Zeitschrift: Bulletin technique de la Suisse romande
Band: 29 (1903)
Heft: 24

Artikel: Application de la statique graphique aux systèmes de l'espace
Autor: Mayor, B.
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-23523

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 17.08.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

29me Année. 25 décembre 1903. N° 24.

Bulletin technique de la Suisse romande

ORGANE EN LANGUE FRANÇAISE DE LA SOCIÉTÉ SUISSE DES INGÉNIEURS ET DES ARCHITECTES. — Paraissant deux fois par mois.

Rédacteur en chef: M. P. HOFFET, professeur à l'Ecole d'Ingénieurs de l'Université de Lausanne.

Numéro spécial

publié à l'occasion du 50me anniversaire de fondation de l'Ecole d'Ingénieurs de l'Université de Lausanne.

№ 2.

SOMMAIRE : *Application de la statique graphique aux systèmes de l'espace* (suite)[1], par M. B. Mayor, professeur, à Lausanne. — *Les nouvelles lignes du Chemin de fer Rhétique,* par M. F. Rey, ingénieur, à Coire. Planches 12, 13 et 14. — *Programme d'un cours sur les ponts mobiles* (suite et fin), par M. J. Gaudard, professeur, à Lausanne. — *Questions d'acoustique pratique,* par M. Henri Dufour, professeur, à Lausanne. — **Divers :** Cinquantenaire de l'Ecole d'Ingénieurs de l'Université de Lausanne. — Bibliographie. — Sociétés. — Concours. — Association amicale des anciens élèves de l'Ecole d'Ingénieurs de Lausanne. Demandes et offre d'emploi. — Note de la Rédaction.

Application de la statique graphique aux systèmes de l'espace.

Par M. B. MAYOR, ingénieur,

Professeur ordinaire.
Ancien élève de l'Ecole d'Ingénieurs (1884-1887).

(Suite) [1].

CHAPITRE II

Représentation de la force, de la droite, du point et du plan.

8. Représentation de la force. Soit Π le plan sur lequel on se propose de représenter l'espace, plan qui peut être choisi d'une manière arbitraire, mais qu'il convient, dans la plupart des applications, de prendre horizontal ou vertical. Choisissons, une fois pour toutes, un système de forces fixe (F_0) qui jouera le rôle de système directeur et qui, par conséquent, ne doit être ni en équilibre, ni réductible à une résultante unique.

Une force (F), quelconque dans l'espace, étant alors donnée, nous la représenterons, sur le plan Π, par les éléments suivants :

1° Sa projection orthogonale sur ce plan, projection que nous désignerons simplement par la lettre F, les parenthèses qui caractérisent la force correspondante dans l'espace étant donc supprimées ;

2° La trace Φ' sur le plan Π de la ligne d'action de sa conjuguée par rapport au complexe directeur.

Ces deux éléments F et Φ' suffisent pour représenter complètement une force de l'espace. En d'autres termes, à toute force de l'espace correspond un système d'éléments et un seul tels que F et Φ', ce qui est évident, et, réciproquement, à une force F, quelconque dans Π, et à un point Φ', quelconque aussi dans ce plan, correspond, en général, une force unique de l'espace.

En effet, le plan projetant de la force (F) est déterminé puisque la projection F est donnée ; on possède ainsi un premier plan qui passe par la ligne d'action de (F). On en peut obtenir un deuxième puisque, Φ' étant situé sur la conjuguée (F'), son plan focal par rapport au complexe directeur passe également par cette ligne d'action. Quant à l'intensité et au sens de (F), qui seuls restent à déterminer, ils se déduisent immédiatement des éléments analogues de F qui sont donnés.

Il est inutile de se préoccuper actuellement des cas d'exception qui peuvent se présenter, cas dans lesquels le procédé qui vient d'être indiqué est insuffisant. Il convient toutefois d'ajouter immédiatement qu'il est utile, sinon nécessaire, aussi bien pour lever certaines indéterminations que pour faciliter la solution de la plupart des problèmes, de représenter en même temps que la force donnée, et par le même procédé, sa conjuguée (F'). Cette dernière force sera donc donnée par sa projection F' sur Π et par la trace Φ, sur ce même plan, de la ligne d'action de (F).

D'après cela et en résumé, une force quelconque sera toujours représentée par deux forces F et F' et par deux points Φ et Φ'. Nous exprimerons symboliquement ce fait en écrivant

$$(F) \equiv (F, \Phi, F', \Phi').$$

De plus, dans le but de faciliter le langage, la ligne d'action de F sera dite la ligne représentative de la force de l'espace, tandis que Φ' sera son point représentatif ; et, de même, la ligne d'action de F' sera la droite représentative de la conjuguée et Φ son point représentatif.

9. Les éléments représentatifs d'une même force ne peuvent être choisis arbitrairement, mais sont, au contraire, liés par certaines relations que nous allons indiquer.

[1] Voir N° du 10 décembre 1903, page 343.

Le titre de la première partie de l'article « *Application de la statique graphique aux systèmes de l'espace* » a été, par erreur, omis dans le sommaire du N° du 10 décembre, où il devait figurer immédiatement avant la rubrique « DIVERS ».

En premier lieu, il est évident que le point Φ et la ligne d'action de F sont unis ainsi, du reste, que le point Φ' et la ligne d'action de F'.

Pour obtenir d'autres relations essentielles, rappelons que tout système de forces peut être réduit, d'une manière et d'une seule, à deux résultantes dont l'une soit contenue dans un plan arbitrairement choisi, l'autre étant normale à ce plan. En particulier, le système directeur (F_0) peut être réduit à deux résultantes dont l'une, e, sera située dans le plan Π, tandis que l'autre, ω, sera normale à ce même plan. Nous désignerons alors par E la ligne d'action de la force e et par O le point où la ligne d'action de la force ω perce le plan Π. Cette droite et ce point joueront, dans toute la suite, un rôle analogue à celui que joue la ligne de terre en géométrie descriptive. D'ailleurs, O est le foyer de Π relativement au complexe directeur, et E la caractéristique de ce même plan par rapport au même complexe.

Ces notations fixées une fois pour toutes, décomposons chacune des forces (F) et (F') en deux composantes dont l'une soit normale à Π et l'autre contenue dans ce plan. Les deux composantes normales passent respectivement par les points Φ et Φ', et nous pouvons les désigner, puisqu'elles sont dans l'espace, par (Φ) et (Φ'). Quant aux deux autres composantes, elles sont identiques aux deux forces désignées par F et F'.

Dans ces conditions, le système constitué par les quatre forces F, F', (Φ), (Φ') est identique à celui que forment les deux conjuguées (F) et (F'). Il aura donc même complexe d'action que le système directeur et pourra, comme ce dernier, se réduire à deux résultantes dont l'une, normale à Π, passe nécessairement par le point O, tandis que l'autre, située dans le plan Π, doit admettre la droite E pour ligne d'action. En conséquence, les points Φ et Φ' sont alignés sur O et les lignes d'action de F et de F' se coupent sur E.

On peut donc énoncer la proposition suivante qui fait déjà pressentir le caractère dualistique du mode de représentation adopté, caractère qui, d'ailleurs, ne fera que s'accentuer dans la suite :

Les points représentatifs de deux forces conjuguées sont toujours alignés sur O, tandis que les droites représentatives des mêmes forces se coupent sur E.

10. Il résulte encore du raisonnement qui précède qu'en multipliant par un facteur $\frac{1}{k}$ convenablement choisi les intensités des quatre composantes F, F', (Φ), (Φ'), on obtient un système équivalent au système directeur. De là découle alors un procédé simple permettant de reconstituer complètement une force de l'espace définie par ses éléments représentatifs.

Soient, en effet, F et Φ', (fig. 1) les éléments représentatifs de la force (F) qu'on se propose de retrouver, l'extrémité initiale de F coïncidant avec le point d'intersection de sa ligne d'action et de la droite E.

Le théorème qui termine le paragraphe précédent permet de déterminer immédiatement le point Φ ainsi que la ligne d'action de F'. De plus, la résultante inconnue e' des deux forces F et F', dont la première est seule donnée, admettant E pour ligne d'action, on peut ensuite, en achevant de tracer le parallélogramme représenté sur la figure, déterminer cette résultante e' ainsi que la force F'.

D'autre part, on connaît nécessairement les intensités des deux forces désignées par e et ω puisque ces forces définissent le système directeur, et l'on peut déterminer la valeur du coefficient k à l'aide de la formule

$$k = \frac{e'}{e}.$$

Dès lors, si l'on considère une force ω', passant par O, normale au plan Π et ayant une intensité égale à $k\omega$, puis, qu'on la décompose en deux forces normales aussi au plan Π et passant par les points Φ et Φ', on obtient précisément les composantes désignées par (Φ) et (Φ'). Comme, enfin, (Φ) est la composante de (F) suivant la normale au plan Π, cette dernière force se trouve parfaitement déterminée.

