Zeitschrift: Bulletin technique de la Suisse romande
Band: 30 (1904)
Heft: 16

Artikel: Théorie des moteurs électriques basée sur la loi du rendement
Autor: Mégroz, A.
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-24140

30^me Année. 25 août 1904. N° 16.

Bulletin technique de la Suisse romande

ORGANE EN LANGUE FRANÇAISE DE LA SOCIÉTÉ SUISSE DES INGÉNIEURS ET DES ARCHITECTES. — Paraissant deux fois par mois.

Rédacteur en chef: M. P. HOFFET, professeur à l'Ecole d'Ingénieurs de l'Université de Lausanne.

Secrétaire de la Rédaction : M. F. GILLIARD, ingénieur.

Théorie des moteurs électriques basée sur la loi du rendement.

Par M. A. MÉGROZ, ingénieur.

Détermination de la loi du rendement.

Le rendement η des moteurs électriques a été jusqu'à présent représenté par la relation

$$\eta = \frac{\varepsilon I}{EI} = \frac{\varepsilon}{E},$$

ε étant la force contre-électromotrice développée dans l'armature du moteur, et E la force électromotrice totale disponible.

Le rapport $\frac{\varepsilon}{E}$ ne peut être considéré comme représentant la loi du rendement, par le fait qu'il ne nous donne pas les relations suivant lesquelles ε et E doivent varier en fonction d'η.

Pour déterminer ces relations de ε et E en fonction d'η, nous avons été amenés à tenir le raisonnement suivant :

Dans un moteur électrique, nous avons à considérer que le travail disponible

$$A = EI$$

se décompose en deux parties :

$A_e = \varepsilon I$ le travail utile du moteur, et

$A_i = eI$ le travail absorbé par le moteur ;

e étant la force électromotrice absorbée par les résistances w du moteur pour un courant d'intensité égale à I.

Entre A, A_e et A_i existent les relations suivantes :

$$A = A_e + A_i$$

ou bien $$EI = \varepsilon I + eI,$$

d'où l'on tire $$E = \varepsilon + e.$$

Si donc il existe un rapport

$$\frac{A_e}{A} = \frac{\varepsilon I}{EI} = \eta$$

entre le travail utile εI et le travail disponible EI du moteur, il devra de même exister un rapport

$$\frac{A_i}{A} = \frac{eI}{EI} = \chi$$

entre le travail absorbé eI par le moteur et le travail disponible EI de celui-ci, et nous donnerons à ce nouveau rapport le symbole χ.

Nous déterminerons maintenant la relation qui doit exister entre ces deux rapports η et χ.

Soit $$\eta = \frac{\varepsilon}{E} = \frac{E - e}{E},$$

d'où

$$E\eta = E - e$$

et

$$e = E - E\eta = E(1 - \eta),$$

nous obtiendrons ainsi

$$\frac{e}{E} = 1 - \eta = \chi,$$

et la relation existant entre η et χ nous sera donnée par l'équation

$$\eta + \chi = 1.$$

Il existe donc bien deux fonctions du rendement dans un moteur électrique, η et χ, et qui sont liées entre elles par la relation que nous venons d'établir.

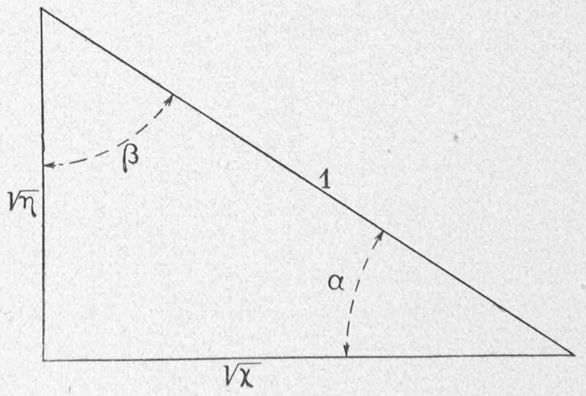
Si nous reprenons l'équation précédente

$$\eta + \chi = 1,$$

nous voyons que celle-ci peut être mise sous la forme suivante

$$(\sqrt{\eta})^2 + (\sqrt{\chi})^2 = 1,$$

les valeurs $\sqrt{\eta}$ et $\sqrt{\chi}$ pouvant être considérées comme les deux côtés d'un triangle rectangle dont l'hypoténuse serait égale à 1.



