Zeitschrift: Bulletin technique de la Suisse romande
Band: 29 (1903)
Heft: 21

Artikel: L'arc élastique sans articulation
Autor: Guidi, C.
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-23513

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 17.08.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

29me Année. 10 novembre 1903. N° 21.

Bulletin technique de la Suisse romande

ORGANE EN LANGUE FRANÇAISE DE LA SOCIÉTÉ SUISSE DES INGÉNIEURS ET DES ARCHITECTES. — Paraissant deux fois par mois.

Rédacteur en chef: M. P. HOFFET, professeur à l'Ecole d'Ingénieurs de l'Université de Lausanne.

SOMMAIRE : *L'arc élastique sous articulations* (suite et fin), par M. C. Guidi, professeur, à Turin. — *Les quais de Neuchâtel*, par M. C. Borel, ingénieur de la ville, à Neuchâtel. — **Divers**: Tunnel du Simplon. Etat des travaux au mois d'octobre 1903. — Tunnel du Ricken. — Bibliographie. — Association amicale des anciens élèves de l'Ecole polytechnique de Zurich. Course du groupe vaudois. — Société vaudoise des Ingénieurs et des Architectes. Rapport sur le semestre d'été. Séance du 7 novembre 1903. — Concours. — Association amicale des Anciens élèves de l'Ecole d'Ingénieurs de l'Université de Lausanne. Demandes d'emploi.

L'arc élastique sans articulation

par C. Guidi, professeur.

(Extrait de *Memorie della R. Acc. delle Scienze di Torino*, Seria II, Tom. LII.)

Traduit de l'italien par A. PARIS, ingénieur.

(Suite et fin) [1].

43. — Courbe de pression due à une charge uniformément répartie sur l'arc entier ou sur une seule moitié. Il est d'usage courant dans la pratique de vérifier la stabilité des arches de pont par les deux suppositions d'une charge uniformément répartie, 1° sur tout le pont, 2° sur une seule moitié. Avant de discuter si et comment cette méthode peut remplacer la recherche rigoureuse faite par les lignes d'influence, nous exécuterons les constructions graphiques des deux courbes correspondant à ces suppositions.

44. — Courbe de pression due à une surcharge répartie uniformément sur tout l'arc. La fig. 24 donne cette courbe en pointillé. La construction ne diffère de celle de la courbe du poids propre que par le polygone funiculaire d'essai. La courbe de pression est un arc de parabole suivi de trois droites aux retombées de l'arche, l'arc de courbe correspondant à la charge transmise répartie, et les droites consécutives à l'action des arcs de décharge. Ces différentes charges sont indiquées dans le polygone des forces, qui montre trois segments correspondant à l'action des piles, et un au milieu dû à la charge répartie.

Vu la symétrie, la courbe n'est tracée que pour la moitié gauche de l'arc, et l'intensité p de la surcharge reste, pour le moment, indéterminée.

45. — Courbe de pression pour une surcharge répartie uniformément sur la moitié de l'arc. La fig. 24 donne sa construction. Le polygone d'essai p_0, pour la moitié gauche de l'arc, chargée, se confond avec celui du numéro précédent ; il se réduit, pour l'autre moitié, à une droite horizontale.

Le centre de gravité $\overline{G'}$ et le nouveau segment $\overline{n_1}$ se déterminent par les éléments analogues, relatifs à la surcharge complète. En effet, la poussée $\overline{H}$, due à cette charge partielle, et son moment $\overline{H\eta'_0}$ autour du centre de gravité G de l'arc sont naturellement la moitié des valeurs H et $H\eta'_0$ pour la charge totale :

$$38)\quad H = 2\overline{H}, \qquad H\eta'_0 = 2\overline{H\eta'_0},$$

donc

$$39)\quad \eta'_0 = \overline{\eta'_0}$$

et *les deux courbes de pression se coupent sur l'axe vertical de symétrie de l'arc.* D'autre part, l'équation 17) donne :

