Des maxima et minima de la distance de deux points appartenant respectivement à deux courbes ou surfaces données

Autor(en): **Odin, A.-A.**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **Bulletin de la Société Vaudoise des Sciences Naturelles**

Band (Jahr): **23 (1887-1888)**

Heft 96

PDF erstellt am: **19.09.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-261389

DES MAXIMA & MINIMA

de la distance de deux points appartenant respectivement à deux courbes ou surfaces données,

par **A.-A. ODIN.**

Pl. V.

La question que nous nous proposons de traiter est du domaine de la géométrie infinitésimale; nous pouvons la préciser comme suit :

Rechercher quelles sont les conditions qui doivent être remplies pour que la distance de deux points appartenant respectivement à deux courbes ou surfaces données, soit un maximum ou minimum.

Nous ne traiterons pas cette question dans toute sa généralité, car cela nous entraînerait trop loin ; nous nous bornerons à considérer le cas où les deux points considérés sont constamment des points réguliers des courbes ou surfaces auxquelles ils appartiennent; nous laisserons aussi de côté tous les cas particuliers ou spéciaux qui pourraient se présenter. Notre but final est de donner une interprétation géométrique des résultats généraux auxquels nous serons arrivés.

L'étude à faire se divise tout naturellement en trois parties s'occupant des distances maximales et minimales:

1° De deux courbes;
2° D'une courbe et d'une surface;
3° De deux surfaces.

I.

Soient deux courbes C_1 C_2, A_1 un point régulier quelconque de C_1, et A_2 un point régulier quelconque de C_2. Nous avons à rechercher les conditions qui doivent être remplies pour que la distance A_1 A_2 soit un maximum ou minimum.

Nous rapporterons les courbes C_1 et C_2 à un système cartésien rectangulaire $Oxyz$; posons pour les coordonnées de A_1, A_2 :

$$A_1\ (x_1\, y_1\, z_1); \qquad A_2\ (x_2\, y_2\, z_2).$$

Le carré de la distance de ces deux points est :

$$(1) \qquad 2\,V = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2.$$

C'est de cette expression que nous avons à rechercher les maxima et minima, car du moment où nous regardons une distance comme une quantité essentiellement positive, si elle est un maximum ou minimum, il en sera de même pour son carré et réciproquement. Nous supposerons $x_1\, y_1\, z_1$ exprimés en fonction de la longueur s_1 de l'arc de la courbe C_1 mesurée à partir d'un point quelconque jusqu'en A_1 et $x_2\, y_2\, z_2$ en fonction de s_2 arc de la courbe C_2. s_1 et s_2 étant pris pour variables indépendantes, nous avons :

$$dV = \frac{\partial V}{\partial s_1}\, ds_1 + \frac{\partial V}{\partial s_2}\, ds_2$$

et la première condition nécessaire pour qu'il y ait maximum ou minimum est exprimée par les équations :

$$(2) \quad \begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial s_1} &= (x_1 - x_2)\frac{dx_1}{ds_1} + (y_1 - y_2)\frac{dy_1}{ds_1} + (z_1 - z_2)\frac{dz_1}{ds_1} = 0 \\ -\frac{\partial V}{\partial s_2} &= (x_1 - x_2)\frac{dx_2}{ds_2} + (y_1 - y_2)\frac{dy_2}{ds_2} + (z_1 - z_2)\frac{dz_2}{ds_2} = 0 \end{aligned}$$

lesquelles nous montrent que la droite $A_1\, A_2$ doit couper normalement chacune des deux courbes. De plus :

$$d^2 V = \frac{\partial^2 V}{\partial s_1^{\,2}}\, ds_1^{\,2} + 2\,\frac{\partial^2 V}{\partial s_1\, \partial s_2}\, ds_1\, ds_2 + \frac{d^2 V}{\partial s_2^{\,2}}\, ds_2^{\,2}$$

doit avoir toujours le même signe quels que soient ds_1 et ds_2 ; il faut pour cela que :

$$(3) \qquad \frac{\partial^2 V}{\partial s_1^{\,2}}\ \frac{\partial^2 V}{\partial s_2^{\,2}} - \left(\frac{\partial^2 V}{\partial s_1\, \partial s_2}\right)^2 \geqq 0$$

Cette condition est suffisante toutes les fois qu'elle est exprimée par le signe $>$. Le peu d'étendue que nous devons donner à ce mémoire nous oblige à laisser de côté le cas fort intéressant où il y a égalité.