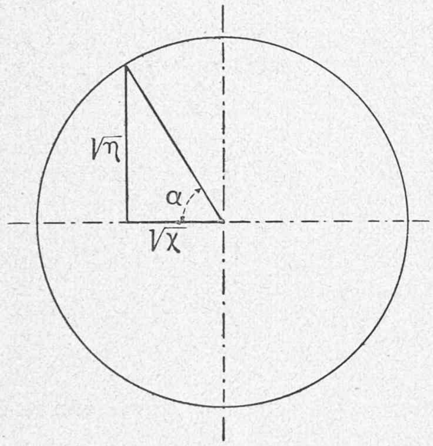
En faisant varier $\sqrt{\eta}$ et $\sqrt{\chi}$ en fonction des angles α et β, nous pourrons appliquer les lois trigonométriques, et si l'angle α est pris comme variable, nous obtiendrons les relations suivantes :

$$\frac{\sqrt{\eta}}{1} = \sin \alpha, \text{ d'où } \eta = \sin^2 \alpha\,;$$

$$\frac{\sqrt{\chi}}{1} = \cos \alpha, \text{ d'où } \chi = \cos^2 \alpha\,;$$

$$\frac{\eta}{\chi} = \frac{\sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} = \operatorname{tg}^2 \alpha\,;$$

$$\frac{\chi}{\eta} = \frac{\cos^2 \alpha}{\sin^2 \alpha} = \operatorname{cotg}^2 \alpha.$$



Les fonctions du rendement η et χ pourront donc varier de 0 à 1, et respectivement de 1 à 0 en fonction de l'angle α.

Nous déterminerons maintenant suivant quelle loi les valeurs électriques E, ε et e du moteur varient en fonction de l'angle α.

Nous avons :

$$\frac{\varepsilon}{E} = \eta = \sin^2 \alpha$$

et

$$\frac{e}{E} = \chi = \cos^2 \alpha,$$

d'où nous tirons :

$$\varepsilon = E \sin^2 \alpha$$

et

$$e = E \cos^2 \alpha,$$

ce qui nous donne :

$$\frac{\varepsilon}{e} = \frac{\sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} = \operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\operatorname{cotg} \alpha}$$

$$\frac{e}{\varepsilon} = \frac{\cos^2 \alpha}{\sin^2 \alpha} = \operatorname{cotg}^2 \alpha = \frac{\operatorname{cotg} \alpha}{\operatorname{tg} \alpha}.$$

Envisageons maintenant le cas particulier suivant en faisant $\varepsilon = \operatorname{tg} \alpha$, ce qui nous donnera $e = \operatorname{cotg} \alpha$ et $\varepsilon e = \operatorname{tg} \alpha \operatorname{cotg} \alpha = 1$.

Nous démontrerons que ces nouvelles valeurs de ε et de e satisfont aux équations

$$\varepsilon = E \sin^2 \alpha$$

et

$$e = E \cos^2 \alpha.$$

Nous avons en effet :

$$E\eta = \varepsilon \quad \text{et} \quad E\chi = e\,;$$

en multipliant, nous obtenons

$$E\eta\, E\chi = \varepsilon e.$$

Si donc $\varepsilon e = \operatorname{tg} \alpha \operatorname{cotg} \alpha = 1$, nous aurons :

$$E^2 \eta\, \chi = 1,$$

d'où

$$E^2 = \frac{1}{\eta\, \chi},$$

nous avons vu que $\eta\, \chi = \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha$ et $\sqrt{\eta \chi} = \sin \alpha \cos \alpha$, nous aurons donc :

$$E^2 = \frac{1}{\eta\, \chi} = \frac{1}{\sin^2 \alpha \cos^2 \alpha},$$

$$E = \frac{1}{\sqrt{\eta\, \chi}} = \frac{1}{\sin \alpha \cos \alpha}.$$

Si nous remplaçons cette valeur de E dans les deux équations précitées, nous obtiendrons bien

$$\varepsilon = \frac{1}{\sin \alpha \cos \alpha} \times \sin^2 \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \operatorname{tg} \alpha$$

$$e = \frac{1}{\sin \alpha \cos \alpha} \times \cos^2 \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = \operatorname{cotg} \alpha.$$

Les valeurs de E, ε et e en fonction de l'angle α seront donc les suivantes :

$$E = \frac{1}{\sin \alpha \cos \alpha}, \qquad \varepsilon = \operatorname{tg} \alpha, \qquad e = \operatorname{cotg} \alpha.$$

Il en sera de même pour la fonction du courant I, car nous avons

$$I = \frac{e}{w}$$

donc

$$I = \frac{\operatorname{cotg} \alpha}{w},$$

w étant la somme de toutes les résistances du moteur.