$$\frac{H}{H_1} = \frac{n_1}{n}, \qquad \frac{\overline{H}}{H_1} = \frac{\overline{n_1}}{n}$$

et, en remplaçant $\overline{H}$ par sa valeur 38), on trouve :

$$40)\quad \overline{n_1} = \frac{1}{2} n_1,$$

soit, pour l'équation 18 :

$$\frac{\eta'_0}{\eta_{01}} = \frac{n}{n_1}, \qquad \frac{\eta'_0}{\overline{\eta_{01}}} = \frac{n}{\overline{n_1}}$$

et l'on tire pour l'ordonnée $\overline{\eta_{01}}$ de $\overline{G'}$, grâce aux équations 39) et 40)

$$41)\quad \overline{\eta_{01}} = \frac{1}{2}\eta_{01}.$$

Donc, *le centre de gravité élastique G' divise P_0G' en deux parties égales.*

Ces relations intéressantes entre la courbe de pression pour charge totale et symétrique de l'arc, et celle due à la portion de cette charge correspondant à une moitié seule de l'arc, subsistent naturellement quels que soient la nature de la charge et son mode de distribution.

Elles dispensent des constructions graphiques pour la détermination de $\overline{G'}$ et $\overline{n_1}$, mais il reste à fixer, dans l'hypothèse de la charge partielle, la direction de l'axe $\overline{x_1}$, c'est-à-dire le point Y', antipôle d'une verticale arbitraire y'.

Dans ce but, nous traçons le polygone funiculaire p_1', de pôle P_1', relatif aux poids élastiques verticaux agissant aux centres des ellipses. Ce polygone détermine sur y' des segments, proportionnels aux moments statiques des w par rapport à cet axe. Nous les considérons comme poids et les faisons agir suivant des verticales qui sont déterminées comme suit.

Supposons l'élément Δs remplacé par les droites pesantes u et v, résultat de la décomposition en éléments infiniment petits ds. La projection de ces droites sur le côté

[1] Voir N° du 25 octobre 1903, page 269.