Par de simples différentiations de l'équation (2) et en observant que :

$$\left(\frac{dx_1}{ds_1}\right)^2 + \left(\frac{dy_1}{ds_1}\right)^2 + \left(\frac{dz_1}{ds_1}\right)^2 = 1$$

$$\left(\frac{dx_2}{ds_2}\right)^2 + \left(\frac{dy_2}{ds_2}\right)^2 + \left(\frac{dz_2}{ds_2}\right)^2 = 1$$

l'on a :

$$\frac{\partial^2 V}{\partial s_1^{\,2}} = (x_1 - x_2)\frac{d^2 x_1}{ds_1^{\,2}} + (y_1 - y_2)\frac{d^2 y_1}{ds_1^{\,2}} + (z_1 - z_2)\frac{d^2 z_1}{ds_1^{\,2}} + 1$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial s_2^{\,2}} = -(y_1 - x_2)\frac{d^2 x_2}{ds_2^{\,2}} - (y_1 - y_2)\frac{d^2 y_2}{ds_2^{\,2}} - (z_1 - z_2)\frac{d^2 z_2}{ds_2^{\,2}} + 1$$

$$-\frac{\partial^2 V}{\partial s_1 \partial s_2} = \frac{dx_1}{ds_1}\frac{dx_2}{ds_2} + \frac{dy_1}{ds_1}\frac{dy_2}{ds_2} + \frac{dz_1}{ds_1}\frac{dz_2}{ds_2}$$

Nous voyons tout d'abord qu'en appelant A l'un des angles que forment entre elles les directions des éléments ds_1 et ds_2, la dernière de ces équations devient :

$$-\frac{\partial^2 V}{\partial s_1 \partial s_2} = \cos A$$

Soient ρ_1, ρ_2 les rayons de courbure de C_1, C_2 aux points A_1, A_2, D la distance $A_1 A_2$ prise positivement, α, β, γ les angles de $A_1 A_2$ avec les directions positives des axes; soient de même α_1 β_1 γ_1 α_2 β_2 γ_2 les angles des éléments ds_1, ds_2 pris chacun dans son sens positif, avec les directions positives des axes et ξ_1 η_1 ζ_1, ξ_2 η_2 ζ_2 les angles de ρ_1 et ρ_2 (pris à partir de A_1 et A_2) avec les mêmes directions. Nous rappellerons les formules connues :

$$\frac{d^2 x_1}{ds_1^{\,2}} = \frac{\cos \xi_1}{\rho_1} \qquad \frac{d^2 y_1}{ds_1^{\,2}} = \frac{\cos \eta_1}{\rho_1} \qquad \frac{d^2 z_1}{ds_1^{\,2}} = \frac{\cos \zeta_1}{\rho_1}$$

$$\frac{d^2 x_2}{ds_2^{\,2}} = \frac{\cos \xi_2}{\rho_2} \qquad \frac{d^2 y_2}{ds_2^{\,2}} = \frac{\cos \eta_2}{\rho_2} \qquad \frac{d^2 z_2}{ds_2^{\,2}} = \frac{\cos \zeta_2}{\rho_2}$$

$$x_2 - x_1 = D\cos\alpha \qquad y_2 - y_1 = D\cos\beta \qquad z_2 - z_1 = D\cos\gamma$$

Ces formules nous donnent :

$$\frac{\partial^2 V}{\partial s_1^2} = -\frac{D}{\rho_1}(\cos\alpha\cos\xi_1 + \cos\beta\cos\eta_1 + \cos\gamma\cos\zeta_1) + 1$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial s_2^2} = \frac{D}{\rho_2}(\cos\alpha\cos\xi_2 + \cos\beta\cos\eta_2 + \cos\gamma\cos\zeta_2) + 1$$

En appelant B_1 B_2 les angles $(A_1 A_2, \rho_1)$, $(A_2 A_1, \rho_2)$, ces équations deviennent :

$$\frac{\partial^2 V}{\partial s_1^2} = -\frac{D}{\rho_1}\cos B_1 + 1$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial s_2^2} = \frac{D}{\rho_2}\cos(\pi - B_2) + 1 = -\frac{D}{\rho_2}\cos B_2 + 1$$

En substituant ces valeurs dans l'inégalité (3), celle-ci prend la forme :

$$(4) \qquad \left(1 - \frac{D}{\rho_1}\cos B_1\right)\left(1 - \frac{D}{\rho_2}\cos B_2\right) - \cos^2 A \geqq 0$$

Faisons passer un plan par A_1 A_2 et ds_1 et projetons C_1 sur ce plan ; nous obtenons une nouvelle courbe C_1' dont le rayon de courbure est :

$$R_1 = \frac{\rho_1}{\cos B_1}$$

Nous définirions de même :

$$R_2 = \frac{\rho_2}{\cos B_2}$$

R_1 et R_2 sont des rayons de courbure qui doivent être mesurés sur la droite A_1 A_2 ; ils sont positifs s'ils ont les directions respectives A_1 A_2 et A_2 A_1, négatifs dans le cas contraire.