Si nous faisons

$$w = 1,$$

nous aurons

$$I = \operatorname{cotg} \alpha$$

et

$$\varepsilon I = \operatorname{tg} \alpha \operatorname{cotg} \alpha = 1.$$

Nous voyons donc que pour l'unité de résistance le travail utile du moteur sera égal à l'unité dans l'unité de temps, et toutes les autres valeurs du moteur seront bien déterminées en fonction de l'angle α.

En désignant ces valeurs par les symboles E_1, ε_1, e_1, I_1, w_1, A^1, $A_e{}^1$, $A_i{}^1$, pour bien indiquer qu'elles correspondent au travail $A_e{}^1 = 1$, nous les résumerons comme suit :

$$E_1 = \frac{1}{\sin\alpha \cos\alpha} = \frac{1}{\sqrt{\chi\eta}}$$

$$\varepsilon_1 = \operatorname{tg}\alpha = \sqrt{\frac{\eta}{\chi}}$$

$$e_1 = \operatorname{cotg}\alpha = \sqrt{\frac{\chi}{\eta}}$$

$$I_1 = \operatorname{cotg}\alpha = \sqrt{\frac{\chi}{\eta}}$$

$$w_1 = 1$$

$$A^1 = E_1 I_1 = \frac{1}{\sin\alpha\cos\alpha} \times \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{1}{\sin^2\alpha} = \frac{1}{\eta}$$

$$A^1{}_e = \varepsilon_1 I_1 = 1$$

$$A_i{}^1 = e_1 I_1 = \operatorname{cotg}\alpha \operatorname{cotg}\alpha = \operatorname{cotg}^2\alpha = \frac{\chi}{\eta}.$$

La relation $E_1 I_1 = \varepsilon_1 I_1 + e_1 I_1$ sera donc équivalente à

$$\frac{1}{\sin^2\alpha} = 1 + \operatorname{cotg}^2\alpha,$$

ou bien à

$$\frac{1}{\eta} = 1 + \frac{\chi}{\eta}.$$

Nous avons, en outre, la relation suivante :

$$E_1 = \varepsilon_1 + e_1,$$

d'où en élevant au carré

$$E_1^2 = \varepsilon_1^2 + e_1^2 + 2\,\varepsilon_1 e_1.$$

Mais $\varepsilon_1 e_1 = 1$. Nous aurons donc l'équation suivante :

$$E_1^2 = \varepsilon_1^2 + e_1^2 + 2,$$

ce qui pourra se mettre sous la forme suivante :

$$E_1^2 - (\varepsilon_1^2 + e_1^2) = 2.$$

Nous voyons d'après cette équation que la différence entre le carré de la force électromotrice disponible et la somme des carrés de ses deux composantes est toujours égale à une constante dont la valeur est égale à 2.

Si nous envisageons de nouveau les valeurs du rendement, η et χ, nous pouvons constater que celles-ci étaient bien déterminées pour chaque valeur de l'angle α, soit :

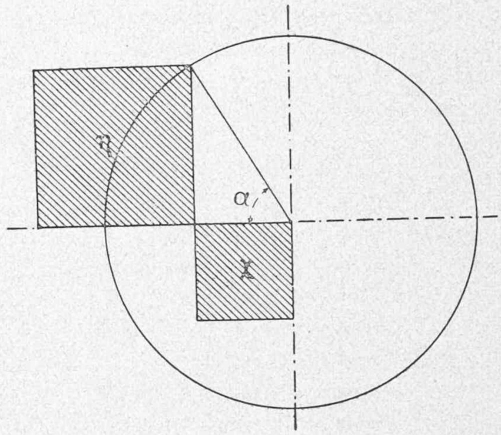
$$\eta = \sin^2\alpha \text{ et } \chi = \cos^2\alpha.$$

Les valeurs de η et χ pourront donc être représentées par des surfaces variant en fonction de l'angle α et cela comme l'indique la figure ci-dessus.