Il est inutile d'insister plus longuement sur cette solution. Elle se simplifie notablement, en effet, lorsque la droite E s'éloigne indéfiniment comme nous le supposerons toujours dans les applications.

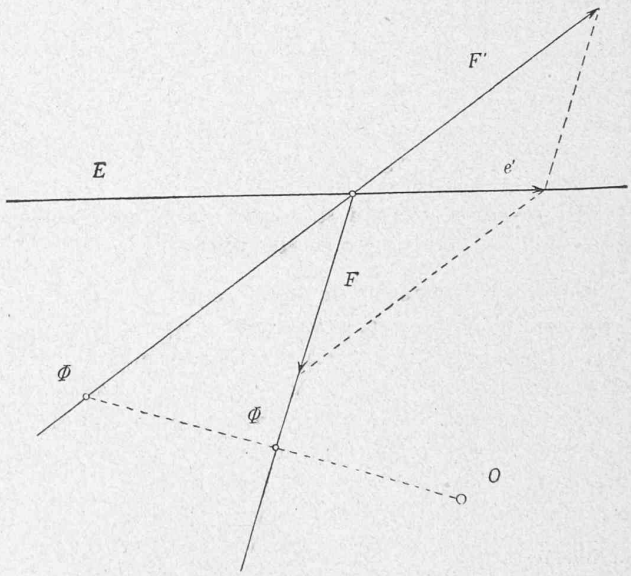

Fig. 1.

11. Il convient, avant de poursuivre, d'exprimer analytiquement les relations qui lient les forces de l'espace à leurs éléments représentatifs.

Dans ce but, traçons un système d'axes coordonnés rectangulaires, orienté comme de coutume et ayant son origine au point O, son axe Oz coïncidant en direction et en sens avec la force ω, son axe Oy parallèle à e et de même sens que cette force, et, enfin, son axe Ox perpendiculaire aux deux précédents. Le plan xOy coïncide alors avec Π.

Si l'on désigne par d la distance du point O à la droite E, les coordonnées du système directeur auront, par rapport à ces axes, les valeurs suivantes :

$$X_0 = O\,, \qquad L_0 = O\,,$$
$$Y_0 = e\,, \qquad M_0 = O\,,$$
$$Z_0 = \omega\,, \qquad N_0 = ed\,.$$

Par suite, l'automoment

$$2\,H_0 = 2\,(L_0\,X_0 + M_0\,Y_0 + N_0\,Z_0)$$

de ce même système se réduit à

$$2\,H_0 = 2\,\omega\,ed,$$

et le moment par rapport à (F_0) d'une force (F) définie à l'aide de ses six coordonnées prend la forme

$$(F_0, F) = eM + \omega\,N + edZ.$$

Dans ces conditions, les groupes de formules (3) et (4) du paragraphe 3 (chap. I), qui lient les coordonnées de deux forces conjuguées par rapport au système directeur, prennent les formes suivantes :

$$X' = -X\,, \qquad L' = -L\,,$$

$$(1)\quad Y' = \frac{1}{\omega d}\,(eM + \omega N + edZ) - Y, \quad M' = -M\,,$$

$$Z' = \frac{1}{ed}\,(eM + \omega N)\,, \qquad N' = \frac{e}{\omega}\,(M + dZ)\,,$$

et

$$X = -X'\,, \qquad L = -L'\,,$$

$$(2)\quad Y = \frac{1}{\omega d}\,(eM' + \omega N' + edZ') - Y, \quad M = -M'\,,$$

$$Z = \frac{1}{ed}\,(eM' + \omega N')\,, \qquad N = \frac{e}{\omega}\,(M' + dZ').$$

Ces résultats obtenus, il est facile de déterminer analytiquement les éléments représentatifs d'une force (F) définie à l'aide de ses six coordonnées

$$X,\ Y,\ Z,\ L,\ M,\ N.$$

La force F, située dans le plan Π, a ses deux composantes suivant les axes Ox et Oy égales à X et à Y, et, pour achever de la déterminer, il suffit d'obtenir l'équation de sa ligne d'action. Or, les moments de F et de (F) par rapport à l'axe Oz sont égaux entre eux puisque la composante Z de cette dernière force a un moment nul relativement au même axe. Comme, de plus, la valeur commune de ces deux moments est égale à N, on aura, entre les coordonnées x et y d'un point quelconque de la ligne d'action de F, la relation suivante

$$(3)\qquad xY - yX = N,$$

qui constitue précisément l'équation cherchée.

Désignant ensuite par x' et y' les coordonnées du point Φ', on aura, en considérant ce point comme le point d'application de la force (F') et en appliquant les formules qui permettent de calculer les moments d'une force par rapport aux axes coordonnés,

$$L' = y'Z',$$
$$M' = -x'Z'$$

d'où, en résolvant,

$$x' = -\frac{M'}{Z'}\,,\ y' = \frac{L'}{Z'}\,.$$

Remplaçant finalement dans ces formules les coordonnées de la conjuguée par leurs valeurs exprimées à l'aide des coordonnées de la force donnée, on obtient

$$(4)\qquad x' = \frac{Med}{eM + \omega N}\,,\ y' = \frac{-Led}{eM + \omega N}\,.$$

L'équation (3) et les formules (4) définissent complètement les éléments représentatifs de la force donnée. Mais, ainsi que nous l'avons déjà dit, il convient de considérer en même temps les éléments correspondants de la conjuguée (F'). Un procédé semblable au précédent conduirait, d'une part à la relation

$$(3')\qquad x\,[eM + \omega N + edZ - \omega dY] + y\omega dX = ed\,(M + dZ),$$

qui constitue l'équation de la ligne d'action de F', et, d'autre part, aux deux formules

$$(4')\qquad x = -\frac{M}{Z}\,,\ y = \frac{L}{Z},$$

qui donnent les coordonnées du point Φ.

12. Les formules qui précédent permettraient de retrouver sans aucune peine les relations géométriques qui lient les éléments représentatifs d'une même force, relations qui ont déjà fait l'objet du paragraphe 9. Elles se prêtent aussi particulièrement bien à l'étude des cas singuliers qui peuvent se présenter et dont l'examen est digne d'attention à plusieurs titres. Nous n'en ferons pas cependant l'étude actuellement, puisque nous aurons à revenir sur ce point après avoir décrit le mode de représentation spécial qui convient seul aux applications de la statique graphique. Toutefois, il est nécessaire de signaler la propriété suivante qui met bien en évidence le rôle du système directeur.

Supposons qu'une force (F) soit en involution avec le système directeur. Elle est, ainsi que nous l'avons déjà vu, égale et directement opposée à sa conjuguée. Par suite, les lignes représentatives de ces deux forces sont confondues, leurs points représentatifs coïncident et de plus, ces lignes et ces points sont unis.

Réciproquement, admettons que la ligne représentative et le point représentatif d'une force soient unis. On aura alors en exprimant que les coordonnées du point Φ' vérifient l'équation de la ligne d'action de F

$$\frac{Med}{eM + \omega N}\,Y + \frac{Led}{eM + \omega N}\,X = N,$$

ou, en tenant compte de la relation quadratique

$$LX + MY + NZ = O$$

qui lie toujours les coordonnées d'une force,

$$N\,(eM + N + edZ) = O.$$

Cette relation ne peut être vérifiée que si l'on a séparément ou simultanément,

$$eM + \omega N + edZ = O$$

et

$$N = o.$$

La première de ces équations exprime que le moment, par rapport au système directeur, de la force considérée

est nul, condition qui n'est vérifiée que dans le cas où la ligne d'action de cette force appartient au complexe directeur. Comme, d'autre part, la seconde équation n'est satisfaite que si cette même ligne d'action rencontre l'axe Oz, on peut énoncer la propriété suivante :

Lorsque la ligne et le point représentatifs d'une même force sont unis, la ligne d'action de cette force appartient au complexe directeur ou fait partie d'un complexe linéaire spécial ayant pour directrice la perpendiculaire élevée en O au plan Π.

Il est facile, et d'ailleurs nécessaire pour la suite, de distinguer les deux cas qui résultent de cet énoncé.