Par l'introduction de ces nouveaux rayons de courbure, l'inégalité (4) devient :

$$(5) \qquad \left(1 - \frac{D}{R_1}\right)\left(1 - \frac{D}{R_2}\right) - \cos^2 A \geqq 0$$

Soient O_1 et O_2 les centres de courbure correspondant aux rayons R_1 et R_2. On voit aisément que O_1 et O_2 ne sont autre chose que les points d'intersection de la droite $A_1 A_2$ avec les axes de courbure de C_1 et de C_2. La figure 1 nous montre que :

$$\left(1-\frac{D}{R_1}\right)\left(1-\frac{D}{R_2}\right)=\frac{R_1-D}{R_1}\cdot\frac{R_2-D}{R_2}=$$

$$=\frac{D-R_1}{R_1}\cdot\frac{D-R_2}{R_2}=$$

$$=\frac{O_1 A_2}{A_1 O_1}\cdot\frac{O_2 A_1}{A_2 O_2}=$$

$$=\frac{O_1 A_2}{O_2 A_2}:\frac{O_1 A_1}{O_2 A_1}$$

$$\left(1-\frac{D}{R_1}\right)\left(1-\frac{D}{R_2}\right)=(O_1\, O_2\, A_2\, A_1)$$

La condition (5) devient donc :

$$(O_1\, O_2\, A_2\, A_1)-\cos^2 A \geqq 0 \tag{6}$$

Nous voyons que le rapport anharmonique $(O_1\, O_2\, A_2\, A_1)$ doit nécessairement être positif, ce qui ne peut avoir lieu, ainsi que le montre la discussion générale des rapports anharmoniques, que si l'on peut aller de A_1 en A_2 sur la droite $A_1 A_2$ en passant par les deux centres O_1 O_2. Cette condition est même suffisante si $\cos^2 A = 0$, c'est-à-dire si les courbes C_1 C_2 ont en A_1 A_2 des tangentes perpendiculaires entre elles.

Nous avons maintenant à distinguer les cas où il y a maximum de ceux où il y a minimum. Il y aura maximum si $\frac{\partial^2 V}{\partial s_1^2}$ et $\frac{\partial^2 V}{\partial s_2^2}$ sont négatives, c'est-à-dire si $1-\frac{D}{R_1}$ et $1-\frac{D}{R_2}$ sont négatifs, ou, autrement dit, si, en allant de A_1 en A_2 par O_1 et O_2 on ne passe pas par le point infini de la droite; il y a minimum dans le cas contraire.

II.

Après avoir recherché les conditions qui doivent être remplies pour que la distance de deux points appartenant respectivement à deux courbes données, soit un maximum ou un minimum, il convient de s'occuper de la question analogue qui se présente lorsqu'il n'y a plus en présence deux courbes, mais une courbe et une surface.

Soient une courbe C_1 et une surface S_2; soient A_1 un point régulier de C_1 et A_2 un point régulier de S_2. Nous allons rechercher dans quels cas la longueur

$$A_1 A_2 = D$$

est un $\left\{\begin{matrix}\text{maximum}\\ \text{minimum}\end{matrix}\right\}$ de la distance de C_1 à S_2. Pour que cela ait lieu, il faut et il suffit que D soit la distance $\left\{\begin{matrix}\text{maximale}\\ \text{minimale}\end{matrix}\right\}$ de C_1 à toutes les sections normales de S_2 passant par A_2. Nous sommes donc ramenés au premier cas et nous voyons que la première condition qui doit être remplie est que $A_1 A_2$ coupe normalement C_1 et S_2.

Soient R_1 le rayon de courbure de la projection de C_1 sur le plan passant par $A_2 A_1$ et la tangente en A_1 à C_1, $R_2' R_2''$ les rayons de courbure principaux de S_2 en A_2, A l'un des angles de la section principale C_2' (correspondante à R_2') avec la tangente de C_1 en A_1, C_2 une section normale quelconque de S_2 formant avec C_2' un angle φ, et enfin R_2 le rayon de courbure correspondant à cette section. Pour que D soit un maximum ou minimum de la distance de C_1 à C_2, il faut, d'après l'équation (5), que :

$$\left(1 - \frac{D}{R_1}\right)\left(1 - \frac{D}{R_2}\right) - \cos^2(A+\varphi) \geqq 0$$

Cette condition est suffisante tant qu'elle est exprimée par le signe $>$. Pour qu'il y ait maximum ou minimum de la distance de C_1 à la surface entière S_2, il faut que cette inégalité soit satisfaite pour toutes les valeurs de φ. Nous devons donc chercher à la remplacer par une autre inégalité qui lui soit équivalente, mais qui ne contienne plus que des quantités déterminées. Pour y arriver, remarquons d'abord que, d'après le théorème d'Euler, exprimé par la formule :

$$\frac{1}{R_2} = \frac{\cos^2\varphi}{R_2'} + \frac{\sin^2\varphi}{R_2''}$$

notre inégalité devient :

$$\left(1 - \frac{D}{R_1}\right)\left[1 - D\frac{\cos^2\varphi}{R_2'} - D\frac{\sin^2\varphi}{R_2''}\right] - \cos^2(A+\varphi) \geqq 0$$