η représentera la valeur du rendement pour le travail électrique utile du moteur, nous pourrions l'appeler le rendement positif.

χ représentera la valeur du rendement pour le travail électrique absorbé par le moteur, et pourrait être appelé par antagonisme rendement négatif.

L'angle α_η pourrait être dénommé l'angle du rendement η.



Pour bien faire voir comment varient les valeurs électriques du moteur en fonction des variables η, χ et α, nous avons établi le tableau synoptique suivant. Le rendement η varie de 1 à 0, le rendement correspondant χ de 0 à 1, et à chacune de ces valeurs de η et χ correspondent les valeurs de l'angle α ainsi que les valeurs E_1, ε_1, e_1, I_1, w_1, et leurs relations respectives. (Voir pages 308 et 309.)

Discussion des fonctions électriques du moteur pour différentes valeurs du rendement positif η.

Pour un rendement positif du moteur $\eta = 1$, le rendement négatif χ sera égal à 0, et l'angle α sera de 90° ; ε_1 tend à devenir égal à E_1 ce qui n'aura lieu que pour des valeurs infiniment grandes de ε_1 et E_1 ; e_1 par contre tendra vers 0.

Le travail disponible $A^1 = E_1 I_1$ pour $\eta = 1$ deviendra égal à l'unité, soit égal au travail utile du moteur, ce qui est bien la condition nécessaire pour le rendement maximum de 100 % du moteur. Ce résultat ne pourra donc jamais être atteint en pratique, puisque dans ce cas les valeurs de ε_1 et E_1 doivent être égales à l'∞.

Pour un rendement positif $\eta = 0{,}5$, le rendement négatif χ sera $\chi = 0{,}5$, donc $\chi = \eta$ et l'angle α sera de 45°. La force électromotrice disponible sera $E_1 = 2$ et ses deux composantes $\varepsilon_1 = 1$ et $e_1 = 1$. Le travail utile $\varepsilon_1 I_1$ étant égal à l'unité, le travail absorbé $e_1 I_1$ sera aussi égal à 1. Ce qui nous donnera pour le travail disponible $E_1 I_1 = 2$; ces conditions satisfont donc bien au rendement de 50 % du moteur.

Pour le rendement positif $\eta = 0$, le rendement négatif χ sera égal à 1, ce qui nous indique que tout le travail disponible est absorbé par le moteur. Ces conditions seront remplies lorsque E_1 et e_1 seront égaux et de valeur infiniment grande, tandis que ε_1 sera égal à 0. Le travail utile $\varepsilon_1 I_1$ restera égal à l'unité, mais sa valeur sera infiniment petite par rapport aux valeurs infiniment grandes de $E_1 I_1$ et $e_1 I_1$. Le rendement χ sera donc bien maximum et égal à 1.

Les rendements limites du moteur $\eta = 1$ et $\chi = 1$ n'ont de valeur qu'au point de vue théorique, en nous faisant voir les conditions auxquelles les fonctions du moteur sont soumises pour atteindre ce résultat. Au point de vue pratique, il n'y aura que les valeurs intermédiaires du rendement qui peuvent nous intéresser, et nous envisagerons

