Zeitschrift: Bulletin de la Société vaudoise des ingénieurs et des architectes

Band: 15 (1889)

Heft: 2

Artikel: Résistance des colonnes, des poteaux et autres pièces comprimées en fer ou en bois

Autor: Vautier, Alphonse

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-15034

15e ANNÉE MARS 1889 N° 2

BULLETIN

DE LA SOCIÉTÉ VAUDOISE

DES INGÉNIEURS ET DES ARCHITECTES

PARAISSANT 8 FOIS PAR AN

Sommaire : Résistance des colonnes, des poteaux et autres pièces comprimées en fer ou en bois, par Alphonse Vautier, ingénieur. — Adjudication des travaux. (Suite.) — Ouverture de la ligne de Gozzano à Domodossola.

RÉSISTANCE DES COLONNES,
DES POTEAUX ET AUTRES PIÈCES COMPRIMÉES EN FER OU EN BOIS,

par ALPHONSE VAUTIER, ingénieur.

On détermine facilement la charge que peut supporter sans écrasement une pièce dont la longueur est faible relativement à ses dimensions transversales, car cette charge ne dépend que de la surface de la section de la pièce et d'un coefficient expérimental.

Lorsque la pièce est longue, cette détermination est beaucoup moins précise; le poteau fléchit puis rompt sous une charge bien inférieure à celle qui écraserait une pièce courte de même section et de même nature.

Ce fléchissement ne peut être évité qu'en donnant à la pièce une rigidité suffisante; c'est dire que le moment d'inertie de la section normale de la pièce ainsi que la longueur de celle-ci ont leur part d'influence sur sa résistance.

Le *flambage*, ainsi qu'on désigne parfois ce mode de rupture, dépend aussi de la manière dont les extrémités de la pièce sont maintenues ainsi que du degré d'homogénéité de la matière. Les nœuds des pièces de bois paraissent influer notablement sur leur résistance, ainsi que le degré de siccité.

Le mode de résistance que nous étudions ici suppose que les pièces sont rigoureusement droites avant le chargement.

Plusieurs expérimentateurs, parmi lesquels nous nommerons Rondelet, Hodgkinson et Bauschinger, ont cherché à déterminer la loi du flambage sans qu'on ait pu aboutir jusqu'ici à une formule générale. L'objet de la présente note est de faire connaître à nos lecteurs les remarquables expériences faites par M. le professeur Tetmajer au moyen de l'appareil d'essais installé à Zurich.

Le détail de ces expériences est consigné dans la *Schweizerische Bauzeitung*, vol. X et XI (Zur Theorie der Knickungsfestigkeit).

Nous nous bornerons à en donner ici les résultats, puis à faciliter l'emploi des formules en dressant des tableaux pour les cas les plus usuels.

M. Tetmajer a soumis au contrôle de l'expérience les deux formules les plus employées en pays de langue allemande, en comprimant des barres de fer rondes et des pièces de bois rectangulaires de diverses essences et a utilisé quelques expériences de Bauschinger sur les fers à profils spéciaux.

Les matériaux essayés avaient les caractères suivants :

MATÉRIAUX EXPÉRIMENTÉS	Coefficient d'élasticité E par cm²	Coefficient de rupture par écrasement R par cm²
	k.	k.
Fer corroyé (Schweisseisen)	1 956 000	2350
Fer fondu (Flusseisen)	2 175 000	2650
Mélèze et pin en moyenne	105 600	318
Sapin rouge et sapin blanc	—	285

La fonte n'a pas été expérimentée.

1° **La formule d'Euler,** établie par intégration de l'équation différentielle de la ligne élastique a la forme suivante :

$$R_1 = \frac{\alpha E}{n} \frac{I}{Sl^2} = \frac{\alpha E}{n} \left(\frac{K}{l}\right)^2$$

R_1 = pression moyenne qu'on peut admettre par unité de surface de la section transversale de la pièce.

La charge totale supportée par une pièce dont la section est S sera donc $P = R_1 S$.

I = plus petit moment d'inertie de la section.

K = plus petit rayon de gyration de la section; on a $K^2 S = I$.

l = longueur de la pièce.

E = coefficient d'élasticité.

α = coefficient dépendant de la manière dont les extrémités de la pièce sont maintenues.

n = coefficient de sécurité. $n = 1$ lorsque R_1 produit la rupture.