Si nous posons :

$$1 - \frac{D}{R_1} = r_1 \qquad 1 - \frac{D}{R_2'} = r_2' \qquad 1 - \frac{D}{D_2''} = r_2''$$

$$\operatorname{tg} A = a \qquad \operatorname{tg} \varphi = u$$

la condition du maximum ou minimum prend la forme :

$$r_1 \left[r_2' \cos^2 \varphi + r_2'' \sin^2 \varphi\right] - \cos^2 (A + \varphi) \geqq 0$$

ou

$$r_1 \left[r_2' \frac{1}{1+u^2} + r_2'' \frac{u^2}{1+u^2}\right] - \frac{(1-au)^2}{(1+a^2)(1+u^2)} \geqq 0$$

$1 + u^2$ étant toujours positif et n'étant jamais nul, nous pouvons toujours écrire plus simplement :

$$r_1 (r_2' + r_2'' u^2) - \frac{(1-au)^2}{1+a^2} \geqq 0$$

ou encore

$$(7) \quad \left(r_1 r_2'' - \frac{a^2}{1+a^2}\right) u^2 + 2 \frac{a}{1+a^2} u + \left(r_1 r_2' - \frac{1}{1+a^2}\right) \geqq 0$$

Cette inégalité devant subsister pour toutes les valeurs réelles de φ, et par conséquent pour toutes les valeurs réelles de u (même pour $u = \infty$), on doit avoir simultanément :

$$(8) \quad \left(r_1 r_2'' - \frac{a^2}{1+a^2}\right)\left(r_1 r_2' - \frac{1}{1+a^2}\right) - \frac{a^2}{(1+a^2)^2} \geqq 0$$

$$E'' = r_1 r_2'' - \frac{a^2}{1+a^2} \geqq 0 \qquad E' = r_1 r_2' - \frac{1}{1+a^2} \geqq 0$$

Ces dernières relations nous montrent que $r_1\ r_2'\ r_2''$ doivent être tous les trois de même signe ; nous allons montrer que cela suffit pour qu'elles soient satisfaites, supposé que la condition (8) soit remplie. En effet, d'après (8), E′ et E″ doivent être de même signe ; ils ne peuvent pas être négatifs, car $r_1\, r_2''$ et $r_1\, r_2'$ étant positifs, les valeurs absolues de E′ et E″ seraient nécessairement inférieures à $\frac{1}{1+a^2}$ et $\frac{a^2}{1+a^2}$ et, par conséquent, le produit

$E' E''$ serait plus petit que $\frac{a^2}{1+a^2}$, ce qui est impossible à cause de l'inégalité (8). Si nous admettons donc que $r_1\, r_2'\, r_2''$ soient de même signe et que la condition (8) soit exprimée par une inégalité, il nous suffit de considérer cette dernière seule. Elle se laisse transformer comme suit :

$$r_1^2\, r_2'\, r_2'' - \frac{r_1\, r_2''}{1+a^2} - \frac{a^2\, r_1\, r_2'}{1+a^2} \geqq 0$$

$$r_1 \left[r_2' (r_1\, r_2'' - 1) - \frac{r_2'' - r_2'}{1+a^2} \right] \geqq 0 \tag{9}$$

Comme nous avons le choix entre les notations r_2' et r_2'', nous pouvons en disposer de manière à ce que

$$r_1\, (r_2'' - r_2') \geqq 0$$

ce qui nous permet de diviser l'inégalité (9) par $r_1\, (r_2'' - r_2')$; elle prend la forme :

$$\frac{r_2' (r_1\, r_2'' - 1)}{r_2'' - r_2'} - \frac{1}{1+a^2} \geqq 0$$

ou

$$\frac{r_2' (r_1\, r_2'' - 1)}{r_2'' - r_2'} - \cos^2 A \geqq 0 \tag{10}$$

Elle n'est pas valable si $r_2' = r_2''$, c'est-à-dire si A_2 est un ombilic de S_2. Nous exclurons ce cas particulier et chercherons à interpréter géométriquement cette inégalité pour le cas général.