η $\eta = \sin^2 a$	χ $\chi = \cos^2 a$	a_η	E_1 $E_1 = \sqrt{\frac{1}{\eta\chi}}$ $E_1 = \frac{1}{\sin a \cos a}$ E_1	$=$	ε_1 $\varepsilon_1 = \sqrt{\frac{\eta}{\chi}}$ $\varepsilon_1 = \operatorname{tg} a$ ε_1	$+$	e_1 $e_1 = \sqrt{\frac{\chi}{\eta}}$ $e_1 = \operatorname{cotg} a$ e_1	$\varepsilon_1 e_1$ $\varepsilon_1 e_1 = \sqrt{\frac{\chi\eta}{\eta\chi}}$ $\varepsilon_1 e_1 = \operatorname{tg} a \operatorname{cotg} a$	I_1 $I_1 = e_1 = \sqrt{\frac{\chi}{\eta}}$ $I_1 = \operatorname{cotg} a$
1,00	0,00	90°	∞	=	∞	+	0,0000	1	0,0000
0,99	0,01	84° 10′	10,050	=	9,9495	+	0,1005	1	0,1005
0,98	0,02	81° 50′	7,142	=	6,9999	+	0,1421	1	0,1421
0,97	0,03	80° —	5,861	=	5,6852	+	0,1758	1	0,1758
0,96	0,04	78° 30′	5,103	=	4,8989	+	0,2041	1	0,2041
0,95	0,05	77° —	4,588	=	4,3586	+	0,2294	1	0,2294
0,94	0,06	75° 50′	4,209	=	3,9565	+	0,2525	1	0,2525
0,93	0,07	74° 40′	3,918	=	3,6438	+	0,2742	1	0,2742
0,92	0,08	73° 40′	3,686	=	3,3912	+	0,2948	1	0,2948
0,91	0,09	72° 30′	3,495	=	3,1804	+	0,3145	1	0,3145
0,9	0,1	71° 30′	3,333	=	2,9999	+	0,3333	1	0,3333
0,8	0,2	63° 20′	2,500	=	2,0000	+	0,5000	1	0,5000
0,7	0,3	56° 40′	2,181	=	1,5267	+	0,6543	1	0,6543
0,6	0,4	50° 40′	2,037	=	1,2222	+	0,8148	1	0,8148
0,5	0,5	45° —	2,000	=	1,0000	+	1,0000	1	1,0000
0,4	0,6	39° 20′	2,037	=	0,8148	+	1,2222	1	1,2222
0,3	0,7	33° 20′	2,181	=	0,6543	+	1,5267	1	1,5267
0,2	0,8	26° 40′	2,500	=	0,5000	+	2,0000	1	2,0000
0,1	0,9	18° 30′	3,333	=	0,3333	+	2,9999	1	2,9999
0,09	0,91	17° 30′	3,495	=	0,3145	+	3,1804	1	3,1804
0,08	0,92	16° 30′	3,686	=	0,2948	+	3,3912	1	3,3912
0,07	0,93	15° 20′	3,918	=	0,2742	+	3,6438	1	3,6438
0,06	0,94	14° 10′	4,209	=	0,2525	+	3,9565	1	3,9565
0,05	0,95	13° —	4,588	=	0,2294	+	4,3586	1	4,3586
0,04	0,96	11° 30′	5,103	=	0,2041	+	4,8989	1	4,8989
0,03	0,97	10° —	5,861	=	0,1758	+	5,6852	1	5,6852
0,02	0,98	8° 10′	7,142	=	0,1421	+	6,9999	1	6,9999
0,01	0,99	5° 50′	10,050	=	0,1005	+	9,9495	1	9,9495
0,00	1,00	0° 00	∞	=	0,0000	+	∞	1	∞

comme ayant une valeur pratique le rendement $\eta = 0{,}95$, $\chi = 0{,}05$ et $a_\eta = 77°$, nous donnant comme valeurs correspondantes :

$$E_1 = 4{,}588,\ \varepsilon_1 = 4{,}3586,\ e_1 = 0{,}2294,\ I_1 = 0{,}2294,\ w_1 = 1,$$
$$E_1 I_1 = 1{,}052,\quad \varepsilon_1 I_1 = 1,\quad e_1 I_1 = 0{,}052.$$

Nous prendrons donc ces valeurs comme base pour déterminer celles qui leur sont correspondantes lorsque le travail utile du moteur sera plus grand que l'unité, et nous donnerons à ces nouvelles valeurs les symboles E, ε, e, I et w.

Détermination des fonctions électriques E, ε, e, I et w du moteur pour un travail utile A_e plus grand que l'unité.

Le travail utile $A_e{}^1$ se compose des deux valeurs ε_1 et I_1. Si nous multiplions ε_1 par un facteur n, et I_1 par un autre facteur m, m et n pouvant être $\gtrless 1$, nous aurons la relation suivante :

$$n\, m\, A_e{}^1 = n\, \varepsilon_1\, m I_1 = n\, m = A_e > 1\ ;$$

nous admettrons le produit $n\, m$ plus grand que l'unité, ce qui nous donnera un travail A_e plus grand que 1 ($A_e < 1$ n'ayant aucune valeur pratique).