Si l'on suppose, en effet,

$$N = O,$$

l'équation (3) se réduit à

$$xY - yX = O$$

et la ligne représentative de la force considérée passe par O. De plus, la première des équations (4) donne

$$x' = d,$$

et le point représentatif de la même force est situé sur la droite E. Comme, enfin, il est visible que, si l'une ou l'autre de ces conditions est remplie, la relation

$$N = O$$

en résulte nécessairement, on peut énoncer, pour compléter la proposition précédente, le théorème suivant :

Lorsque la ligne représentative d'une force passe par O son point représentatif est situé sur E. Réciproquement, si le point représentatif est situé sur E, la ligne représentative passe par O. De plus, ces éléments représentatifs sont alors unis et la ligne d'action de la force correspondante appartient au complexe spécial précédemment défini.

Au surplus, on peut encore ajouter que, dans ce cas, les lignes représentatives et les points représentatifs de la force considérée et de sa conjuguée ne sont confondus que si la ligne d'action de cette force rencontre encore la droite E. Mais, alors, cette ligne d'action appartient au complexe directeur puisqu'elle rencontre simultanément deux droites conjuguées.

13. Représentation de la ligne droite. Une droite (f), quelconque dans l'espace, peut toujours être considérée comme la ligne d'action d'une force d'intensité arbitraire. Elle sera donc complètement représentée, sur le plan Π, par sa projection f et par la trace φ', sur ce même plan, de sa conjuguée (f') par rapport au complexe directeur. En conséquence, cette droite f et ce point φ' seront appelés les éléments représentatifs de (f). D'ailleurs, il est utile, ici encore, de représenter en même temps que (f), et par le même procédé, sa conjuguée (f') par rapport au complexe directeur. Cette dernière sera, dans ces conditions, définie par une droite f' et un point φ que nous appellerons les éléments représentatifs de la conjuguée. Remarquons tout de suite que φ est la trace sur le plan Π de la droite (f).

Il résulte immédiatement des propriétés obtenues précédemment que les droites représentatives f et f' se coupent sur E, que les points représentatifs φ' et φ sont alignés sur O et qu'enfin, φ' est situé sur f' et φ sur f. Par suite, lorsque les deux éléments représentatifs d'une droite sont connus, il est possible, en général, d'en déduire immédiatement ceux de sa conjuguée. Si, de plus, on applique sur f une force d'intensité arbitraire, on pourra, à l'aide du procédé indiqué au paragraphe 10, retrouver la force correspondante de l'espace, force qui admet précisément la droite (f) pour ligne d'action.

14. Il est inutile d'indiquer actuellement toutes les indéterminations ou toutes les singularités que peut présenter ce mode de réprésentation. Cependant, il est nécessaire pour la suite de signaler les particularités que présentent les éléments représentatifs des droites qui font partie du complexe directeur ou du complexe spécial défini au paragraphe 12. Si l'on convient, dorénavant, d'appeler les premières des *droites singulières* et les autres des *droites spéciales*, on peut alors énoncer les propositions suivantes qui résultent toutes des propriétés obtenues au paragraphe mentionné :

Les éléments représentatifs des droites singulières et des droites spéciales sont toujours unis et, réciproquement, lorsque les éléments représentatifs d'une droite sont unis, cette droite est singulière ou spéciale;

Les éléments représentatifs de même nature qui correspondent à une droite singulière et à sa conjuguée sont confondus. Réciproquement, lorsque les éléments représentatifs d'une droite coïncident avec ceux qui correspondent à sa conjuguée, cette droite est une droite singulière.

Au contraire, les éléments représentatifs d'une droite spéciale ne coïncident jamais avec ceux de sa conjuguée, à moins que celle-ci ne soit en même temps singulière. En revanche, la ligne représentative d'une pareille droite passe toujours par O et son point représentatif est toujours situé sur E.

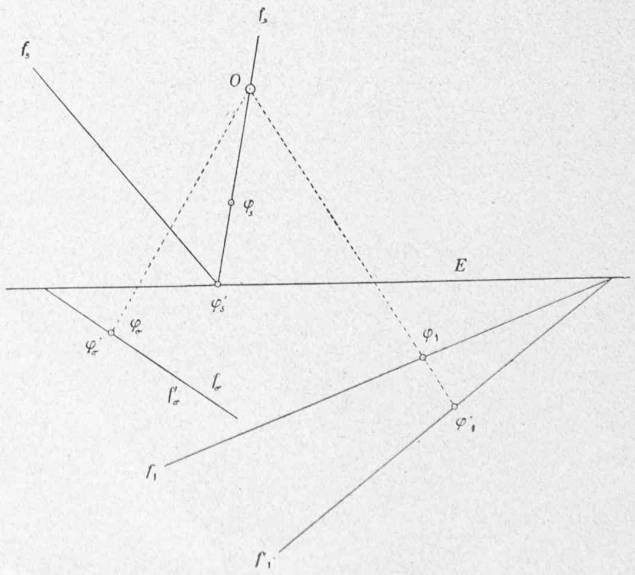

Fig. 2.

Afin d'éviter toute confusion, nous avons représenté sur la figure 2 les divers cas qui peuvent se présenter. Les éléments représentatifs caractérisés par l'indice 1 correspondent à une droite quelconque ; ceux qui sont caractérisés par l'indice s correspondent à une droite spéciale et, enfin, ceux qui sont caractérisés par l'indice σ correspondent à une droite singulière.

Il résulte de l'examen de cette figure que, lorsqu'une droite est spéciale, il ne suffit plus de connaître ses seuls éléments représentatifs f_s et φ_s' pour qu'on en puisse déduire ceux de sa conjuguée. Ces derniers devront être donnés car, autrement, la droite correspondante de l'espace serait mal représentée puisque son plan projetant coïncide toujours avec le plan focal par rapport au complexe directeur de son point représentatif.

Ajoutons encore que, si les éléments représentatifs de la conjuguée d'une droite spéciale sont donnés, cette droite spéciale est bien définie à moins qu'elle ne soit en même temps singulière. Dans ce dernier cas, le mode de représentation adopté conduit à une indétermination analogue à celle que présentent, en géométrie descriptive, les droites situées dans un plan de profil, indétermination qu'on peut d'ailleurs lever bien facilement, ainsi que nous le verrons dans la suite.

15. Condition de rencontre de deux droites définies par leurs éléments représentatifs. Pour obtenir facilement cette condition qui va jouer un rôle essentiel et qui, d'ailleurs, est caractéristique du mode de représentation adopté, il est utile de rappeler quelques propriétés des coordonnées homogènes d'une droite de l'espace.

Tout d'abord, pour que deux droites (f_1) et (f_2) définies chacune par leurs coordonnées

$$X_1,\ Y_1,\ Z_1,\ L_1,\ M_1,\ N_1,$$

et

$$X_2,\ Y_2,\ Z_2,\ L_2,\ M_2,\ N_2$$

se coupent, il faut et il suffit que l'on ait

$$X_1\,L_2, + Y_1\,M_2 + Z_1\,N_2 + L_1\,X_2 + M_1\,Y_2 + N_1\,Z_2 = O.$$

Cette relation exprime, en effet, que le moment relatif de deux forces d'intensités arbitraires, mais ayant ces droites pour lignes d'action, est nul.

Pour cette raison et dans le but d'abréger, nous écrirons fréquemment cette condition de la manière suivante :

$$(f_1, f_2) = O.$$

Admettons alors que les deux droites (f_1) et (f_2) se coupent effectivement ; elles déterminent dans l'espace un faisceau plan, c'est-à-dire l'ensemble de toutes les droites qui passent par leur point de rencontre et qui sont, en outre, situées dans leur plan. De plus, on sait, et l'on vérifie sans peine, que les coordonnées d'une droite quelconque de ce faisceau sont données par les formules suivantes :

$$X = X_1 + \lambda\,X_2, \qquad L = L_1 + \lambda\,L_2,$$
$$Y = Y_1 + \lambda\,Y_2, \qquad M = M_1 + \lambda\,M_2,$$
$$Z = Z_1 + \lambda\,Z_2, \qquad N = N_1 + \lambda\,N_2,$$

dans lesquelles λ représente un paramètre. A toute valeur de λ correspond une droite et une seule du faisceau, et réciproquement, à toute droite du faisceau correspond une valeur de λ et une seule. De plus, aux valeurs λ', λ'', λ''', λ^{IV} correspondent quatre droites du faisceau dont le rapport anharmonique est donné par la formule

$$(\lambda', \lambda'', \lambda''', \lambda^{\text{IV}}) = \frac{\lambda' - \lambda'''}{\lambda' - \lambda^{\text{IV}}} : \frac{\lambda'' - \lambda'''}{\lambda'' - \lambda^{\text{IV}}}.$$

Ces principes rappelés, proposons nous de déterminer les éléments représentatifs f et φ' d'une droite quelconque (f) du faisceau considéré.