Appelons $O_1\, O_2'\, O_2''$ les centres de courbure se rapportant à $R_1\, R_2'\, R_2''$ qui sont des longueurs mesurées sur $A_1\, A_2$. On a (fig. 2) :

$$\frac{r_2' (r_1\, r_2'' - 1)}{r_2'' - r_2'} = (1 - r_1\, r_2'') : \left(\frac{r_2' - r_2''}{r_2'}\right) =$$

$$= \left[1 - \left(1 - \frac{D}{R_1}\right)\left(1 - \frac{D}{R_2''}\right)\right] : \frac{\left(1 - \frac{D}{R_2'}\right) - \left(1 - \frac{D}{R_2''}\right)}{1 - \frac{D}{R_2'}} =$$

$$= \left(\frac{D}{R_1} + \frac{D}{R_2''} - \frac{D_2}{R_1\,R_2''}\right) : \frac{\dfrac{D}{R_2''} - \dfrac{D}{R_2'}}{\dfrac{R_2' - D}{R_2'}} =$$

$$= \frac{D - R_1 - R_2''}{-\,R_1} : \frac{R_2' - R_2''}{R_2' - D} =$$

$$= \frac{O_1\,O_2''}{O_1\,A_1} : \frac{O_2'\,O_2''}{O_2'\,A_1}$$

$$\frac{r_2'(r_1 r_2'' - 1)}{r_2'' - r_2'} = (O_1\,O_2'\,O_2''\,A_1)$$

En substituant cette valeur dans (10), il vient :

$$(11) \qquad (O_1\,O_2'\,O_2''\,A_1) - \cos^2 A \geqq 0$$

N'oublions pas que, pour qu'il y ait maximum ou minimum, il faut en outre que $r_1\,r_2'\,r_2''$ aient le même signe ; ces expressions sont les mêmes que

$$\frac{R_1 - D}{R_1} \qquad \frac{R_2' - D}{R_2'} \qquad \frac{R_2'' - D}{R_2''}$$

Considérons la première d'entre elles :

$$\frac{R_1 - D}{R_1} = \frac{A_2\,O_1}{A_1\,O_1}$$

Elle est négative si O_1 se trouve entre A_1 et A_2 et positive dans le cas contraire. Il en est de même pour les deux autres expressions et les deux autres centres. Donc, pour que $r_1\,r_2'\,r_2''$ aient le même signe, il faut et il suffit que l'on puisse aller de A_1 en A_2 en passant par les trois centres $O_1\,O_2'\,O_2''$.

Nous avons dit que O_2' et O_2'' doivent être choisis de manière à ce que :

$$r_1\,(r_2'' - r_2') \geqq 0$$

ou

$$\left(1 - \frac{D}{R_1}\right)\left(\frac{D}{R_2'} - \frac{D}{R_2''}\right) \geqq 0$$

Il est facile de voir d'après ce qui précède que cette inégalité a lieu si, en allant de A_1 en A_2 par les centres, on rencontre O_2' avant O_2''.

Toutes ces conditions réunies sont suffisantes pour qu'il y ait maximum ou minimum en temps que l'inégalité (11) n'est pas réduite à une égalité et que A_2 n'est pas un ombilic de S_2. Pour distinguer le maximum du minimum, il suffit de considérer la courbe C_1 et une section normale quelconque de S_2, par exemple C_2'. On arrive facilement à la conclusion qu'il y a maximum si, en allant de A_1 en A_2 par les centres, on ne passe pas par le point à l'infini de la droite, et minimum dans le cas contraire.

III.

La troisième et dernière partie de notre mémoire se rapporte tout naturellement aux questions relatives aux maxima et minima de la distance de deux surfaces. Nous ramènerons ce troisième cas au second, comme nous avons déjà ramené le second au premier.

Soient deux surfaces S_1 et S_2, A_1 un point régulier quelconque de S_1, A_2 un point régulier quelconque de S_2. Pour que $A_1 A_2$ regardé comme distance de S_1 à S_2 soit un $\left\{\begin{matrix}\text{maximum}\\ \text{minimum}\end{matrix}\right\}$ il faut et il suffit que $A_1 A_2$ soit un $\left\{\begin{matrix}\text{maximum}\\ \text{minimum}\end{matrix}\right\}$ de la distance de S_2 à une section normale quelconque de S_1 en A_1. Ceci nous montre en premier lieu que la droite $A_1 A_2$ doit couper normalement les deux surfaces et que l'on doit pouvoir aller de A_1 en A_2 en passant par les centres de courbures des sections normales principales de S_1 en A_1 et de S_2 en A_2. A ces deux conditions nécessaires vient se joindre une condition nécessaire aussi, mais en général suffisante, que nous allons nous proposer d'établir.