Si nous multiplions les deux membres de l'équation $E_1 = \varepsilon_1 + e_1$ par le facteur n, nous aurons :

$$n E_1 = n \varepsilon_1 + n e_1.$$

En multipliant par $m I_1$ les deux membres de cette équation, nous aurons de nouveau :

$$n E_1\, m I_1 = n\, \varepsilon_1\, m I_1 + n\, e_1\, m I_1.$$

Nous avons de même l'équation générale

$$EI = \varepsilon I + eI,$$

ou bien

$$A = A_e + A_i\ ;$$

or, nous avons vu que

$$n\, \varepsilon_1\, m I_1 = \varepsilon I = A_e,$$

nous aurons donc de même

$$n E_1\, m I_1 = EI = A,$$

$A^1 = E_1 I_1$ $E_1 I_1 = \frac{1}{\eta}$ $E_1 I_1 = \frac{1}{\sin^2 a}$		$Ae^1 = \varepsilon_1 I_1$ $\varepsilon_1 I_1 = \sqrt{\frac{\chi\eta}{\eta\chi}}$ $\varepsilon_1 I_1 = \mathrm{tg}\, a \,\mathrm{cotg}\, a$		$Ai^1 = e_1 I_1$ $e_1 I_1 = e^2_1 = \frac{\chi}{\eta}$ $e_1 I_1 = \mathrm{cotg}^2\, a$	w_1 $w_1 = \frac{1}{Ae^1}$ $w_1 = 1$	$E_1^2 - (\varepsilon_1^2 + e_1^2) = 2$ $\frac{1}{\eta\chi} - \left(\frac{\eta}{\chi} + \frac{\chi}{\eta}\right) = 2.$ $\frac{1}{\sin^2 a \cos^2 a} - (\mathrm{tg}^2 a + \mathrm{cotg}^2 a) = 2.$						
$E_1 I_1$	=	$\varepsilon_1 I_1$	+	$e_1 I_1$		E_1^2	—	ε_1^2	—	e_1^2	=	2
1,000	=	1	+	0,000	1	∞	—	∞	—	0,000	=	2
1,010	=	1	+	0,010	1	101,010	—	99,000	—	0,010	=	2
1,020	=	1	+	0,020	1	51,020	—	49,000	—	0,020	=	2
1,031	=	1	+	0,031	1	34,364	—	32,333	—	0,031	=	2
1,042	=	1	+	0,042	1	26,042	—	24,000	—	0,042	=	2
1,052	=	1	+	0,052	1	21,052	—	19,000	—	0,052	=	2
1,064	=	1	+	0,064	1	17,730	—	15,666	—	0,064	=	2
1,075	=	1	+	0,075	1	15,360	—	13,285	—	0,075	—	2
1,087	=	1	+	0,087	1	13,587	—	11,500	—	0,087	=	2
1,099	=	1	+	0,099	1	12,210	—	10,111	—	0,099	=	2
1,111	=	1	+	0,111	1	11,111	—	9,000	—	0,111	=	2
1,250	=	1	+	0,250	1	6,250	—	4,000	—	0,250	=	2
1,428	=	1	+	0,428	1	4,761	—	2,333	—	0,428	=	2
1,666	=	1	+	0,666	1	4,166	—	1,500	—	0,666	=	2
2,000	=	1	+	1,000	1	4,000	—	1,000	—	1,000	=	2
2,500	=	1	+	1,500	1	4,166	—	0,666	—	1,500	=	2
3,333	=	1	+	2,333	1	4,761	—	0,428	—	2,333	=	2
5,000	=	1	+	4,000	1	6,250	—	0,250	—	4,000	=	2
10,000	=	1	+	9,000	1	11,111	—	0,111	—	9,000	=	2
11,111	=	1	+	10,111	1	12,210	—	0,099	—	10,111	=	2
12,500	=	1	+	11,500	1	13,587	—	0,087	—	11,500	=	2
14,285	=	1	+	13,285	1	15,360	—	0,075	—	13,285	=	2
16,666	=	1	+	15,666	1	17,730	—	0,064	—	15,666	=	2
20,000	=	1	+	19,000	1	21,052	—	0,052	—	19,000	=	2
25,000	=	1	+	24,000	1	26,042	—	0,042	—	24,000	=	2
33,333	=	1	+	32,333	1	34,364	—	0,031	—	32,333	=	2
50,000	=	1	+	49,000	1	51,020	—	0,020	—	49,000	=	2
100,000	=	1	+	99,000	1	101,010	—	0,010	—	99,000	=	2
∞	=	1	+	∞	1	∞	—	0,000	—	∞	=	2

ainsi que

$$n\, e_1\, m\, I_1 = e I = A_i,$$

ce qui nous donnera les valeurs suivantes :

$$n E_1 = E, \quad n\, \varepsilon_1 = \varepsilon, \quad n\, e_1 = e, \quad m\, I_1 = I.$$