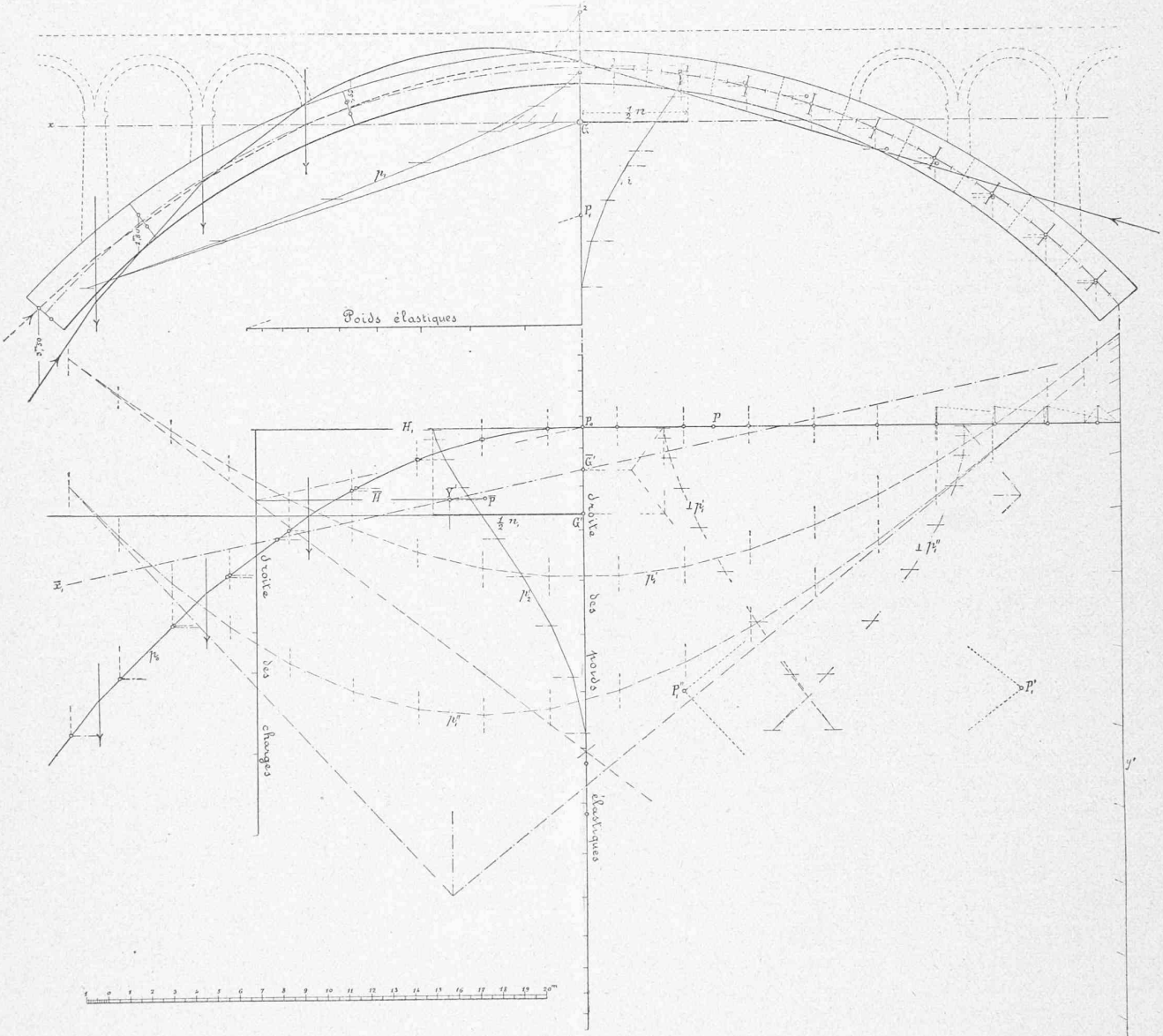

FIG. 24. — PONT ANTOINETTE. — LIGNE MONTAUBAN-CASTRE
Courbes de pressions. — Charge uniforme sur l'arc entier ou une moitié.

horizontal du polygone p_0 donne les segments h et h_1 (fig. 25 et 26). Suivant que, sur h_1, se projettent 2 groupes d'éléments ou aucun, nous aurons pour le carré du rayon d'inertie de ce système, par rapport à la verticale médiane :

$$42) \qquad \rho^2 = \frac{\frac{1}{2}(h^3 \pm h_1^3)}{h \pm h_1} = \frac{h^2 + h_1^2 \mp hh_1}{12}.$$

Les rayons ρ, ainsi déterminés, on trouve, comme d'habitude, les déplacements à donner aux forces proportionnelles aux moments statiques. Ces déplacements, la figure 24 le montre, ne sont sensibles que pour les quatre premiers éléments Δs à partir de la culée droite.

Les nouvelles forces sont reliées par le polygone funiculaire p''_1 avec le pôle P''_1.

Nous faisons maintenant tourner ces dernières forces de 90° autour de leurs points d'action et les relions par un polygone funiculaire, $\perp p''_1$, normal aux côtés correspondants du polygone P''_1. Le point Y' se trouve ainsi déterminé, et, avec lui, l'axe $\overline{x}_1$.

Menons maintenant par P_0, pôle du polygone d'essai, une parallèle à $\overline{x}_1$, et, par son intersection avec la ligne des charges, une horizontale sur laquelle nous portons $\overline{H} = \frac{1}{2} H$, nous obtenons ainsi le pôle du polygone définitif des pressions. La courbe des pressions passe par le point déjà déterminé à la clef ; si l'on veut, on peut calculer une autre ordonnée quelconque par

$$\overline{\eta}' = \overline{\eta}_1 \frac{n}{\overline{n}_1} = \overline{\eta}_1 \frac{2n}{n_1}.$$

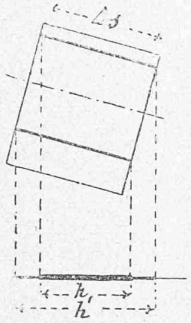

Fig. 25.