En comprimant les barres entre deux pointes, de manière à ce qu'elles ne fussent aucunement gênées dans leur infléchissement, M. Tetmajer a constaté que la formule de Euler s'accordait bien avec les résultats de l'expérience lorsqu'il s'agit du fer; elle concorde moins bien pour le bois, surtout dans le voisinage de la limite d'élasticité, et donne des résultats tout à fait faux au delà de cette limite.

Voici les formules numériques pour le cas de rupture :

Pour le fer corroyé $R_1 = 19305700 \left(\frac{K}{l}\right)^2$

Pour le fer fondu $R_1 = 21287300 \left(\frac{K}{l}\right)^2$

Pour le mélèze ou le pin $R_1 = 1042300 \left(\frac{K}{l}\right)^2$

Pour le sapin blanc ou rouge la valeur de E n'a pas été constatée.

R_1 est exprimé en kilogrammes par centimètre carré.

Le rapport $\frac{K}{l}$ est indépendant de l'unité choisie pour mesurer les dimensions de la pièce.

M. Tetmajer attribue donc à α la valeur de 9,87 dans la première formule et de 9,78 dans les deux dernières ; c'est à très peu près la valeur de π^2 que M. Culmann a proposée et qui est reproduite dans la plupart des aide-mémoire d'origine allemande.

Ces mêmes aide-mémoire remplacent la lettre α par $4\pi^2$ lorsque la pièce est encastrée à ses deux extrémités.

M. Tetmajer a constaté pour le bois, et il en serait probablement de même pour le fer, que la distance des points d'inflexion d'une pièce encastrée à ses deux extrémités est de 0,513 l. En introduisant cette valeur à la place de l dans la formule d'Euler on aurait :

$$R_1 = 3{,}8 \frac{E\,I}{n\,S\,l^2}$$

Pour que l'encastrement soit réel il faut que les extrémités de la pièce soient maintenues d'une manière absolument solide dans leur direction primitive. Ce cas est rarement réalisé dans la pratique. Lorsque les pièces sont terminées par des faces planes d'une certaine étendue, il en résulte un encastrement plus ou moins complet, ce qui explique une partie au moins des divergences que présentent les résultats de Rondelet et de Hodgkinson avec ceux de Tetmajer. Les premiers ont opéré avec des pièces à bases plates.

Pour de faibles valeurs de $\frac{K}{l}$ la formule d'Euler donne des pressions plus fortes que celle qui produit l'écrasement d'une pièce très courte. Il est évident qu'elle n'est plus applicable et qu'il faut calculer la pièce pour l'écrasement seul.

2° **La formule dite de Rankine** serait, selon M. Tetmajer, due à Gordon ou à Schwartz, de Stuttgart (1854), elle s'écrit ainsi :

$$R_1 = \frac{1}{n} \frac{R}{1 + \eta \left(\frac{l}{K}\right)^2}$$

R_1 = charge moyenne admissible par unité de surface de la section transversale de la pièce.

R = charge par unité de surface qui produit l'écrasement d'un prisme très court de la même matière que la pièce.

η = coefficient expérimental.

l = longueur de la pièce.

K = plus petit rayon de gyration de la section transversale de la pièce.

n = coefficient de sécurité.

Nous avons donné ci-dessus les valeurs de R pour les divers matériaux essayés par M. Tetmajer. Le coefficient η avait été considéré comme constant, mais M. Tetmajer a constaté qu'il était loin d'en être ainsi, et il a obtenu un accord très satisfaisant entre les résultats de l'expérience et ceux de la formule en attribuant à η les valeurs suivantes :

Pour le fer corroyé et le fer fondu

$$\eta = \frac{1}{10000} \sqrt{0{,}00867 \frac{l}{K} - 0{,}6936}$$

Pour les bois

$$= \frac{1}{10000} \sqrt{0{,}05 \frac{l}{K} - 0{,}80}$$

Ce fait important donne un caractère tout nouveau à cette formule et nous la désignerons par le nom de son auteur.

La valeur de η relative à la fonte n'a pas été déterminée jusqu'ici et il est à désirer que cette lacune soit comblée.

