm + \frac{x}{l}(p''_B - p''_A)\, dm^1.$$

Les forces dF' et dF'' étant respectivement parallèles entre elles, nous en trouvons les résultantes F' et F'' en intégrant les équations ci-dessus entre les limites o et l :

$$F' = p'_A \int_0^l dm + \frac{1}{l}(p'_B - p'_A) \int_0^l x\,dm,$$

$$F'' = p''_A \int_0^l dm + \frac{1}{l}(p''_B - p''_A) \int_0^l x\,dm.$$

Or, si M désigne la masse totale de la bielle, x_0 la distance du centre de gravité au point A, on a :

$$\int_0^l dm = M, \qquad \int_0^l x\,dm = M x_0,$$

et par suite :

$$(3)\quad \begin{cases} F' = M\left[p'_A\left(1 - \frac{x_0}{l}\right) + p'_B \frac{x_0}{l}\right], \\ F'' = M\left[p''_A\left(1 - \frac{x_0}{l}\right) + p''_B \frac{x_0}{l}\right]. \end{cases}$$

La force F' étant dirigée suivant AB, son point d'application peut être choisi en un point quelconque de cette droite, par contre il est nécessaire de déterminer le point d'application de F'', soit z la distance de ce point au point A. Ecrivant l'équation des moments par rapport à A, nous avons :

$$F''z = p''_A \int_0^l x\,dm + (p''_B - p''_A) \int_0^l \frac{x^2}{l}\,dm,$$

mais, $\int_0^l x\,dm = M x_0, \quad \int_0^l x^2\,dm = I = M y^2$

où I désigne le moment d'inertie de la bielle par rapport à un plan perpendiculaire à AB, passant par A (y = rayon d'inertie correspondant à I).

Ce moment d'inertie pourra s'évaluer soit algébriquement, soit graphiquement à l'aide de la méthode de Mohr par exemple, soit enfin, si l'on dispose d'un exemplaire déjà exécuté de la bielle, par l'expérience : on fera osciller la bielle autour du point A ; la mécanique rationnelle donne pour la durée d'une oscillation simple la formule :

$$T = \pi \sqrt{\frac{y^2}{x_0 g}}$$

d'où l'on pourra déduire y^2, si l'on observe T.

En introduisant les valeurs indiquées plus haut et en remplaçant F'' par sa valeur : il vient

$$(4)\quad z = \frac{p''_A\left(x_0 - \frac{y^2}{l}\right) + p''_B \frac{y^2}{l}}{p''_A\left(1 - \frac{x_0}{l}\right) + p''_B \frac{x_0}{l}}.$$

y étant toujours plus grand que x_0, on voit, en discutant l'expression de z, que

$$x_0 < z < \frac{y^2}{z}.$$

Cette remarque peut être utile pour certains calculs approximatifs.

§ III. — Effets des forces d'inertie.

Dans chaque position de la bielle les forces d'inertie devront être équilibrées par une force extérieure. Par exemple, si nous prenons le cas d'une machine génératrice, machine à vapeur ou moteur à gaz, une partie P de la force exercée par le fluide sur le piston sera employée à vaincre les forces F' et F''. Inversement, s'il s'agit d'une machine réceptrice, le couple à exercer sur l'arbre devra être calculé comme si à la résistance agissant sur le piston venait s'ajouter une certaine force P. Donc un premier problème se pose : Déterminer la force P qui, appliquée en A et dirigée suivant AC, fait équilibre aux forces d'inertie F' et F''.

On voit de plus que les composantes de F'' étant perpendiculaires à AB, sollicitent la bielle à la flexion. D'où un second problème : Déterminer l'influence de cette sollicitation secondaire à la flexion sur la résistance de la bielle.

1° Calcul de la force P[1]. — On trouve dans les ouvrages techniques différents moyens de tenir compte des forces d'inertie : Radinger propose d'admettre la masse de la bielle entièrement concentrée en A, autrement dit de l'ajouter simplement aux masses du piston, de la tige du piston et de la crosse, d'autres indiquent de supposer les $^2/_3$ de M con-

[1] Au sujet du sens des forces dF' et dF'', on remarquera qu'il est opposé à celui des composantes p' et p'', la direction de la force d'inertie étant opposée à celle de p.