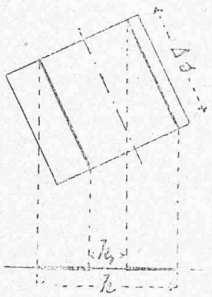

Fig. 26.

46. — Substitution du train par une surcharge uniformément répartie. Les lignes d'influence données par la fig. 21 montrent que, pour la section des naissances, le remplacement du train type par une surcharge, uniformément répartie sur la demi-travée et convenablement choisie, peut donner une exactitude suffisante. Celle-ci diminue quand la section considérée se rapproche de la clef.

Pour vérifier cette dernière section, si l'arc est symétrique, on doit le charger symétriquement, mais plus ou moins loin vers les culées suivant sa forme.

Il est intéressant de déterminer quelle charge uniforme étendue à tout l'arc *(hypothèse 1ª)* ou à la moitié seulement *(hypothèse 2ª)* pourrait, dans notre cas, remplacer les conditions les plus défavorables données par les lignes d'influence.

Pour cette recherche, on peut utiliser soit les courbes d'influence, soit les lignes de pression déterminées ci-dessous pour les deux cas considérés.

a) Naissances. Hypothèse 2ª. — La ligne d'influence I en traits pleins (fig. 21) nous donne, si p est la surcharge :

$$-M_m = 49\ p^{mt}.$$

La comparaison avec min. M_m de la tabelle IV donne :

$$p = \frac{340}{49} = 6{,}9 \text{ t/m. c.}$$

De la courbe de pression correspondante (fig. 24), nous tirons :

$$-M_m = H\ .\ h_m = H\ .\ 3{,}5 \text{ m.}$$

qui, égalé au min. M_m produit par le train, donne :

$$H = \frac{340}{3{,}5} = 97 \text{ t.}$$

Cette valeur de H détermine l'échelle des forces dans la figure 24, et à cette échelle nous retrouvons pour p la même valeur.

b) Section II. Hypothèse 2ª. — La ligne d'influence en traits pleins N° II (fig. 21) nous donne :

$$-M_m = 25{,}4\ p^{mt}.$$

Cette valeur, égalée au minimum fourni par la tabelle IV, donne :

$$p = \frac{172}{25{,}4} = 6{,}8 \text{ t/m.}$$

et nous tirons de la courbe de pression trouvée dans le cas 2ª (fig. 24) :

$$-M_m = Hh_m = H \times 1{,}80 \text{ m.}$$

soit, en l'égalant à M_m

$$H = \frac{172}{1{,}80} = 96 \text{ t.}$$

qui, avec la valeur trouvée pour p, correspond bien au dessin de la figure 24.

c) Section III. Hypothèse 2ª. — Dans ce cas, la ligne d'influence en trait-point N° III (fig. 21) nous donne :

$$M_n = 21{,}6\ p^{mt},$$

qui, égalée au max. M_n fourni par la tabelle IV, donne :

$$p = \frac{150}{21{,}6} = 6{,}9 \text{ t/m.}$$

On déduit de la courbe de pression relative au cas 2ª (fig. 24) :

$$M_n = Hh_n = H\ .\ 1{,}55 \text{ m.}$$

ce qui donne pour H :

$$H = \frac{150}{1{,}55} = 97 \text{ t.}$$

correspondant effectivement à notre valeur de p dans la figure 24.

d) Clef. Hypothèse 1ª. — La ligne d'influence en trait-point N° IV (fig. 21) donne :

$$M_n = 13\ p^{mt}.$$

La tabelle IV, elle, nous donne max. $M_n = 125^{mt}$, ce qui fait :

$$p = \frac{125}{13} = 9{,}6 \text{ t/m.}$$

On déduit de la courbe des pressions due au cas de charge 1ª (fig. 24) :

$$M_n = Hh_n = H \times 0{,}47 \text{ m.}$$

En l'égalant à la valeur trouvée, nous avons :

$$H = \frac{125}{0{,}47} = 266 \text{ t.}$$

qui correspond aussi dans la figure 24 à notre valeur de p.