A cet effet, soient f_1 et φ_1' les éléments représentatifs de (f_1), f_2 et φ_2' ceux de (f_2).

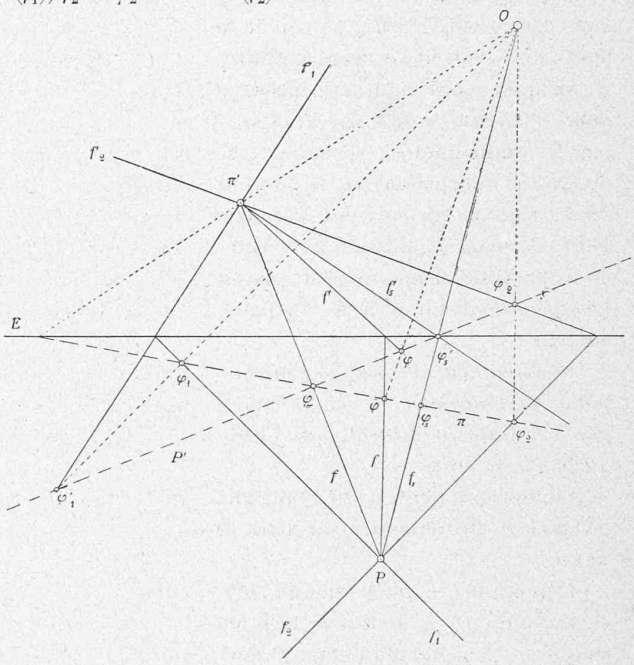

Fig. 3.

Les droites représentatives ont respectivement pour équation, en vertu des formules 3 du paragraphe 11

$$f_1)\quad x\,Y_1 - y\,X_1 = N_1\,,$$
$$f_2)\quad x\,Y_2 - y\,X_2 = N_2\,,$$
$$f)\quad x\,(Y_1 + \lambda\,Y_2) - y\,(X_1 + \lambda\,X_2) = N_1 + \lambda\,N_2\,,$$

tandis que, d'après les formules 4 du même paragraphe, les coordonnées des points φ_1', φ_2', φ' ont pour valeurs

$$\varphi_1')\quad x_1' = \frac{M_1\,ed}{e\,M_1 + \omega\,N_1}, \qquad y_1' = \frac{-L_1\,ed}{e\,M_1 + \omega\,N_1},$$

$$\varphi_2')\quad x_2' = \frac{M_2\,ed}{e\,M_2 + \omega\,N_2}, \qquad y_2' = \frac{-L_2\,ed}{e\,M_2 + \omega\,N_2},$$

$$\varphi')\quad \begin{aligned} x' &= \frac{(M_1 + \lambda\,M_2)\,ed}{e\,(M_1 + \lambda\,M_2) + \omega\,(N_1 + \lambda\,N_2)}, \\ y' &= \frac{-(L_1 + \lambda\,L_2)\,ed}{e\,(M_1 + \lambda\,M_2) + \omega\,(N_1 + \lambda\,N_2)}. \end{aligned}$$

Il résulte immédiatement de la forme même de ces relations que, lorsque la droite (f) engendre dans l'espace

le faisceau considéré, c'est-à-dire quand λ varie, sa ligne représentative f engendre, dans le plan Π, le faisceau ayant pour sommet le point de rencontre P de f_1 et f_2, et que son point représentatif décrit la ponctuelle P' déterminée par φ'_1 et φ'_2. De plus, et en vertu d'un principe rappelé au début de ce paragraphe, le rapport anharmonique de quatre droites du faisceau de l'espace est égal à celui des quatre droites représentatives ainsi qu'à celui des quatre points représentatifs. Les points φ' de la ponctuelle P' et les droites f du faisceau P se correspondent donc projectivement.

Ce premier point établi, observons ensuite que le faisceau déterminé par (f_1) et (f_2) renferme une droite spéciale (f_s) et une seule, à moins, ce que nous ne supposerons pas, que (f_1) et (f_2) ne soient toutes deux des droites spéciales. Or le point représentatif φ'_s de (f_s) est situé sur E, sa ligne représentative f_s passe par O et, de plus, ces deux éléments sont unis. Comme, d'autre part, f_s passe par P, tandis que φ'_s est sur P', on voit (fig. 3) que la droite OP doit passer par le point d'intersection de P' et de E. Si donc on convient d'appeler ligne de fuite d'un point du plan Π la droite qui relie ce point à O, et point de fuite d'une droite de ce même plan le point de rencontre de cette droite et de E, on peut énoncer le théorème suivant :

Lorsque deux droites se coupent, la ligne de fuite du point de rencontre de leurs droites représentatives et le point de fuite de la droite qui joint leurs points représentatifs seront unis.

Réciproquement, cette condition, qui est la condition nécessaire de rencontre de deux droites, est aussi suffisante.

Admettons, en effet, qu'elle soit vérifiée, comme nous l'avons supposé pour tracer la figure 3 ; puis, établissons, ce qui est possible d'une manière et d'une seule, entre les points φ' de la ponctuelle P' et les droites f du faisceau P, une correspondance projective telle que les rayons f_1, f_2, et f_s correspondent respectivement aux points φ_1', φ_2' et φ_s'. Chaque couple d'éléments correspondants tels que f et φ' définit alors une droite de l'espace et une seule ; et, comme il existe une simple infinité de ces couples, à leur ensemble correspond une simple infinité de droites, c'est-à-dire une *série réglée* contenant, en particulier, les droites désignés par (f_1), (f_2) et (f_s). D'ailleurs, cette série réglée se réduit nécessairement à un faisceau plan, puisqu'elle renferme une seule droite spéciale, à savoir, celle dont les éléments représentatifs ont été désignés par f_s et φ'_s. Comme, enfin, les droites considérées (f_1) et (f_2) appartiennent à ce faisceau, elles se coupent nécessairement, ce que nous voulions précisément établir.

Toutefois, la démonstration qui précède soulève une objection. Elle suppose essentiellement, en effet, que les éléments correspondants f_s et φ'_s définissent une seule droite spéciale, ce qui n'est pas nécessairement exact puisqu'une telle droite n'est pas bien déterminée par ses seuls éléments représentatifs et qu'il est indispensable de considérer en même temps ceux de sa conjuguée.

Cette objection peut être réfutée de deux manières différentes, mais qui doivent être indiquées l'une et l'autre, car elles conduisent à des remarques importantes.

16. En premier lieu, il est facile de montrer que la série réglée, qu'on vient de considérer, contient une seule droite singulière.

On sait, en effet, que lorsqu'un faisceau est relié projectivement à une ponctuelle de son plan, il possède toujours deux rayons, réels ou imaginaires, dont chacun passe par le point qui lui correspond sur la ponctuelle. Dans le cas du faisceau P et de la ponctuelle P', l'un de ces rayons coïncide avec f_s et correspond à la droite spéciale déjà considérée. Le deuxième rayon est donc nécessairement réel et, comme il est uni à son point correspondant, sans passer par O, il définit une droite singulière que nous désignerons par (f_σ). Il n'en définit d'ailleurs qu'une puisqu'une telle droite est, en général, bien déterminée par ses seuls éléments représentatifs. En conséquence, et comme nous nous proposions de l'établir rigoureusement, la série réglée considérée se réduit bien à un faisceau plan.

17. En second lieu, on peut parvenir directement au même résultat en montrant que les éléments représentatifs f_s' et φ_s de la conjuguée de la droite spéciale (f_s), précédemment considérée, sont déterminés sans ambiguité.

A cet effet, remarquons que le faisceau P constitué par les lignes représentatives f des droites de la série réglée et le faisceau obtenu en projetant de O les points représentatifs des mêmes droites sont perspectifs. Car, en vertu de ce qui précède ils sont manifestement projectifs, et, de plus, leur rayon commun se correspond à lui-même. Par suite, les points de rencontre de leurs rayons correspondants, c'est-à-dire les points représentatifs φ des conjuguées de la série réglée, sont tous situés sur une même droite π. Comme, enfin, cette droite π passe par les points φ_1 et φ_2, elle est bien définie ainsi que le point φ_s qui doit se trouver, à la fois, sur cette droite et sur f_s.

On montrerait d'une manière analogue que les lignes représentatives f' des conjuguées de la série réglée passent toutes par le point de rencontre π' de f_1' et de f_2'. La ligne représentative f_s' est donc, elle aussi, bien définie, puisqu'elle passe à la fois par ce point π' et par φ'_s.