Le coefficient de sécurité n doit être évalué par le constructeur en tenant compte du caractère définitif ou provisoire de l'ouvrage, comme aussi de la mobilité ou fixité de la charge et de la confiance qu'il peut avoir dans la qualité des matériaux employés. Pour le fer il pourra varier de 2,5 à 6, pour le bois de 6 à 10.

Dans le cas où la pièce est solidement et invariablement encastrée à ses deux extrémités dans des ouvrages fixes, on peut remplacer l par 0,513 l, ou mieux par 0,60 l. Ces longueurs réduites représentent la distance des points d'inflexion de la ligne élastique.

Les expériences faites sur des bois sans nœud et sur des bois noueux ont démontré que la présence de nœuds diminue la résistance.

Lorsqu'on fait $\frac{l}{K} = 80$ dans la valeur de η relative au fer on a $\eta = 0$. Il en est de même pour $\frac{l}{K} = 16$ dans la formule relative au bois. Cela signifie que pour ces rapports et pour des rapports plus petits $R_1 = R$ c'est-à-dire que la rupture se fait sans flambage ce qui a été contrôlé par l'expérience.

La formule Tetmajer étant assez longue à calculer, j'ai dressé les tableaux suivants des valeurs de $m = 1 + \eta \left(\frac{l}{K}\right)^2$ pour diverses valeurs de $\frac{l}{K}$.

Pour calculer la charge P que peut supporter sûrement une colonne il suffira de calculer le rapport $\frac{l}{K}$ et de prendre la valeur de m correspondante dans le tableau, puis de faire le produit

$$P = \frac{R\,S}{m\,n}$$

Pour l'usage courant j'ai calculé la colonne N° 5 en faisant $\frac{R}{n} = 600$ kg. par centimètre carré pour le fer et 40 kg. par centimètre carré pour le bois.

La charge pratique sera donc donnée en multipliant le coefficient indiqué dans cette colonne par la surface de la section de la pièce mesurée en cm^2.

Les sections les plus habituelles, en pratique, sont les sections rectangulaire et circulaire pour lesquelles j'ai préparé les colonnes N° 2 et N° 3.

Pour la section rectangulaire $\frac{l}{K} = 3{,}46 \frac{l}{b}$ en désignant par b le plus petit côté du rectangle.

Pour la section circulaire $\frac{l}{K} = 4 \frac{l}{d}$

d désigne le diamètre.

Pour l'hexagone régulier $\frac{l}{K} = 4{,}39 \frac{l}{d}$

d désigne le diamètre du cercle circonscrit.

Pour l'octogone régulier $\frac{l}{K} = 4.22 \frac{l}{d}$

Pour les cornières à branches égales de longueur c et d'épaisseur usuelle on a très approximativement :

$$\frac{l}{K} = 5{,}16\,\frac{l}{c}.$$

Pour les autres sections on devra calculer le plus petit moment d'inertie et on le divisera par la surface de la section.

Pour un double T symétrique l'axe de ce plus petit moment d'inertie se confond avec l'axe de l'âme.

Tableau pour le mélèze, le pin et le sapin.

(1) Section quelconque $\frac{l}{K}$	(2) Section rectangulaire $\frac{l}{b}$	(3) Section circulaire $\frac{l}{d}$	(4) $1+\eta\left(\frac{l}{K}\right)^2$ m	(5) R, par centimètre carré
				k.
16	4.62	4	1	40
20	5.77	5	1.018	39.2
25	7.21	6.25	1.042	38.4
30	8.66	7.50	1.075	37.2
35	10.10	8.75	1.119	35.8
40	11.54	10	1.175	34
45	12.98	11.25	1.244	32.1
50	14.43	12.50	1.326	30.2
55	15.87	13.75	1.422	28.1
60	17.31	15	1.534	26.1
65	18.76	16.25	1.661	24.1
70	20.20	17.50	1.805	22.1
75	21.64	18.75	1.966	20.3
80	23.09	20	2.145	18.6
85	24.53	21.25	2.342	17.1
90	25.97	22.50	2.558	15.7
95	27.41	23.75	2.737	14.6
100	28.86	25	3.049	13.1
105	30.30	26.25	3.326	12
110	31.74	27.50	3.613	11
115	33.19	28.75	3.942	10
120	34.63	30	4.283	9.4
125	36.07	31.25	4.641	8.6
130	37.52	32.50	5.034	7.9
135	38.96	33.75	5.439	7.4
140	40.40	35	5.880	6.8
145	41.84	36.25	6.334	6.3
150	43.29	37.50	6.823	5.9
155	44.73	38.75	7.326	5.4
160	46.17	40	7.868	5.1
165	47.62	41.25	8.426	4.8
170	49.07	42.50	9.020	4.4
175	50.50	43.75	9.629	4.2
180	51.96	45	10.279	3.9
185 [1]	53.40	46.25	10.942	3.7
190	54.84	47.50	11.650	3.4
195	56.29	48.75	12.370	3.2
200	57.73	50	13.132	3
205	59.17	51.25	14.017	2.9
210	60.61	52.50	14.733	2.7
215	62.06	53.75	15.578	2.6