Soient $\left\{\begin{matrix}R_1' \; R_1''\\ R_2' \; R_2''\end{matrix}\right\}$ les rayons de courbure des sections principales $\left\{\begin{matrix}C_1' \; C_1''\\ C_2' \; C_2''\end{matrix}\right\}$ de $\left\{\begin{matrix}S_1\\ S_2\end{matrix}\right\}$ et posons comme précédemment :

$$1-\frac{D}{D_1'}=r_1' \qquad\qquad 1-\frac{D}{R_1''}=r_1''$$

$$1-\frac{D}{R_2'}=r_2' \qquad\qquad 1-\frac{D}{R_2''}=r_2''$$

A ces rayons de courbure correspondent des centres de courbure O_1' O_1'' O_2' O_2''; les accents des lettres O sont choisis de telle manière que

$$A_1\, O_2'\, O_2''\, A_2$$

$$A_1\, O_1''\, O_1'\, A_2$$

forment des suites de points.

Comme l'on doit pouvoir aller de A_1 en A_2 en passant par tous les centres, il s'ensuit (comparez avec II) que tous les r doivent être de même signe, et le choix des accents indique que, r désignant l'une quelconque des quatre quantités r_1' r_1'' r_2' r_2'', l'on doit avoir

$$r\,(r_1''-r_1') \geqq 0$$

$$r\,(r_2''-r_2') \geqq 0$$

Pour arriver à l'inégalité de condition que nous recherchons, nous supposerons que A_2 n'est pas un ombilic de S_2. Soit A l'un des angles de la tangente en A_2 à $\left\{\begin{matrix} C_2' \\ C_2'' \end{matrix}\right\}$ avec la tangente en A_1 à $\left\{\begin{matrix} C_1' \\ C_1'' \end{matrix}\right\}$. Soit C_1 une section normale de S_1 en A_1, dont la tangente fasse avec la tangente de C_1' un angle ψ; le sens positif de l'angle ψ compté à partir de C_1' doit être le même que le sens positif de A compté à partir de C_2', de sorte que C_2' fait avec C_1 un angle $\psi = A + \psi$. Soit R_1 le rayon de courbure de C_1 en A_1 et posons, comme pour les autres rayons de courbure :

$$r_1 = 1 - \frac{D}{R_1}$$

La seconde partie de notre étude nous enseigne que, les conditions préliminaires établies jusqu'ici étant remplies, pour que $A_1\, A_2$ regardé comme distance de C_1 à S_2 soit un maximum ou minimum, il faut que (équation 10) :

$$(12) \qquad \frac{r_2'\,(r_1\, r_2''-1)}{r_2''-r_2'} - \cos^2(A+\psi) \geqq 0$$

Cette condition est suffisante si elle est exprimée par une inégalité. Nous avons déjà vu que lorsqu'il s'agit de deux surfaces, elle doit être satisfaite pour toutes les sections normales C_1 de

S_1, par conséquent pour toutes les valeurs de ψ. Comme le théorème d'Euler nous donne la relation

$$r_1 = r_1' \cos^2 \psi + r_1'' \sin^2 \psi$$

nous devons avoir

$$\frac{r_2'[r_2''(r_1' \cos^2 \psi + r_1'' \sin^2 \psi) - 1]}{r_2'' - r_2'} - \cos^2 (A + \psi) \geqq 0$$

et cela pour toutes les valeurs de ψ. Si nous posons comme précédemment :

$$\operatorname{tg} \psi = v \qquad \operatorname{tg} A = a$$

l'inégalité ci-dessus deviendra :

$$(13) \qquad \frac{r_2'\left[r_2'' \dfrac{r_1' + r_1'' v^2}{1 + v^2} - 1\right]}{r_2'' - r_2'} - \frac{(1 - av)^2}{(1 + a^2)(1 + v^2)} \geqq 0$$

En multipliant le premier membre de cette inégalité par $1 + v^2$ et en l'ordonnant suivant les puissances décroissantes de v, nous avons :

$$(14) \qquad \left[\frac{r_2'(r_1'' r_2'' - 1)}{r_2'' - r_2'} - \frac{a^2}{1 + a^2}\right] v^2 +$$

$$+ 2 \frac{a}{1 + a^2} v + \left[\frac{r_2'(r_1' r_2'' - 1)}{r_2'' - r_2'} - \frac{1}{1 + a^2}\right] \geqq 0$$

Pour que ce polynome soit positif, quel que soit v, il faut que l'on ait :

$$(15) \qquad \begin{aligned} F_1'' &= \frac{r_2'(r_1'' r_2'' - 1)}{r_2'' - r_2'} - \frac{a^2}{1 + a^2} \geqq 0 \\ F_1' &= \frac{r_2'(r_1' r_2'' - 1)}{r_2' - r_2'} - \frac{1}{1 + a^2} \geqq 0 \end{aligned}$$

$$(16) \qquad \left[\frac{r_2'(r_1'' r_2'' - 1)}{r_2'' - r_2'} - \frac{a_2}{1 + a^2}\right]\left[\frac{r_2'(r_1' r_2'' - 1)}{r_2'' - r_2'} - \frac{1}{1 + a^2}\right] -$$

$$- \frac{a^2}{(1 + a^2)^2} \geqq 0$$

Par un raisonnement identique à celui que nous avons donné dans le § 2, on montre que, la condition (16) étant satisfaite, pour que les inégalités (15) le soient aussi, il suffit en général que

$$(17)\qquad \begin{aligned} &\frac{r_2'\,(r_1''\,r_2''-1)}{r_2''-r_2'} \geqq 0 \\ &\frac{r_2'\,(r_1'\,r_2''-1)}{r_2''-r_2'} \geqq 0 \end{aligned}$$