Avec le cas de charge 2ª, p serait naturellement deux fois plus fort.

47. — Ces résultats confirment les déductions faites de la forme des lignes d'influence. On peut en conclure que la charge, uniformément répartie sur la moitié de l'arc, peut être considérée comme sollicitation la plus défavorable pour les naissances et les reins de l'arc, *mais à la condition d'augmenter du 15 % environ les valeurs prises pour les poutres droites.* Pour la clef, c'est la charge complète qu'il faut envisager, mais *augmentée d'intensité du 60 % environ,* ou bien alors une charge double sur une seule moitié de l'arc, ce qui revient à multiplier les résultats, obtenus pour la charge des poutres droites, par le coefficient $2\,(1 + 0{,}60) = 3{,}20$.

Quoique ces résultats ne puissent être généralisés, ils pourront toutefois fournir un utile critère, surtout quand

le poids propre de la construction est grand en regard de la charge accidentelle.

S'il s'agissait d'une construction légère, il faudrait faire le calcul exact par les lignes d'influence, ou du moins utiliser la ligne d'intersection et les enveloppes pour trouver les positions défavorables de la charge pour les sections à examiner.

48. — **Ligne d'influence des flexions à la clef.** Pour la section à la clef, x_c est nul. De plus, les w ayant été calculés pour $E = 1$, l'équation 32) du N° 21 devient :

$$\Delta f = \frac{H}{E} \Sigma w x \eta ,$$

où la somme s'étend à la moitié de l'arc.

Plaçons notre charge unitaire dans les cinq positions suivantes sur le demi-arc droit :

a) sur la verticale médiane
b) à 6,12 m. de celle-ci
c) à 12,05 » »
d) à 17,51 » »
e) à 22,41 » »

pour lesquelles la figure 20 donne les lignes d'action des réactions de l'appui gauche.

Le dessin donne les valeurs x et η pour ces diverses positions, η se mesurant sous les antipôles de l'axe y.

Une charge concentrée de 1 t. donne à la clef pour les cinq positions choisies les flèches suivantes (voir tabelle V) :

a) $\Delta f = -\frac{1,100}{250} \frac{155,5}{100} = -$ cm. 0,0068

b) $\Delta f = -\frac{0,947}{250} \frac{104,9}{100} = -$ cm. 0,0040

c) $\Delta f = +\frac{0,587}{250} \frac{18,7}{100} = +$ cm. 0,0004

d) $\Delta f = +\frac{0,223}{250} \frac{126,3}{100} = +$ cm. 0,0011

e) $\Delta f = +\frac{0,025}{250} \frac{164,6}{100} = +$ cm. 0,0002.

49. — Comme contrôle, Δf a encore été calculé pour le cas *a)* par la méthode indiquée au N° 21, c'est-à-dire au moyen des polygones funiculaires de la figure 20 et par la formule

$$\Delta f = \frac{1}{E} [(-1 \xi \eta^*_{0_0} - 1 \eta^*_{1_0} \lambda_3 + 1 \eta_{0_\xi} \eta_{0_0} + \eta_{1_\xi} \eta_{1_0} \lambda_3) . \Sigma w + \eta_{2_\xi} \eta_{2_0} \lambda_2 n]$$

où l'on fait :