[1] Les expériences de M. Tetmayer ont porté sur des barres de fer pour lesquelles le rapport $\frac{l}{K}$ n'a pas dépassé 250. Pour les poteaux en bois ce rapport n'a pas dépassé 185. Au delà de ces valeur les résultats de la formule ne présentent par les mêmes garanties.

Tableau pour le fer corroyé ou fondu.

(1) Section quelconque $\frac{l}{K}$	(2) Section rectangulaire $\frac{l}{b}$	(3) Section circulaire $\frac{l}{d}$	(4) $1+\eta\left(\frac{l}{K}\right)^2$ m	(5) R, par centimètre carré
				k.
80	23.09	20	1	600
82	23.67	20.50	1.088	551
84	24.25	21	1.131	531
86	24.82	21.50	1.169	513
88	25.40	22	1.204	498
90	25.98	22.50	1.238	484
92	26.56	23	1.273	471
94	27.14	23.50	1.308	459
96	27.71	24	1.343	450
98	28.29	24.50	1.379	435
100	28.87	25	1.416	424
105	30.31	26.25	1.513	396
110	31.75	27.50	1.617	371
115	33.20	28.75	1.728	347
120	34.64	30	1.848	324
125	36.08	31 25	1.965	305
130	37.52	32.50	2.113	284
135	38.97	33.75	2.259	266
140	40.41	35	2.414	249
145	41.86	36.25	2.578	233
150	43.30	37.50	2.751	218
155	44.74	38.75	2.937	204
160	46.18	40	3.132	191
165	47.63	41.25	3.337	180
170	49.07	42.50	3.553	169
175	50.51	43.75	3.779	159
180	51.96	45	4.017	149
185	53.40	46.25	4.265	141
190	54.84	47.50	4.525	132
195	56.29	48.75	4.797	125
200	57.73	50	5.080	118
205	59.17	51.25	5 375	112
210	60.61	52.50	5.682	106
215	62.06	53.75	6.001	100
220	63.50	55	6.332	95
225	64.94	56.25	6.676	90
230	66.39	57.50	7.033	85
235	67.83	58.75	7.402	81
240	69.27	60	7.784	77
245	70.72	61.25	8.179	73
250 [1]	72.16	62.50	8.588	70
260	75.06	65	9.296	64
270	77.95	67.50	10.356	59
280	80.83	70	11 324	53
290	83.72	72.50	12.348	49
300	86.61	75	13.430	45
310	89.49	77.50	14.262	41
320	92.38	80	15.771	38
330	95.27	82.50	17.032	35
340	98.16	85	18.356	33
350	101 04	87.50	19.742	30
360	103.93	90	21.193	28
370	106.81	92.50	22.700	26
380	109.70	95	24.290	24
390	112.59	97.50	25.904	23
400	115.47	100	27.618	21

Quelques exemples compléteront ces indications.

1° Quelle charge pourrait supporter une colonne en fer corroyé de 5 m. de hauteur et de 0m10 de diamètre.

Le rapport $\frac{l}{d} = 50$ nombre que nous trouvons à la troisième colonne, la cinquième donne $R_1 = 118$ kg. La section de la colonne étant de 79 cm² la charge totale sera $P = 118 \times 79 = 9322$ kg.

2° Si l'on voulait employer le fer fondu avec $n = 4$ on aurait $R_1 = \frac{2650}{5{,}08 \times 4} = 130$ kg. par cm² soit en tout 10270 kg.

3° Dans le cas où la colonne serait encastrée à ses deux extrémités on la calculerait comme si sa longueur était de $5 \times 0.60, = 3$ m., on aurait ainsi $\frac{l}{d} = 30$.