[1] Ce travail était déjà rédigé, lorsqu'a paru dans la *Zeitschrift des Vereines deutscher Ingenieure*, N° 45, année 1903, un article de M. le professeur Mollier traitant du même sujet, mais donnant une méthode entièrement différente.

centrés en A, et $^1/_3$ en B, d'autres encore $^1/_2$ de M en A, et $^1/_2$ de M en B.

Un déplacement infiniment petit de la bielle est une rotation autour du centre instantané de rotation N (fig. 4). La force P devant faire équilibre aux forces F' et F'', son moment par rapport à N doit être égal et de signe contraire à la somme des moments de F' et F''.

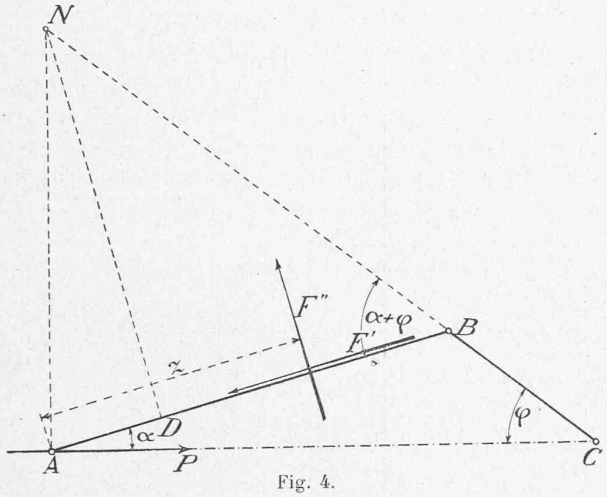

Fig. 4.

$$P \,.\, NA = F' \,.\, ND - F''\,(z - AD),$$

$$P = F'\frac{ND}{NA} - F''\left(\frac{z}{NA} - \frac{AD}{NA}\right),$$

$$= F' \cos\alpha - F''\left(\frac{z}{NA} - \sin\alpha\right);$$

soit, en mettant pour F et F'' leurs valeurs (3):

$$P = M\left[p'_A\left(1 - \frac{x_0}{l}\right)\cos\alpha + p'_B\frac{x_0}{l}\cos\alpha + p''_A\left(1 - \frac{x_0}{l}\right)\sin\alpha + p''_B\frac{x_0}{l}\sin\alpha\right] - F''\frac{z}{NA},$$

mais

$$p'_A\cos\alpha + p''_A\sin\alpha = p_A,$$

$$p'_B\cos\alpha + p''\sin\alpha = p_B\cos\varphi,$$

donc :

$$P = M\left[\left(1 - \frac{x_0}{l}\right)p_A + \frac{x_0}{l}p_B\cos\varphi\right] - \frac{F''z}{NA}.$$

D'autre part, le triangle NAB donne la relation :

$$\frac{NA}{\sin(\alpha+\varphi)} = \frac{l}{\sin\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right)} = \frac{l}{\cos\varphi},$$

d'où $\quad NA = \dfrac{l}{\cos\varphi}\sin(\alpha+\varphi);$

en mettant pour $F''z$ la valeur trouvée plus haut (4), il vient :

$$\frac{F''z}{NA} = M\left[p''_A\left(x_0 - \frac{y^2}{l}\right)\frac{\cos\varphi}{l\sin(\alpha+\varphi)} + p''_B\frac{y^2\cos\varphi}{l^2\sin(\alpha+\varphi)}\right]$$

On reconnaît sur la figure que

$$\frac{p_B''}{\sin(\alpha+\varphi)} = p_B,$$

de sorte que l'on a finalement en remplaçant dans P, et en groupant les termes semblables :

$$P = M\left[\left(1 - \frac{x_0}{l}\right)p_A + \left(\frac{x_0}{l} - \frac{y^2}{l^2}\right)p_B\cos\varphi - \left(\frac{x_0}{l} - \frac{y^2}{l}\right)p''_A\frac{\cos\varphi}{\sin(\alpha+\varphi)}\right].$$

Chacun des facteurs variables qui entre dans cette expression peut être facilement trouvé à l'aide des constructions indiquées plus haut. Pour épargner la peine de cette construction, nous donnons ci-dessous, pour 8 points de la demi-circonférence, les valeurs que prennent les quantités p_A, $p_B\cos\varphi$ et $p''_A\dfrac{\cos\varphi}{\sin(\alpha+\varphi)}$. Ce tableau permet aussi de se rendre compte de l'ordre de grandeur des différents termes; *il est établi pour le rapport usuel* $\dfrac{r}{l} = \dfrac{1}{5}$.