Dans ces conditions, il est bien démontré que la condition de rencontre précédemment énoncée est non seulement nécessaire, mais encore suffisante, le cas où les droites données (f_1) et (f_2) sont toutes deux spéciales restant toujours réservé.

18. Il est d'ailleurs possible, en introduisant une notion qui va jouer un certain rôle, d'énoncer cette condition de rencontre d'une manière simple.

Deux *systèmes d'éléments*, constitués chacun par un point et une droite étant donnés, nous dirons qu'ils sont *associés entre eux* lorsque la droite qui relie les points de ces deux systèmes passera par le point de rencontre des

droites de ces mêmes systèmes. De plus, lorsque l'un des deux systèmes associés sera constitué par la droite E et le point O, nous dirons simplement que les *éléments de l'autre sont associés*. Il y a donc lieu, si l'on veut éviter des confusions, de distinguer soigneusement le cas des *systèmes associés entre eux* de celui des *éléments associés*. Par exemple, dans la figure 3, les éléments P et P' sont associés ; en outre, le système P, P' et le système π, π' sont associés entre eux, ainsi que nous le démontrerons dans un instant.

Dans ces conditions, nous pouvons énoncer le théorème suivant qui doit être considéré comme fondamental :

Pour que deux droites de l'espace se rencontrent, il faut et il suffit que la droite de jonction de leurs points représentatifs et le point de rencontre de leurs lignes représentatives soient associés.

19. Quelques remarques essentielles peuvent être faites au sujet de la figure 3.

Le faisceau plan déterminé par (f_1) et (f_2), contient, comme nous l'avons vu, une seule droite singulière dont les lignes représentatives f_σ et f'_σ coïncident et passent l'une et l'autre par les points P et π'. Pour une raison analogue le point représentatif φ'_σ qui coïncide avec φ_σ est située à la fois sur P' et sur π. Comme enfin ces droites coïncidantes et ces points coïncidants sont unis, on en conclut que le système P, P' et le système π, π' sont associés, ce que nous avions déjà annoncé.

20. On sait que, lorsque deux droites se coupent, leurs conjuguées par rapport à un complexe quelconque, et par suite par rapport au complexe directeur, se coupent également. Il est bien simple de vérifier cette propriété à l'aide des considérations qui précèdent.

La droite $O\pi'$ (fig. 3) peut, en effet, être envisagée comme la ligne représentative d'une droite qui, d'une part, est spéciale puisqu'elle passe par O et qui, d'autre part, est la conjuguée, puisqu'elle passe par π', d'une droite de la série réglée considérée jusqu'ici. Elle passe donc par son point représentatif et comme ce point est situé simultanément sur π et sur E, les deux éléments π' et π sont associés. Les deux droites (f_1') et (f_2') se rencontrent donc bien, ainsi que nous voulions l'établir.

21. C'est précisément à l'aide de cette propriété qu'il devient possible de lever l'indécision qui subsiste encore dans le cas où les droites données (f_1) et (f_2) sont toutes deux spéciales.

Appliquée à un pareil cas, la condition de rencontre énoncée précédemment ne donne aucun résultat précis : la ligne de fuite du point de rencontre des droites représentatives est, en effet, indéterminée ainsi, du reste, que le point de fuite de la droite qui relie les points représentatifs. En revanche, les éléments représentatifs des conjuguées étant nécessairement connus, car autrement les droites données seraient mal définies, il sera toujours possible de reconnaître, à l'aide de cette même condition, si ces conjuguées, et par suite les droites données, se rencontrent.

22. Les considérations qui précèdent conduisent encore à une représentation très simple du faisceau plan de l'espace.

Les lignes représentatives f des droites du faisceau déterminé par (f_1) et (f_2) forment elles-mêmes, comme nous l'avons vu, un faisceau de sommet P, tandis que les points φ représentatifs sont situés sur une ponctuelle P' associée à P. De plus, les éléments représentatifs f et φ' sont reliés par une correspondance projective telle que le point de fuite de P' correspond précisément à la ligne de fuite de P.

Réciproquement, il résulte des divers raisonnements qui précèdent que, si l'on établit entre les droites d'un faisceau P du plan Π et les points d'une ponctuelle P', située dans ce même plan et associée à P, une correspondance projective telle que le point de fuite de la ponctuelle corresponde à la ligne de fuite du sommet du faisceau, un faisceau plan se trouve déterminé dans l'espace. Chaque couple d'éléments qui se correspondent dans la correspondance qu'on vient de définir représente, en effet, une droite de ce faisceau et, de plus, toute droite de ce faisceau est représentée par un couple d'éléments correspondants.

Le mode de représentation du faisceau plan qui résulte de là peut être notablement simplifié.

Les conjuguées des droites d'un faisceau plan forment elles-mêmes un faisceau plan ; par suite, les lignes représentatives de ces conjuguées passent par un même point π' et leurs points représentatifs sont situés sur une ponctuelle π associée à π'. En outre, une correspondance analogue à la précédente relie ces éléments représentatifs. D'autre part, le faisceau plan considéré et son conjugué ayant toujours en commun une droite singulière, le système P, P' et le système π', π sont associés entre eux.

Dès lors, si l'on donne π' et π en même temps que P et P', il devient inutile de se préoccuper de la correspondance qui relie les éléments représentatifs des droites du faisceau. L'un de ces éléments, f par exemple, étant donné, il devient, en effet, possible de construire l'autre φ'. Car, d'une part, il est situé sur la droite donnée P' et, d'autre part, sur la droite f' qu'on peut déterminer immédiatement, puisqu'elle passe par π' et par le point d'intersection de f et de E.

Dans ces conditions, nous pouvons représenter un faisceau plan de l'espace à l'aide de deux points, P et π', et de deux droites, P' et π, satisfaisant aux conditions suivantes :

1° P et P' sont associés, ainsi que π et π' ;

2° Les systèmes P, P' et π, π' sont associés entre eux.

Une droite quelconque appartenant à ce faisceau est alors caractérisée comme suit : d'une part, sa ligne représentative passe par P tandis que son point représentatif est situé sur P' ; d'autre part, la ligne représentative de

sa conjuguée passe par π' tandis que le point représentatif de cette conjuguée est situé sur π.

Pour ces diverses raisons, P et P' peuvent être appelés les éléments représentatifs du faisceau, π et π' les éléments représentatifs du faisceau conjugué. Mais, il est alors essentiel de remarquer que les éléments représentatifs du faisceau ne suffisent pas pour définir ce faisceau et qu'il est, au contraire, nécessaire de considérer en même temps ceux de son conjugué.

On peut encore ajouter, et c'est là une conséquence immédiate de la définition même des éléments représentatifs d'une droite, que les points P et π' sont, respectivement, les projections sur le plan Π des sommets du faisceau donné et de son conjugué, alors que π et P' sont, respectivement, les traces, sur ce même plan, des plans de ces faisceaux.

Il convient aussi de noter que le caractère dualistique du mode de représentation adopté apparaît ici d'une manière très nette ; et cela, non seulement dans la nature même des divers éléments qui permettent de définir un faisceau, mais encore dans les relations géométriques qui lient ces éléments.

23. Représentation du point de l'espace. Pour représenter d'une manière simple un point (P), quelconque dans l'espace, considérons l'ensemble des droites issues de ce point. D'une part, leurs lignes représentatives passent toutes par la projection P de (P) sur le plan Π. D'autre part, leurs points représentatifs sont tous situés sur une même droite P', puisque les conjuguées de ces diverses droites sont contenues dans le plan focal de (P) par rapport au complexe directeur. Comme, enfin, par le point (P) passe, en tout cas, une droite spéciale, on verrait, à l'aide d'un raisonnement précédemment appliqué, que les deux éléments P et P' sont associés. A tout point de l'espace on peut donc faire correspondre un système formé d'un point et d'une droite associés.

Réciproquement, à tout système d'un point P et d'une droite P' associés et situés dans le plan Π, on peut faire correspondre un point de l'espace et un seul.

En effet, toutes les droites de l'espace dont les lignes représentatives passent par P et dont les points représentatifs sont situés sur P' se coupent entre elles ; car, appliquée à deux quelconques de ces droites, la condition de rencontre est toujours vérifiée. Ces droites passent donc par un même point (P), à moins qu'elles ne soient situées dans un même plan. Mais, elles ne peuvent être toutes situées dans un même plan, car il est manifestement possible, et cela d'une infinité de manières, de choisir les éléments représentatifs de trois d'entre elles de façon que les points représentatifs de leurs conjuguées, c'est-à-dire leurs traces, forment un triangle.

Dès lors, un point (P) est bien représenté par un point P et une droite P' associés entre eux. Il est de plus évident que P est la projection sur le plan Π de (P) et P' la trace, sur ce même plan, du plan focal de (P) par rapport au complexe directeur.