4° Quelle charge pourrait supporter une cornière de 100mm/100/10, longue de 3 m.

On a $\frac{l}{K} = \frac{5{,}16 \times 3}{0{,}10} = 155$. La cinquième colonne donne $R_1 = 204$ kg. par cm². La surface de la section étant de 19 cm² $P = 3876$ kg.

5° Une barre de fer plat longue de 52 mm. et de 10 mm. d'épaisseur doit supporter une compression de 2000 kg.

La charge de rupture est de 2320 kg. par cm² et l'on admet une coefficient de sécurité de $n = 3$.

On demande de calculer la largeur de cette barre.

Les données ci-dessus fournissent la valeur de $\frac{l}{b} = 52$ et le tableau donne $m = 4{,}02$.

La charge admissible par centimètre carré sera donc de $\frac{2310}{3 \times 4{,}02} = 191$ kg. de sorte que la largeur de la barre sera de $\frac{2000}{191} = 104$ mm.

En examinant les tableaux ci-dessus on remarque que le dénominateur m augmente rapidement avec le rapport $\frac{l}{K}$, c'est dire qu'il faut choisir pour les pièces comprimées des formes de sections qui ont un grand rayon de gyration par rapport à leur poids par mètre courant. C'est le cas des croix, des colonnes circulaires creuses, des fer en U et à T à larges ailes et des cornières.

Comparaison avec d'autres formules.

Il y a intérêt à comparer entre eux les résultats fournis par diverses formules usuelles, et j'ai calculé le coefficient de travail R_1 en admettant pour le fer 600 kg. par cm² et 40 kg. pour le bois.

Pour le fer nous comparerons les résultats des formules de Lowe, de Euler et de Tetmajer relatives aux fers ronds.

La formule de Lowe basée sur les expériences de Hodgkinson est

$$R_1 = \frac{R}{n\,(1.55 + 0{,}0005)\left(\frac{l}{d}\right)^2}.$$

$\frac{l}{d}$	Charges admissibles par cm² d'après les formules de		
	TETMAJER	EULER	LOWE
	k.	k.	k.
20	600	600	343
25	424	500	323
30	324	347	300
40	191	195	245
50	118	125	215
60	77	86	180

Les deux premières formules s'accordent assez bien ; quant à la troisième, elle est basée sur des expériences peu nombreuses faites sur des barres dont les extrémités étaient plates ce qui peut avoir une certaine influence.

Pour le bois, nous comparerons les formules de Tetmajer avec celle établie par Emy sur les expériences de Rondelet et avec celle de Hodgkinson. Celle d'Emy est

$$R_1 = \frac{1}{n}\,\frac{R}{0{,}93 + 0{,}00185\left(\frac{l}{b}\right)^2}.$$

Celle d'Hodgkinson est donnée sous la forme $P = 2565\,\frac{b^4}{l^2}$. Ce coefficient numérique est relatif à du chêne de Dantzig dont le coefficient de rupture = 543, et l est mesuré en décimètres tandis que b est en centimètres. J'en infère que la formule générale serait $R_1 = 472{,}3\,\frac{R}{n}\left(\frac{b}{l}\right)^2$ et en faisant $\frac{R}{n} = 40$ j'obtiens les nombres ci-dessous.

$\frac{l}{b}$	Charges admissibles par cm² d'après les formules de		
	TETMAJER	EMY	HODGKINSON
	k.	k.	k.
10.10	35.8	36	40
20.20	22.1	23.7	40
30.30	12	15.3	19
40.40	6.8	10.1	11
50.50	4.2	7.1	7

Il est à remarquer que les expériences de Hodgkinson se sont bornées à des pièces pour lesquelles $\frac{l}{b}$ variait de 35 à 45 de sorte que la formule n'a pas été vérifiée au delà de ces limites.

Les expériences de M. le professeur Tetmajer ont été exécutées au moyen de puissantes machines d'essais et ont porté sur les essences de bois employées dans les constructions de notre pays ; elles présentent donc toutes les garanties qu'on peut demander à des recherches de ce genre.

Ses essais sur le fer fondu comblent une lacune importante et contribueront sans doute à étendre l'emploi de ce métal.

Il est à désirer que la fonte et en particulier les colonnes creuses soient soumises à de nouveaux essais.

Janvier 1889.