$\lambda_3 = 1010$ cm.
$\lambda_2 = 800$ cm.
$\Sigma w = 0,000\,123\,1066$ (centimètre = unité linéaire)
$n = \frac{2 \times 8,205}{2 \times 1\,000\,000} = 0,000\,008205$
$E = 250$ t/cm2

et, en outre :

$\eta_{0_0} = 517,8$ cm.
$\eta_{1_0} = 750$ »
$\eta_{2_0} = 1650$ »

ce qui donne :

$$39) \quad \Delta f = \frac{1}{250} [(-1 \xi \eta^*_{0_0} - 1 \eta^*_{1_0} 1010 + 1 \eta^0_\xi 517,8 + \eta_{1_\xi} 750 \times 1010) 0,000\,1231066 + \eta_{2_\xi} 1650 \times 800 \times 0,000008205].$$

De plus, pour la verticale à la clef, nous avons :

$$\xi = 0, \quad \eta^*_{1_0} = \eta_{1_0} = 750, \quad \eta_{0_\xi} = \eta_{0_0} = 517,8, \quad \eta_{1_\xi} = 0,50, \quad \eta_{2_\xi} = 1,1,$$

qui donnent à l'équation 39) la valeur

$$\Delta f = -0,0068 \text{ cm.}$$

50. — Ces valeurs de Δf ont permis de tracer dans la fig. 21 la ligne d'influence pour les flexions à la clef, ligne qui a servi à déterminer la flèche produite par le train type de deux machines accouplées de front et placées symétriquement par rapport à la verticale moyenne. Dans la supposition que l'anneau de voûte considéré supporte 1/4 de la charge totale, cette flèche serait de 1,4 mm.

Tabelle V.

Numéros d'ordre.	w	x m.	wx	*a)* η m.	*a)* $wx\eta$	*b)* η m.	*b)* $wx\eta$	*c)* η m.	*c)* $wx\eta$	*d)* η m.	*d)* $wx\eta$	*e)* η m.	*e)* $wx\eta$
1	10,4270	1,52	15,8	+ 1,34	+ 21,2	− 0,35	− 5,5	− 1,13	− 17,9	− 1,51	− 23,9	− 1,61	− 25,4
2	9,9825	4,60	45,9	+ 0,39	+ 17,9	− 0,93	− 42,7	− 1,51	− 69,3	− 1,79	− 82,2	− 1,82	− 83,5
3	9,1455	7,63	69,8	− 0,38	− 26,5	− 1,29	− 90,0	− 1,62	− 113,1	− 1,77	− 123,5	− 1,80	− 125,6
4	8,0583	10,60	85,4	− 0,88	− 75,2	− 1,35	− 115,3	− 1,48	− 126,4	− 1,48	− 126,4	1,48	− 126,4
5	6,9782	13,48	94,1	− 1,03	− 96,9	− 1,12	− 105,4	− 1,05	− 98,8	− 0,90	− 84,7	− 0,87	− 81,9
6	5,7547	16,21	93,3	− 0,90	− 84,0	− 0,60	− 56,0	− 0,29	− 27,1	− 0,09	− 8,4	0	0
7	4,6265	18,80	87,0	− 0,42	− 36,5	+ 0,20	+ 17,4	+ 0,73	+ 63,5	+ 1,05	+ 91,3	+ 1,20	+ 104,4
8	3,6839	21,24	78,2	+ 0,34	+ 26,6	+ 1,35	+ 105,6	+ 2,05	+ 160,3	+ 2,53	+ 197,8	+ 2,65	+ 207,2
9	2,8967	23,49	68,0	+ 1,44	+ 97,9	+ 2,75	+ 187,0	+ 3,64	+ 247,5	+ 4,21	+ 286,3	+ 4,35	+ 295,8
					$\Sigma = -155,5$		− 104,9		+ 18,7		+ 126,3		+ 164,6
Valeurs de H correspondant aux 5 positions de la charge.					$H = 1,100$		0,947		0,587		0,223		0,025