ϕ	p_A	$p''_A\dfrac{\cos\phi}{\sin(\alpha+\phi)}$	$p_B\cos\phi$	$p_B\cos\phi - p''_A\dfrac{\cos\phi}{\sin(\alpha+\phi)}$
0° 00′	+ 1,200 $r\omega^2$	0,000 $r\omega^2$	+ 1,000 $r\omega^2$	+ 1,000 $r\omega^2$
22° 30′	+ 1,065 »	0,166 »	+ 0,924 »	+ 0,758 »
45° 00′	+ 0,707 »	0,088 »	+ 0,707 »	+ 0,619 »
67° 30′	+ 0,242 »	0,022 »	+ 0,383 »	+ 0,361 »
90° 00′	— 0,200 »	0,000 »	+ 0,000 »	+ 0,000 »
112° 30′	— 0,524 »	0,044 »	— 0,383 »	— 0,427 »
135° 00′	— 0,707 »	0,117 »	— 0,707 »	— 0,824 »
157° 30′	— 0,781 »	0,179 »	— 0,924	— 1,103 »
180° 00′	— 0,800 »	0,000 »	— 1,000 »	— 1,000 »

Quant aux facteurs

$$1 - \frac{x_0}{l} \quad \text{et} \quad \frac{x_0}{l} - \frac{y^2}{l^2},$$

qui figurent également dans l'expression de P, ils dépendent naturellement de la forme de la bielle et de la répartition des masses dans celle-ci. Cependant leur valeur ne varie pas autant d'un cas à l'autre qu'on pourrait le penser. M. Mollier donne, dans son travail, les chiffres trouvés pour des bielles de machines très diverses: les limites extrêmes sont 0,35 et 0,45 pour $1 - \dfrac{x_0}{l}$, et 0,03 et 0,14 pour $\dfrac{x_0}{l} - \dfrac{y^2}{l_2}$; la moyenne est 0,40 dans le premier cas, 0,06 dans le second. De mon côté, j'ai déterminé les valeurs des mêmes facteurs pour les bielles de quelques machines de construction récente et suis arrivé aux mêmes résultats.

Ces chiffres et l'expression trouvée pour P montrent qu'il est en tous cas absolument faux d'adjoindre toute la masse de la bielle aux masses du piston, de la tige du piston et de la crosse ; la fraction $^2/_3$ est, elle aussi, trop grande. Par contre, en prenant la *moitié* de la masse environ, on obtiendra une approximation très satisfaisante dans la plupart des cas.

2° *Détermination des efforts internes dus aux forces d'inertie.* — Sous l'influence de la force transmise par ell , la bielle travaille, comme on sait, alternativement à l'exte.-sion et au flambement. Ce dernier cas étant le plus défav.-rable, c'est lui qui sert de base au calcul des dimensions : S désignant la force à transmettre à l'aide de la bielle, J l

moment d'inertie de la section transversale, n le coefficient de sécurité, nous avons :

$$S = \frac{\pi^2 EJ}{m\, l^2}.$$

Comme coefficient de sécurité m, il est d'usage de prendre un chiffre variant entre 40 et 25 pour les machines à petite et moyenne vitesse de piston. Dans les machines à grande vitesse, ce coefficient est généralement moindre.

Nous avons vu que les forces d'inertie peuvent, pour chaque point de masse dm, se décomposer en deux composantes dF' et dF'' agissant respectivement dans le sens de la bielle et perpendiculairement à celle-ci. Les composantes dF' s'ajoutent à S ou s'en retranchent, suivant les positions de la bielle ; comme toutefois elles sont généralement petites par rapport à S, on peut les négliger. Les forces dF'', par contre, sollicitent la bielle à la flexion, et l'on conçoit facilement que cette flexion peut, sans atteindre une grandeur considérable en valeur absolue, augmenter dans de fortes proportions le danger du flambage.