D'autre part, il résulte de ce qui précède que, lorsqu'une droite passe par (P), son point représentatif est situé sur P' tandis que sa ligne représentative passe par P. Comme, réciproquement, lorsque cette condition est satisfaite, la droite considérée passe par (P), on peut, en convenant d'appeler P et P' les éléments représentatifs de (P), énoncer le théorème suivant :

Pour qu'une droite et un point de l'espace soient unis, il faut et il suffit que leurs éléments représentatifs soient eux-mêmes unis.

24. Représentation du plan de l'espace. Puisque les conjuguées des droites qui sont contenues dans un même plan passent toutes par le foyer de ce plan par rapport au complexe directeur, un plan quelconque de l'espace sera bien défini à l'aide des éléments représentatifs de son foyer.

En conséquence, nous représenterons toujours dans la suite un plan (π) par sa trace π sur le plan Π et par la projection π', sur ce même plan, de son foyer par rapport au complexe directeur. Ces deux éléments π et π', qui seront appelés les éléments représentatifs de (π) sont évidemment associés. Comme enfin, toute droite qui passe par le foyer d'un plan est la conjuguée d'une droite de ce plan, on peut énoncer le théorème suivant :

Pour qu'une droite et un plan de l'espace soient unis, il faut et il suffit que les éléments représentatifs de la conjuguée de cette droite soient respectivement unis aux éléments représentatifs de ce plan.

25. Il convient, avant de poursuivre, d'appeler l'attention sur le fait que les points et les plans de l'espace sont représentés de la même manière. C'est là une conséquence nécessaire de la condition générale à laquelle devait satisfaire ce mode de représentation cherché pour qu'il fut bien approprié à son but, puisque le point et le plan sont des éléments dualistiques dans l'espace. Au reste, ce fait ne peut donner lieu à aucun ambiguité, si l'on a soin, ainsi que nous le ferons toujours dans la suite, de réserver les majuscules latines pour dénoter les points et les minuscules grecques pour les plans.

26. Condition pour qu'un plan et un point soient unis. Lorsqu'un point (P) et un plan sont unis, les droites qui passent par ce point et qui sont, en outre, contenues dans ce plan forment un faisceau. Ce faisceau plan renferme, en tout cas, une droite singulière, et puisque celle-ci coïncide avec sa conjuguée, sa ligne représentative passe simultanément par P et π', et son point représentatif est situé, à la fois, sur P' et π. En conséquence, le système P, P' et le système π, π' sont associés entre eux.

Réciproquement, lorsque cette condition est satisfaite on voit immédiatement qu'il existe une droite singulière qui passe par (P) et qui, en outre, est située dans (π); par suite (P) et (π) sont unis. Donc :

Pour qu'un point et un plan de l'espace soient unis, il faut et il suffit que les deux systèmes constitués par leurs éléments représentatifs soient associés.

On voit d'ailleurs immédiatement que, lorsque cette condition est satisfaite, les éléments représentatifs du point et du plan sont précisément ceux que nous avons précédemment choisis pour définir le faisceau plan correspondant.

27. Les résultats obtenus jusqu'ici permettent évidemment de représenter une figure quelconque de l'espace. Avant de les appliquer à la solution de quelques problèmes choisis dans le seul but de familiariser le lecteur avec le mécanisme du procédé de représentation adopté, une remarque mérite d'être faite.

Elle est relative à la condition de rencontre de deux droites, condition dont l'extrême importance résulte déjà clairement de toutes les conséquences que nous en avons pu déduire. Mais il y a plus encore; il est possible, en effet, de montrer, ce que nous ne pouvons faire ici, que, si l'on convient *a priori* de représenter, sur un plan, une droite de l'espace à l'aide d'une droite et d'un point de ce plan, si l'on veut, de plus, que la condition de rencontre de deux droites soit précisément celle que nous avons obtenue, le mode de représentation se trouve parfaitement défini et coïncide, à un certain degré de généralité près, avec celui qui vient d'être décrit. Cette condition de rencontre est donc bien *caractéristique*, comme nous l'avions annoncé.

28. Problème I. Déterminer la droite qui joint deux points définis à l'aide de leurs éléments représentatifs.

Soient P_1, P_1' et P_2, P_2' (fig. 4) les éléments représentatifs des deux points donnés (P_1) et (P_2). Les éléments représentatifs de la droite cherchée (f) étant respectivement unis à ceux des points donnés, f coïncide avec la droite qui réunit P_1 et P_2, tandis que φ' se trouve au point de rencontre de P'_1 et P'_2. Ayant déterminé, d'après cela, les éléments représentatifs de la droite cherchée, on peut ensuite construire immédiatement ceux f' et φ, qui correspondent à sa conjuguée.

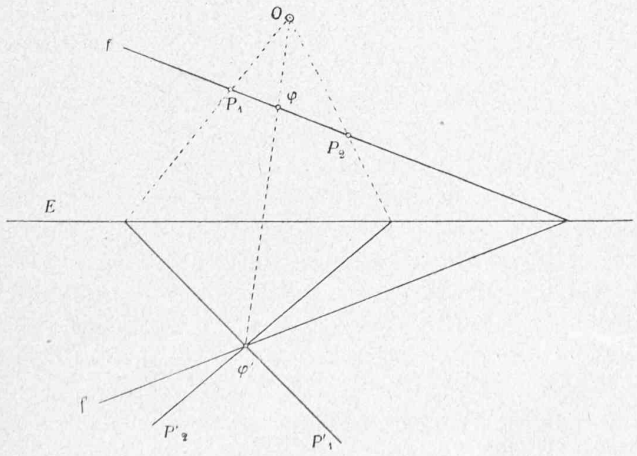

Fig. 4.

Il faut, toutefois, remarquer que les éléments représentatifs de la conjuguée deviennent indéterminés lorsque les points P_1 et P_2 sont alignés sur O. Nous n'examinerons ce cas particulier qu'après avoir décrit le mode de représentation plus spécial qui convient aux applications de la statique graphique.

29. Problème II. Déterminer la droite commune à deux plans donnés par leurs éléments représentatifs.

On voit immédiatement, en appliquant la condition énoncée au paragraphe 24, que la ligne représentative de la conjuguée de la droite cherchée passe par les points représentatifs des deux plans donnés et que le point représentatif de cette même conjuguée coïncide avec le point de rencontre des droites représentatives de ces plans. Connaissant ainsi les éléments représentatifs de la conjuguée, on peut déterminer ensuite ceux qui correspondent à la droite cherchée.

Il y a lieu de remarquer que les solutions des problèmes I et II, s'obtiennent à l'aide de constructions rigoureusement identiques. D'ailleurs, il est maintenant bien évident que cette observation s'applique à tous les problèmes qui, comme ceux qui précèdent, sont corrélatifs l'un de l'autre. Le procédé de représentation qui fait l'objet de ce travail présente donc un avantage très réel et que l'on ne rencontre pas dans l'application des méthodes usuelles de la géométrie descriptive.

30. Problème III. Déterminer le plan qui passe par trois points (P_1), (P_2), (P_3) donnés par leurs éléments représentatifs.

Les conjuguées des droites (f_{12}), (f_{23}), (f_{31}) qui joignent deux à deux les points donnés passent toutes par le foyer du plan cherché (π).

Dès lors, ce plan a pour ligne représentative π la droite qui passe par les trois points représentatifs φ_{12}, φ_{23}, φ_{31} de ces conjuguées, et pour point représentatif π' le point commun aux lignes représentatives f'_{12}, f'_{23}, f'_{31} de ces mêmes conjuguées. On obtiendra donc immédiatement (fig. 5) les deux éléments π et π' qui définissent le plan cherché à l'aide des constructions qui permettent de résoudre le problème I.

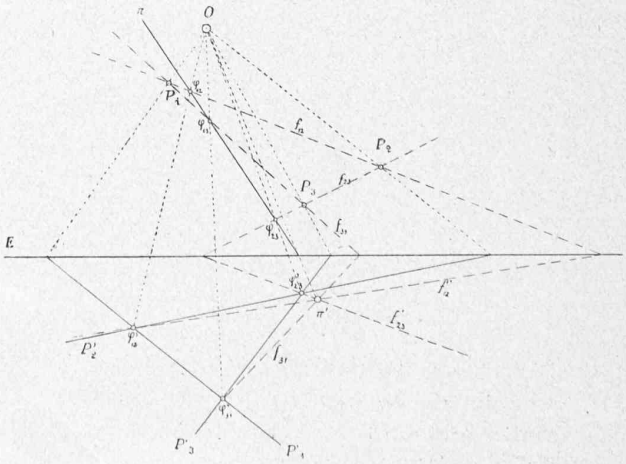

Fig. 5.