Les premiers membres de ces deux inégalités ont exactement la même forme que celui de l'inégalité (10); ils se laissent donc transformer exactement de la même manière et fournissent les inégalités suivantes :

$$(17)\qquad \begin{aligned} &(O_1''\,O_2'\,O_2''\,A_1) \geqq 0 \\ &(O_1'\,O_2'\,O_2''\,A_1) \geqq 0 \end{aligned}$$

Elles expriment que l'on doit pouvoir aller de O_2'' en A_1 en passant par les centres $O_1''\,O_1'\,O_2'$ (que l'on peut rencontrer dans un ordre quelconque); or, nous savons déjà qu'en faisant ce trajet et en allant de A_2 en A_1, on doit passer par tous les centres; nous voyons donc que le premier centre que l'on rencontre doit être O_2'', centre qui se rapporte au point de départ A_2. On trouverait de même qu'en allant de A_1 en A_2 par les centres, le premier point que l'on rencontre doit se rapporter à A_1, ce qui signifie qu'il doit être O_1'' puisque O_1'' doit se rencontrer avant O_1'. Comme nous l'avons déjà annoncé, nous laissons de côté les différents cas qui peuvent se présenter lorsque deux ou plusieurs des six points en présence se confondent.

Nous avons à interpréter l'inégalité (16); en effectuant les calculs, elle devient :

$$\frac{r_2'^2\,(r_1'\,r_2''-1)\,(r_1''\,r_2''-1)}{(r_2''-r_2')^2} - \frac{a^2}{1+a^2}\,\frac{r_2'\,(r_2'\,r_2''-1)}{r_2''-r_2'} - \frac{1}{1+a^2}\,\frac{r_2'\,(r_1''\,r_2''-1)}{r_2''-r_2'} \geqq 0$$

$$\frac{r_2'^2\,(r_1'\,r_2''-1)\,(r_1''\,r_2''-1)}{(r_2''-r_2')^2} - \frac{r_2'\,(r_1'\,r_2''-1)}{r_2''-r_2'} - \frac{1}{1+a^2}\left[\frac{r_2'\,(r_1''\,r_2''-1)}{r_2''-r_2'} - \frac{r_2'\,(r_1'\,r_2''-1)}{r_2''-r_2'}\right] \geqq 0$$

$$\frac{r_2' (r_1' r_2'' - 1) [r_2' (r_1'' r_2'' - 1) - (r_2'' - r_2')]}{(r_2'' - r_2')^2} -$$
$$- \frac{1}{1+a^2} \frac{r_2' r_2'' (r_1'' - r_1')}{r_2'' - r_2'} \geqq 0$$

$r_2', r_2'', r_1'' - r_1', r_2'' - r_2'$, ont par hypothèse tous le même signe; nous pouvons donc diviser notre inégalité par

$$\frac{r_2' r_2'' (r_1'' - r_1')}{r_2'' - r_2'}$$

et elle devient:

$$(18) \qquad \frac{(r_1' r_2'' - 1)(r_1'' r_2' - 1)}{(r_1'' - r_1')(r_2'' - r_2')} - \frac{1}{1+a^2} \geqq 0$$

Nous savons d'abord que

$$\frac{1}{1+a^2} = \cos^2 A$$

puis que (fig. 3)

$$\frac{(r_1' r_2'' - 1)(r_1'' r_2' - 1)}{(r_1'' - r_1')(r_2'' - r_2')} =$$

$$= \frac{\left[\left(1 - \frac{D}{R_1'}\right)\left(1 - \frac{D}{R_2''}\right) - 1\right]\left[\left(1 - \frac{D}{R_1''}\right)\left(1 - \frac{D}{R_2'}\right) - 1\right]}{\left[\left(1 - \frac{D}{R_1''}\right) - \left(1 - \frac{D}{R_1'}\right)\right]\left[\left(1 - \frac{D}{R_2''}\right) - \left(1 - \frac{D}{R_2'}\right)\right]} =$$

$$= \frac{(D - R_1' - R_2'')(D - R_1'' - R_2')}{(R_1'' - R_1')(R_2'' - R_2')} =$$