C'est ce que nous nous proposons d'examiner.

Soit AB (fig. 5) la bielle de longueur l, sollicitée par les forces S agissant suivant son axe et dF'' agissant perpendiculairement à l'axe.

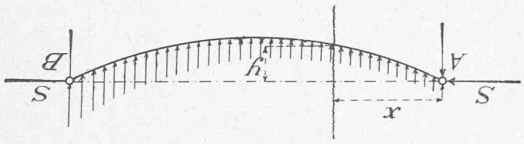

Fig. 5.

Essayons de déterminer la ligne élastique de la bielle, l'équation différentielle de cette courbe est :

$$EJ\,\frac{d^2y}{dx^2} = -M. \tag{5}$$

Dans le cas particulier, M, le moment fléchissant pour la section d'abscisse x, provient de la force S, de la réaction de l'appui A et des forces dF''.

Mais comme, dans une bielle, la section transversale varie avec x, par suite aussi J et indirectement les forces dF'', l'intégration de l'équation (5) devient impossible, tout au moins sous sa forme générale.

On peut introduire toutefois une première simplification: La tête de la bielle et le pied ont le plus souvent une section considérable, de sorte que ces parties ne se déforment pour ainsi dire pas sous les efforts de flexion, on peut dès lors considérer la bielle comme formée de trois parties: la tête et le pied, aA et bB (fig. 6) rigides et, par conséquent, restant rectilignes, et le corps ab, fléchissant seul sous l'action de S et des forces dF''. Le corps de la bielle a une section sensiblement constante, de sorte que le calcul peut alors s'effectuer. Il n'en est pas moins encore pénible, et les expressions compliquées qui en découlent se prêtent mal à une discussion. Pour arriver à un résultat plus maniable, nous introduirons les hypothèses suivantes : 1° nous admettrons que la bielle a une section constante de A à B ; 2° nous supposerons que les forces d'inertie dF'' sont réparties *uniformément* sur la longueur AB.

Fig. 6.

On sait qu'en réalité ces forces varient linéairement de A à B; nos hypothèses sont donc défavorables, les résultats qui en découleront seront donc à considérer comme des limites supérieures de l'influence des forces d'inertie. Nous nous réservons d'ailleurs de reprendre ultérieurement le calcul en tenant compte de la loi exacte de répartition des forces dF'' et d'en publier les résultats dans le cas où ceux-ci présenteraient quelque intérêt.

F'' désignant la résultante des forces dF'', la force agissant sur l'unité de longueur sera, d'après notre hypothèse,

$$\frac{F''}{l} = q\,;$$

les réactions des appuis A et B seront $q\,\frac{l}{2}$ et, par suite, le moment fléchissant M aura pour expression :

$$M = Sy + \frac{q\,l\,x}{2} - \frac{qx^2}{2}.$$

L'équation de la ligne élastique peut donc s'écrire :

$$EJ\,\frac{d^2y}{dx^2} + Sy = -\frac{qlx}{2} + \frac{qx^2}{2}.$$

C'est une équation linéaire du second degré avec second membre, l'intégrale générale est, comme on le vérifie facilement :

$$y = C_1 \sin nx + C_2 \cos nx + \frac{qx^2}{2\,S} - \frac{qlx}{2\,S} - \frac{EJq}{S^2},$$

où C_1 et C_2 sont des constantes d'intégration, et n une abréviation pour $\sqrt{\frac{S}{EJ}}$.