Nous déterminerons aussi la valeur de w en fonction de n et m en partant de la relation

$$e I = I^2 w.$$

Si nous remplaçons dans cette équation les valeurs correspondantes en fonction de I_1 et e_1, nous aurons

$$n\, e_1\, m\, I_1 = m^2\, I_1^2\, w,$$

d'où nous tirons

$$w = \frac{n\, e_1}{m\, I_1} = \frac{n}{m}, \qquad \text{car} \quad e_1 = I_1.$$

Comme nous pouvons donner aux facteurs n et m n'importe quelle valeur, à la condition toutefois que le produit $n\, m$ soit plus grand que 1, nous pourrons faire varier E, I et w, dans de très grandes limites, I pouvant être plus grand que E, et réciproquement E plus grand que I; tout dépendra du choix de la résistance $w = \frac{n}{m}$ pour maintenir intégralement la relation

$$E_1\, I_1 = \varepsilon_1\, I_1 + e_1\, I_1,$$

correspondant à un rendement η bien déterminé.

Les exemples suivants serviront à illustrer les faits que nous venons d'énoncer.

Admettons que nous voulions obtenir du moteur un travail utile[1] $A_e = 10\,000$ watts, pour un rendement $\eta = 0{,}95$.

Nous aurons donc :

$$Ae = n\, m\, A_e{}^1 = n\, m = 10\,000.$$

Nous choisirons n et m comme suit :

Exemple 1 : $n' = 1$ $\quad m' = 10\,000 \quad n'\, m' = 10\,000 = A_e$

» 2 : $n'' = 100$ $\quad m' = 100 \quad n'\, m' = 10\,000 = A_e$

» 3 : $n''' = 10\,000$ $\quad m' = 1 \quad n'\, m' = 10\,000 = A_e$

[1] Il est bien entendu que nous ne parlons que du travail électrique utile, les autres parties du travail absorbée par le moteur, courant de Foucault, frottements, etc., ne sont pas comprises dans le rendement $\eta = 0{,}95$.

Exemple 1.

$$n' = 1 \qquad E = n' E_1 = 1 \times 4{,}5880 = 4{,}5880 \text{ volts.}$$
$$\varepsilon = n' \varepsilon_1 = 1 \times 4{,}3586 = 4{,}3586 \quad »$$
$$e = n' e_1 = 1 \times 0{,}2294 = 0{,}2294 \quad »$$
$$m' = 10\,000 \qquad I = m' I_1 = 10000 \times 0{,}2294 = 2294 \text{ ampères.}$$
$$w = \frac{n'}{m'} = \frac{1}{10000} = 0{,}0001 \text{ ohm.}$$

L'équation $EI = \varepsilon I + eI$ deviendra

$$\underbrace{\overset{E}{4{,}5880} \times \overset{I}{2294}}_{10\,520 \text{ watts.}} = \underbrace{\overset{\varepsilon}{4{,}3586} \times \overset{I}{2294}}_{10\,000 \text{ watts.}} + \underbrace{\overset{e}{0{,}2294} \times \overset{I}{2294}}_{520 \text{ watts.}}$$

Exemple 2.

$$n'' = 100 \qquad E = n'' E_1 = 100 \times 4{,}5880 = 458{,}80 \text{ volts.}$$
$$\varepsilon = n'' \varepsilon_1 = 100 \times 4{,}3586 = 435{,}86 \quad »$$
$$e = n'' e_1 = 100 \times 0{,}2294 = 22{,}94 \quad »$$
$$m'' = 100 \qquad I = m'' I_1 = 100 \times 0{,}2294 = 22{,}94 \text{ ampères.}$$
$$w = \frac{n''}{m''} = \frac{100}{100} = 1{,}00 \text{ ohm.}$$

L'équation $EI = \varepsilon I + eI$ sera satisfaite comme suit :

$$\underbrace{\overset{E}{458{,}80} \times \overset{I}{22{,}94}}_{10\,520 \text{ watts.}} = \underbrace{\overset{\varepsilon}{435{,}86} \times \overset{I}{22{,}94}}_{10\,000 \text{ watts.}} + \underbrace{\overset{e}{22{,}94} \times \overset{I}{22{,}94}}_{520 \text{ watts.}}$$