Il est bien entendu que le problème corrélatif, qui aurait pour objet de déterminer le point commun à trois

plans donnés, peut se résoudre à l'aide des mêmes constructions. Il n'y a donc pas lieu de s'en occuper ici.

31. La solution du problème qui précède conduit à un théorème de géométrie plane qui doit être signalé, car nous aurons à y revenir.

Les éléments des trois systèmes P_1 P'_1, P_2 P'_2, P_3 P'_3 sont, en effet, associés puisque chacun de ces systèmes représente un point de l'espace. En outre, il résulte immédiatement de ce qui précède que chacun des trois systèmes f_{12} φ'_{12}, f_{23} φ'_{23}, f_{31} φ'_{31} est respectivement associé, d'une part au système $O\pi$, d'autre part au système π' E. Par suite :

Lorsque les sommets d'un triangle correspondent aux côtés d'un autre triangle de manière que chaque système formé d'un couple d'éléments correspondants soit associé à un système constitué par un point O et une droite E, réciproquement, les côtés du premier triangle correspondent aux sommets du second de manière à former trois autres systèmes dont chacun est associé, d'une part au système formé par la droite E et un nouveau point π', d'autre part au système formé par le point O et une nouvelle droite π. De plus, les deux systèmes OE et π π' sont encore associés entre eux.

32. Problème IV. Déterminer le plan qui passe par une droite et par un point donnés.

Soient P et P' (fig. 6) les éléments représentatifs du point donné (P), f et φ' ceux de la droite donnée (f) et, finalement, f' et φ ceux de la conjuguée (f').

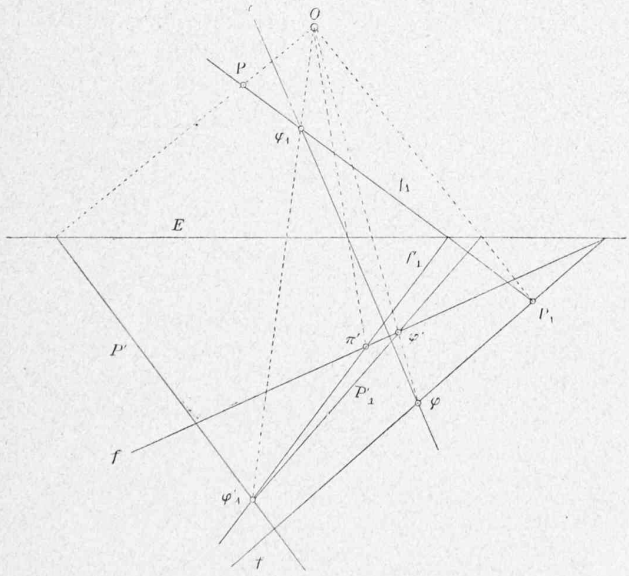

Fig. 6.

Choisissons, sur la droite (f), un point quelconque (P_1). Son point représentatif P_1 (fig. 6) peut être pris d'une manière arbitraire sur f; mais, alors, sa ligne représentative P'_1 est définie puisqu'elle est associée à P_1 et passe, en outre, par φ'.

Si l'on détermine ensuite, à l'aide des constructions qui permettent de résoudre le premier problème traité, les éléments représentatifs f_1 et φ_1' de la droite (f_1) qui réunit (P) et (P_1), puis ceux, f_1' et φ_1, de la conjuguée (f'), on obtient facilement les éléments représentatifs du plan cherché (π). Ce plan contient, en effet, les deux droites (f) et (f_1) qui se coupent en (P_1). Par suite, son point représentatif π' coïncide avec le point de rencontre de f' et de f_1' et sa ligne représentative π avec la droite qui réunit φ et φ_1.

Ajoutons encore qu'une vérification se présente lorsque les constructions sont terminées puisque les deux éléments π et π' doivent être associés.

33. Problème V. Déterminer les points d'intersection d'une droite et d'une quadrique réglée.

Soit (f) la droite donnée dont les éléments représentatifs sont dénotés comme de coutume sur la figure 7.

Supposons, pour n'avoir pas à multiplier outre mesure les constructions, que la quadrique donnée soit définie à l'aide de deux ponctuelles projectives (f_a) et (f_b), et désignons, d'une manière générale, par (B) le point de (f_b) qui correspond à un point quelconque (A) de (f_a). Les génératrices de cette quadrique qui appartiennent à un même système sont alors constituées par les droites qui réunissent deux points correspondants tels que (A) et (B).

Dans ces conditions, il est évident que la quadrique considérée est complètement définie si l'on donne, d'une part, les éléments représentatifs des deux directrices (f_a) et (f_b), et, d'autre part, les points représentatifs B_1, B_2 et B_3 des points de (f_b) qui correspondent respectivement à trois points de (f_a) donnés également pour leurs seuls points représentatifs A_1, A_2 et A_3. Car, en effet, les trois couples A_1 B_1, A_2 B_2, A_3 B_3 définissent complètement la correspondance projective qui lie les éléments représentatifs des points des deux ponctuelles (f_a) et (f_b) de l'espace.

On peut observer, avant de poursuivre, que le cas où la quadrique est définie à l'aide de trois directrices appartenant à un même système de génératrices se ramène immédiatement à celui-ci, puisqu'une génératrice variable de l'autre système détermine, sur ces directrices, des ponctuelles projectives.

Cette remarque faite, considérons une droite mobile qui rencontre constamment (f_a), (f_b) et (f). Elle engendre une deuxième quadrique et, par conséquent, établit une nouvelle correspondance projective entre les points de (f_a) et de (f_b). Désignons, alors, d'une manière générale, par (C) le point de (f_b) qui correspond, de cette façon, au point quelconque (A) de (f_a). Les ponctuelles superposées sur (f_b) et engendrées par (B) et (C) étant manifestement projectives auront deux points unis (P_b) et (Q_b) Par chacun de ces points passe une génératrice commune aux deux quadriques et rencontrant, par suite, la droite (f). Il est alors évident que les points (P) et (Q) où ces génératrices coupent (f) sont précisément les points de rencontre cherchés.

Il est d'ailleurs bien simple d'obtenir les éléments représentatifs de (P) et de (Q).

Si l'on détermine, en effet, en appliquant la construction qui permet de résoudre le problème IV, le plan (π_1) qui passe par (A_1) et (f), puis qu'on cherche à l'aide du tracé corrélatif, le point de rencontre (C_1) de (π_1) et de (f_b), on obtient le point C_1 de f_b qui correspond au point B_1 de cette même ponctuelle. Répétant deux fois de suite les mêmes opérations, en remplaçant successivement le point (A_1) par les points (A_2) et (A_3), on obtient les points C_2 et C_3 qui correspondent respectivement à B_2 et B_3. On connaît ainsi trois couples d'éléments qui se correspondent dans les deux ponctuelles superposées sur f_b et l'on peut, en appliquant un procédé connu, déterminer les points unis P_b et Q_b de ces ponctuelles.

Toutes les opérations qui précèdent sont indiquées sur la figure 7 où il est possible de les suivre sans trop de difficulté. En particulier, le cercle de cette figure et le faisceau de sommet S ont permis de déterminer les points unis P_b et Q_b.