C_1 et C_2 se déterminent à l'aide des conditions aux limites qui sont ici :

$$y = o \text{ pour } x = o,$$
$$\text{et } y = o \text{ pour } x = l.$$

En introduisant ces valeurs particulières dans l'expression de y, nous en tirons ;

$$C_2 = \frac{EJq}{S^2},$$

$$C_1 = \frac{EJq}{S^2}\left(\frac{1 - \cos n\,l}{\sin n\,l}\right).$$

La quantité qu'il nous importe de connaître est la flèche de la bielle f, nous la trouvons en posant $x = \frac{l}{2}$. Il vient, toutes réductions faites :

$$f = \frac{EJq}{S^2}\left(\frac{1 - \cos\frac{n\,l}{2}}{\cos\frac{n\,l}{2}}\right) - \frac{q\,l^2}{8\,S}.$$

On voit que f devient infini pour

$$\cos\frac{n\,l}{2} = 0,$$

c'est-à-dire pour

$$\frac{n\,l}{2} = \frac{\pi}{2}.$$

En remplaçant n par sa valeur en fonction de S nous trouvons la force S_1 qui produit le flambage de la pièce :

$$(6) \quad \frac{S_1\,l^2}{EJ} = \pi^2 \qquad S_1 = \frac{\pi^2\,EJ}{l^2}.$$

On voit que cette force S_1 est exactement la même que celle donnée par la formule d'Euler pour le cas de flambage correspondant. Il semblerait donc, à première vue, que les efforts de flexion sont sans effet.

Cette conclusion n'est toutefois pas exacte (Voir ma traduction française de l'ouvrage de A. Föppl, *Résistance des matériaux et Théorie de l'Elasticité*). La formule que nous venons de trouver est en effet établie dans l'hypothèse que toute les déformations sont parfaitement élastiques ; or, il se peut fort bien que les actions moléculaires développées par suite de la flexion dépassent la limite d'élasticité de la matière bien avant que S ait atteint une valeur suffisante pour produire le flambage, et naturellement, sitôt la limite d'élasticité dépassée, nos résultats cessent d'être applicables, puisque la loi de proportionnalité entre les déformations et les actions moléculaires n'est plus remplie.

Ainsi, dans le cas d'une flexion et d'un flambement simultané, la *charge critique* n'est pas celle donnée par la formule d'Euler, mais bien celle qui développe dans la section dangereuse de la pièce des actions moléculaires égales à la limite d'élasticité des matériaux.

Dans le cas particulier, la section dangereuse est la section transversale médiane, la tension spécifique maximum y atteint la valeur :

$$R = \frac{S}{\Omega} + \left(\frac{q\,l^2}{8} + S\,f\right)\frac{e}{J},$$

où e désigne la distance de la fibre extérieure à l'axe neutre et Ω l'aire de la section transversale.

Si nous posons R égal à la limite d'élasticité R' du métal, et si nous résolvons par rapport à S, nous trouverons précisément la charge critique S_c définie plus haut.

Nous voyons toutefois que f est fonction transcendante de S, de sorte que la résolution de l'équation présente d'assez grandes difficultés. Pour les tourner, nous allons établir une valeur approchée pour f, en remplaçant les termes en cosinus qui y figurent par un développement en série.

On a :

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots,$$

Si nous posons

$$x = \frac{n\,l}{2},$$

nous pourrons écrire :

$$f = \frac{EJq}{S^2}\left(\frac{1 - 1 + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + \cdots}{1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots}\right) - \frac{q\,l^2}{8\,S},$$

$$f = \frac{EJq\,x^2}{2\,S^2}\left[\frac{1 - \frac{x^2}{3\,.\,4} + \frac{x^4}{3\,.\,4\,.\,5\,.\,6} - \cdots}{1 - \frac{x^2}{1\,.\,2} + \frac{x^4}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4} - \cdots}\right] - \frac{q\,l^2}{8\,S};$$

dans la parenthèse nous pouvons arrêter le développement à la 4me puissance ; x, c'est-à-dire $\frac{nl}{2}$, étant pour les valeurs que nous considérons, toujours plus petit que 1 (l'angle $\frac{nl}{2}$ est naturellement exprimé en fonction des longueurs d'arc de rayon 1).