Exemple 3.

$$n''' = 10000 \qquad E = n''' E_1 = 10000 \times 4{,}5880 = 45880 \text{ volts.}$$
$$\varepsilon = n''' \varepsilon_1 = 10000 \times 4{,}3586 = 43586 \quad »$$
$$e = n''' e_1 = 10000 \times 0{,}2294 = 2294 \quad »$$
$$m'' = 1 \qquad I = m''' I_1 = 1 \times 0{,}2294 = 0{,}2294 \text{ ampères.}$$
$$w = \frac{n'''}{m''} = \frac{10\,000}{1} = 10000 \text{ ohms.}$$

L'équation $EI = \varepsilon I + eI$ sera équivalente à

$$\underbrace{\overset{E}{45880} \times \overset{I}{0{,}2294}}_{10\,520 \text{ watts.}} = \underbrace{\overset{\varepsilon}{43586} \times \overset{I}{0{,}2294}}_{10\,000 \text{ watts.}} + \underbrace{\overset{e}{2294} \times \overset{I}{0{,}2294}}_{520 \text{ watts.}}$$

Equations générales.

Nous déterminerons maintenant les formules générales qui lient entre elles les fonctions électriques A_e, E, w, η et χ du moteur pour un travail utile A_e plus grand que l'unité.

Soit

$$A_e = \varepsilon I,$$

d'où

$$I = \frac{A_e}{\varepsilon} = \frac{A_e}{E\eta},$$

nous avons, en outre, $e = E\chi = Iw$; en remplaçant dans cette équation I par sa valeur, nous obtiendrons :

$$E\chi = \frac{A_e}{E\eta} w,$$

ce qui nous donnera :

$$E\chi E\eta = A_e w,$$
$$E^2 \chi\eta = A_e w,$$
$$E^2 = \frac{A_e w}{\chi\eta}.$$

Nous aurons donc la valeur de E, force électromotrice disponible, en fonction de A_e travail utile, w résistance totale du moteur et $\chi\eta$ rendement, soit :

$$E = \frac{\sqrt{A_e w}}{\sqrt{\chi\eta}} = \frac{\sqrt{A_e w}}{\sin\alpha \cos\alpha}.$$

Nous aurons de même la formule déterminant la résistance w en fonction de A_e, E et $\chi\eta$, soit :

$$w = \frac{E^2 \eta\chi}{A_e} = \frac{E^2 \sin^2\alpha \cos^2\alpha}{A_e}.$$

Nous établirons de même la formule générale du rendement positif η en nous basant sur les équations précédentes.

Nous avons vu que

$$\eta\chi = \frac{w A_e}{E^2} = \eta(1 - \eta),$$

d'où

$$\eta - \eta^2 = \frac{A_e w}{E^2};$$

nous aurons donc l'équation du second degré suivante :

$$\eta^2 - \eta + \frac{A_e w}{E^2} = 0,$$

qui nous donnera les deux solutions :

$$\eta' = \eta = 0{,}5 + \sqrt{0{,}25 - \frac{A_e w}{E^2}}$$
$$\eta'' = \chi = 0{,}5 - \sqrt{0{,}25 - \frac{A_e w}{E^2}}.$$

Pour le rendement $\eta = 1$, nous devons avoir $\frac{A_e w}{E^2} = 0$. Comme A_e et w ne peuvent être égal à 0, ce sera la force électromotrice E qui devra être de valeur infiniment grande, conformément à ce que nous avons vu précédemment.

Pour un rendement $\eta = 0{,}5$, nous devrons avoir

$$\sqrt{0{,}25 - \frac{A_e w}{E^2}} = 0,$$

d'où

$$\frac{A_e w}{E^2} = 0{,}25 = \frac{1}{4},$$

donc

$$A_e w = \frac{E^2}{4}.$$

Remplaçant dans cette relation les fonctions A_e, w et E par A_e^1, w^1 et E_1, nous aurons $A_e^1 w^1 = 1$, d'où $E_1^2 = 4$ et $E_1 = 2$, valeur que nous avons vue au tableau.

Nous pensons avoir ainsi déterminé la loi générale du rendement des moteurs électriques ; nous ferons seulement remarquer, pour éviter toute confusion, qu'il s'agit du rendement électrique et non du rendement commercial des moteurs.