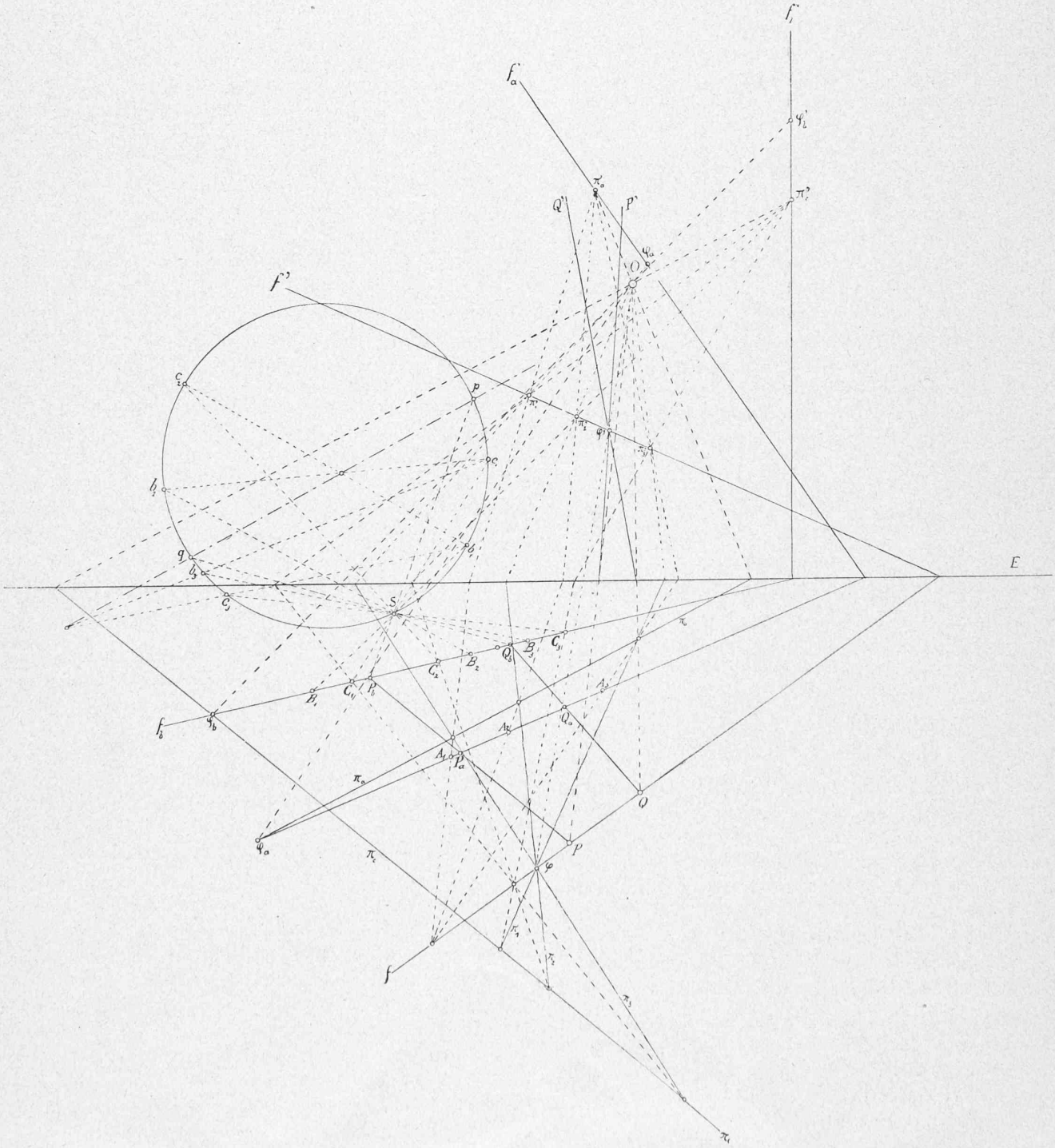

Fig. 7.

Connaissant l'un de ces points, P_b par exemple, on peut ensuite déterminer la ligne représentative de la génératrice de la quadrique donnée qui passe par ce point, en utilisant la correspondance projective qui définit cette quadrique et qui lie les points B de f_b aux points A de f_a. Le tracé relatif à cette détermination n'a pas été conservé sur la figure qui risquait de devenir un peu confuse. Ce tracé est d'ailleurs trop connu pour qu'il y ait lieu d'insister. Le point P où cette génératrice coupe f est alors le point représentatif du point de rencontre cherché (P). La ligne représentative P' de ce même point s'obtient ensuite immédiatement puisqu'elle est associée à P et passe par φ'. On déterminerait enfin de la même manière les éléments représentatifs Q et Q', du deuxième point cherché (Q).

34. Il nous paraît inutile de multiplier davantage ces exercices; les solutions qui précèdent montrent d'une manière suffisamment nette que le mode de représentation proposé ne conduit pas à des opérations plus compliquées que celles qui résultent de l'application des méthodes ordinaires de la géométrie descriptive. D'ailleurs, si l'on suppose, comme nous allons le faire, que la droite désignée par E s'éloigne indéfiniment, toutes ces opérations se simplifient; de plus, il devient possible de résoudre, à l'aide de procédés graphiques simples, tout un ordre de problèmes dont les solutions n'avaient pu, jusqu'ici, être obtenues que grâce à l'emploi de méthodes analytiques.

(*A suivre.*)

Les nouvelles lignes du Chemin de fer Rhétique.

par M. F. REY, ingénieur.

Ancien élève de l'Ecole d'Ingénieurs de Lausanne.
(1867-1870).

Le réseau du Chemin de fer Rhétique, à voie étroite d'un mètre d'écartement, se compose des lignes suivantes:

1° **Landquart-Davos**, d'une longueur de 50 kilomètres, avec rampe maximum de 45 ‰ et rayon minimum de 100 mètres. Pour atteindre son point culminant, soit la station de Wolfgang, à l'altitude de 1633 m., la ligne doit franchir une différence de niveau de 1106 m. pour redescendre ensuite à la station terminale de Davos, à l'altitude de 1543 m. au-dessus de la mer.

Cette ligne a été ouverte à l'exploitation en 1889 jusqu'à Klosters, et l'année suivante jusqu'à Davos-Platz;

2° **Landquart-Thusis**, d'une longueur de 41,180 kilomètres, avec rampe maximum de 25 ‰. Son point culminant est la station de Thusis, à la cote 700m,50. Le tronçon Coire-Thusis a été ouvert le 1er juillet 1896 et celui de Landquart à Coire le 29 août suivant;

3° **Thusis-St-Moritz**, d'une longueur de 61,7 kilomètres, ouverte le 1er juillet 1903 jusqu'à Celerina. Le tronçon restant de Celerina à St-Moritz ne sera achevé que pour l'été 1904.

4° **Reichenau-Ilanz**, d'une longueur de 19,4 kilomètres, ouverte le 1er juin 1903.

Ces deux dernières lignes, qui seront ci-après l'objet d'une description plus détaillée et dont les devis, établis d'après un avant-projet, se montaient ensemble à 26 millions de francs, ont été exécutées sous le régime de la loi cantonale grisonne du 20 juin 1897; aux termes de cette loi, le canton participe à l'établissement sur son territoire de nouvelles lignes de chemins de fer à voie étroite par une prise d'actions pour une valeur de 40 à 50 000 fr. par kilomètre, pouvant être portée à 70 000 fr. pour les tunnels de plus de 3 kilomètres de longueur. Cette subvention n'est accordée qu'après que les communes intéressées et les particuliers ont justifié d'une prise d'actions représentant 25 000 fr. par kilomètre.

La justification financière pour l'établissement de ces nouvelles lignes une fois produite, grâce surtout à la subvention importante de la Confédération, votée par les Chambres fédérales le 20 juin 1898, sous forme d'une prise d'actions de second rang pour une valeur de 8 millions de francs, on se mit immédiatement à l'œuvre, et déjà au mois d'octobre de la même année, on débutait par l'attaque de la galerie du tunnel de l'Albula. Cet ouvrage étant le plus important du nouveau réseau à établir et exigeant 4 ans pour son achèvement, tandis que l'infrastructure du reste de la ligne pouvait se terminer en 2 ans, il était nécessaire de commencer par là.

Les études définitives étaient en même temps poussées activement, de telle sorte que l'adjudication des différents lots de travaux pouvait déjà avoir lieu en été 1900.

I. — Ligne de Thusis à St-Moritz ou de l'Albula.

Longueur 61,7 kilomètres. (fig. 1 et 2).

Tracé et déclivités. — Le tracé se détache de la gare de Thusis, à la cote 700m,50, s'élève en rampe de 25 ‰ en s'infléchissant brusquement sur la gauche, puis franchit le Rhin Postérieur sur un grand viaduc, avec travée centrale métallique de 80 m. d'ouverture; il atteint d'abord la station de Sils (738m,50), pour s'engager après dans les gorges étroites et sauvages du Schyn, aux parois abruptes, coupées de ravins et de couloirs, en suivant la rive gauche de la vallée, à une hauteur moyenne de 80 m. au-dessus du lit de la rivière de l'Albula. Jusqu'à la station de Solis (854 m.) le tracé est des plus accidenté; les tunnels succèdent aux viaducs, et la voie semble parfois comme accrochée aux flancs d'escarpements et suspendue au-dessus de l'abîme. A 500 mètres au delà de la station de Solis, en un point où la gorge présente un rétrécissement, le tracé franchit la vallée sur un viaduc imposant en maçonnerie, avec une arche centrale de 42 m. d'ouverture. Après la traversée de quelques tunnels et viaducs sur la rive droite de la vallée, la ligne atteint la station de Tiefencastel (887 m.), au débouché de la vallée de l'Oberhalbstein.

Entre Thusis et Tiefencastel, les roches rencontrées sont composées essentiellement de schistes dits des Grisons