Si nous effectuons la division indiquée dans la parenthèse il vient :

$$f = \frac{EJ\,qx^2}{2\,S^2}\left[1 + \frac{5}{12}\,x^2 + \frac{61}{360}\,x^4\right] - \frac{q\,l^2}{8\,S},$$

ou, en remplaçant maintenant x et, dans cette quantité, n par sa valeur $\sqrt{\frac{S}{EJ}}$, et en faisant les réductions :

$$f = \frac{5\,l^4\,q}{384\,EJ} + \frac{61\,l^6\,Sq}{5760\,E^2\,J^2} = \frac{5\,l^4\,q}{384\,EJ}\left[1 + \frac{12{,}2\,S\,l^2}{15\,E\,J}\right].$$

Mais nous voyons que $\frac{5\,l^4\,q}{384\,EJ}$ n'est autre chose que la valeur de la flèche f_0 que prendrait la pièce sous l'action des forces q agissant seules ; de plus $\frac{l^2}{EJ}$ est, au facteur π^2 du dénominateur près, égal à $\frac{1}{S_1}$, (formule 6).

Par suite :

$$f = f_0\left(1 + \frac{12{,}2\,S\,\pi^2}{15\,S_1}\right),$$

soit, avec une approximation suffisante :

$$f = f_0\left(1 + 8\,\frac{S}{S_1}\right).$$

Ayant mis maintenant f sous cette forme simple, nous pouvons calculer la charge critique S_c. Il vient :

$$(7) \quad R' = \frac{S_c}{\Omega} + \left[\frac{q\,l^2}{8} + S_c\,f_0\left(1 + 8\,\frac{S_c}{S_1}\right)\right]\frac{e}{J}.$$

S_c est donc donné par une équation du second degré, il faudra, bien entendu, prendre pour S_c la plus petite des deux racines de cette équation.

Connaissant S_c, la comparaison avec la force S, agissant sur la bielle, donnera le degré réel de sécurité de la construction [1].

Pour terminer, nous allons appliquer ces calculs à un exemple :

Soit une machine à vapeur pour laquelle nous ayons les données suivantes :

r = rayon de manivelle : 400 mm.
l = longueur de la bielle : 2000 mm.
nombre de tours par minute : 150.
vitesse angulaire, $\omega = 15{,}7$ radians par sec.
force transmise par la bielle, $S = 15\,000$ kg.

[1] La valeur f que nous calculons s'entend naturellement pour le cas où les forces S agissent exactement dans l'axe longitudinal de la pièce, et où cet axe est exactement rectiligne. Pratiquement, il y aura toujours des erreurs plus ou moins grandes à ces deux points de vue, f sera donc en réalité plus grand que nous le donne la formule et, par suite, S_c plus petit.

En employant la méthode de calcul usuelle nous trouvons, en introduisant un coefficient de sécurité de 25,

$J = 750$ cm^4, soit $d = 11$ cm. env., $\Omega = 95$ cm^2.

Nous calculerons l'effet des forces d'inertie pour la position caractérisée par un angle φ de 45° (fig. 3); comme nous supposons la section constante $x_0 = \frac{1}{2} l$ et par suite :

$$F'' = \frac{M}{2} (p''_A + p''_B),$$

$$M = \frac{\pi}{4} \overline{1,1}^2 \times 20 \times 7,8 \times \frac{1}{9,81} = 15,1 \text{ kg. masse,}$$

(7,8 = densité du fer).

Des diagrammes précédents nous relevons :

$p''_A = 10,0$ m. p. sec^2. $\quad p''_B = 90,0$ m. p. sec^2

donc : $F'' = 675$ kg. et :

$$q = \frac{F''}{l} = \frac{675}{200} = 3,38 \text{ kg. par cm.}$$

En prenant $E = 2\,000\,000$ kg. par cm^2, nous trouvons :

$$f_0 = \frac{5\, ql^4}{385\, EJ} = 0,047 \text{ cm.};$$

nous avons d'autre part, ayant calculé la bielle avec un coefficient de sécurité de 25,

$$S_1 = 25 \times 15\,000 = 375\,000 \text{ kg.}$$

l'équation (7) prend donc ici la forme

$$R' = \frac{S_c}{95} + \left[\frac{3,38 \times \overline{200}^2}{8} + 0,047\, S_c \left(1 + \frac{8\, S_c}{375000}\right)\right] \frac{5,5}{750}.$$

Si nous prenons pour R' la valeur moyenne 2000 kg. par cm^2, il vient en ordonnant les termes :

$$\frac{8 \times 5,5 \times 95 \times 0,047}{750 \times 375000} S_c^2 + S_c \left(1 + \frac{0,047 \times 5,5 \times 95}{750}\right)$$

$$+ \frac{3,38 \times \overline{200}^2 \times 95 \times 5,5}{8 \times 750} - 2000 \times 95 = 0,$$

$$\frac{64 \times 0,047}{4\,125\,000} S_c^2 + 1,034\, S_c - 177\,700 = 0,$$

d'où :

$$S_c = \frac{4125000}{128 \times 0,047} \times$$

$$\times \left[-1,034 \pm \sqrt{(1,034)^2 + \frac{4 \times 177\,700 \times 64 \times 0,047}{4\,125\,000}}\right]$$

$$S_c = \frac{4125000}{128 \times 0,047} [-1,034 + 1,257] = 10,2 \times 15000 \text{ kg.}$$

S_c est donc, dans le cas particulier, égale à 10,2 fois la charge normale, c'est-à-dire environ 2,5 fois plus faible que la charge de flambement S_1 que nous avons prise ici $= 25 \times 15\,000$ kg. Même en faisant la part des hypothèses défavorables d'où nous sommes partis, on voit bien, par cet exemple, l'influence que peuvent acquérir les forces d'inertie au point de vue de la résistance de la bielle.

Il est vrai, d'autre part, que dans les machines à grande vitesse, les alternatives de flambement et d'extension se succédant avec une grande rapidité, les déformations n'ont pas le temps d'acquérir les valeurs que nous calculons et qui supposent une application lente et progressive des forces extérieures. Nous ne pensons toutefois pas qu'il faille trop se reposer sur cette considération et sommes, au contraire, d'avis que l'on fera bien, dans tous les cas de machines à grande vitesse, de déterminer par un calcul analogue à celui que nous venons d'indiquer, la valeur de la charge critique S_c afin de se rendre un compte exact du degré réel de sécurité de la construction.

Le rôle de l'ingénieur dans la civilisation.

par M. Alph. VAUTIER,
Ingénieur.
Ancien élève de l'Ecole d'Ingénieurs (1856-1859).

Au moment où l'Ecole d'Ingénieurs de Lausanne met une courte trève à son activité pour regarder vers ses origines, il y aurait intérêt à jeter un coup d'œil plus étendu dans le passé et dans le présent, et à rechercher quel a été le rôle de l'ingénieur dans le développement de la civilisation. Chacun prévoit que cette étude serait féconde et que son résultat serait propre à encourager ceux, nombreux aujourd'hui, qui cultivent la science dans le but d'applications utiles.

Pour traiter ce sujet avec l'ampleur qu'il mérite, il faudrait consulter un nombre considérable de documents qui ne sont pas à notre portée ; nous devons donc nous borner à une simple causerie, avec l'espoir que quelque archéologue sera tenté de combler ce vide dans l'histoire du développement de l'humanité.

Les ruines des monuments anciens ont attiré depuis longtemps, par leurs masses imposantes ou par leur esthétique, l'attention des architectes, et l'on possède des notices très étendues et captivantes sur les temples, sur les palais et sur les nécropoles. On connaît aussi bien des détails sur les théâtres et sur les maisons d'habitation, mais on n'a, pour les âges reculés tout au moins, que de rares indications sur les travaux publics tels que les routes et les ponts, les ports, les travaux d'édilité et sur ceux, si importants, d'irrigations ou de canalisations.

Ces ouvrages demandant un entretien continuel ont promptement disparu lorsque la civilisation qui les avait produits sombrait sous les coups de conquérants barbares ou se dissolvait par sa propre immoralité. Il en résulte qu'une partie fort importante de l'œuvre des architectes anciens est tombée dans l'oubli et que c'est celle que nous nommons actuellement l'art de l'ingénieur qui est la plus dénuée d'histoire.

L'existence des monuments qui ont laissé des traces supposait un état social avancé, jouissant sans doute de routes, de ports, de canaux, ne fut-ce que pour amener à pied d'œuvre les matériaux de provenances lointaines.

Les voyageurs signalent souvent, en Asie et au Nord de l'Afrique, des ruines imposantes de villes situées actuel-