$$= \frac{O_1' O_2'' . O_1'' O_2'}{O_1' O_1'' . O_2'' O_2'} =$$

$$= (O_1' O_2' O_2'' O_1'')$$

D'après ceci, l'inégalité (18) devient :

$$(19) \qquad (O_1' O_2' O_2'' O_1'') - \cos^2 A \geqq 0$$

Si donc les six points en présence forment la suite

$$A_1 \; O_1'' * * O_2'' \; A_2$$

ou les * * sont mis à la place de $O_1' O_2'$ ou $O_2' O_1'$ et qu'il n'y ait pas deux de ces points qui coïncident, l'inégalité (19) est suffisante pour que $A_1 A_2$ soit un maximum ou minimum. Le maximum se distingue du minimum comme dans les cas de deux courbes et d'une courbe et d'une surface. Il y a maximum si les centres sont entre A_1 et A_2, et minimum dans le cas contraire.

CONCLUSION

Maintenant que nous avons établi les diverses conditions qui régissent les maxima et minima de la distance rectiligne de deux courbes, ou d'une courbe et d'une surface, ou de deux surfaces, il convient que nous cherchions à unir ces différents résultats et à en déduire une règle générale qui, si c'est possible, les embrasse tous ou qui tout au moins comprenne les trois cas généraux. A cet effet, récapitulons brièvement les résultats obtenus :

1° La distance $A_1 A_2$ de deux courbes $C_1 C_2$ est un maximum ou minimum si

$$(O_1 O_2 A_2 A_1) - \cos^2 A \geqq 0$$

ce qui exige que l'on puisse aller de A_1 en A_2 en passant par O_1 et O_2.

2° La distance $A_1 A_2$ d'une courbe C_1 à une surface S_2 est un maximum ou minimum si l'on peut aller de A_1 en A_2 en passant par $O_1 O_2' O_2''$, de manière à ce que l'on rencontre O_2'' en dernier lieu et que

$$(O_1 O_2' O_2'' A_1) - \cos^2 A \geqq 0$$

3° La distance $A_1 A_2$ de deux surfaces S_1 et S_2 est un maximum ou minimum si l'on peut aller de A_1 en A_2 en rencontrant tout d'abord O_1'', puis O_1' et O_2' dans un ordre quelconque, et enfin O_2'', et que

$$(O_1' O_2' O_2'' O_1'') - \cos^2 A \geqq 0$$

Les deux premiers cas que nous venons de récapituler se ramènent évidemment au troisième, si nous regardons un élément de courbe en général comme étant un élément de surface dont l'un des rayons de courbure principaux est nul; considérons par exemple la courbe C_1 ; le plan normal à C_1 et passant par $A_1 A_2$ doit simuler le plan qui fournit une section normale principale C_1'' ayant un rayon de courbure nul et un centre de courbure O_1'' qui coïncide avec A_1 ; l'autre plan normal principal est perpendiculaire au premier ; il passe par la tangente à C_1 en A_1, mais il est susceptible de prendre autour de cette droite une position quelconque ; nous le supposerons toujours passant par A_2, de sorte que le plan tangent à la surface C_1 pourra être considéré comme normal à $A_1 A_2$; le centre de courbure relatif à ce dernier plan normal sera évidemment O_1, qui n'est autre chose que le centre de courbure de la projection de C_1 sur ce plan ; si la courbe C_1 est regardée comme section oblique de la surface qu'elle représente, la position de O_1 est exactement celle qui aurait été donnée par le théorème de Meunier, en le supposant applicable à une telle surface. Si nous changeons donc la dénomination du centre O_1 en O_1' et celle du centre A_1 en O_1'', comme nous l'avons déjà indiqué, et si nous introduisons des notations analogues pour C_2, nous voyons que les deux premiers cas rentrent entièrement dans le troisième.

Les remarques que nous venons de faire donnent lieu aux théorèmes suivants :

Pour vérifier si la distance de deux points qui appartiennent respectivement à deux courbes données ou à une courbe et une surface, la (ou les) courbe devra être en général regardée comme une surface dont l'un des rayons de courbure principaux est nul et au sujet de laquelle le théorème de Meusnier est applicable.

Ceci étant admis,

Pour que la distance rectiligne de deux points $A_1 A_2$ *qui appartiennent respectivement à deux surfaces* S_1 *et* S_2 *soit un maximum ou minimum, il faut que les conditions suivantes soient remplies :*

1° *Que la droite* $A_1 A_2$ *coupe normalement les deux surfaces aux points* A_1 *et* A_2.

2° *Qu'en parcourant en une seule fois et toujours dans la même direction la droite indéfinie* $A_1 A_2$, *l'on puisse aller de* A_1 *en* A_2 *en passant par les quatre centres de courbure principaux* $O_1' O_1'' O_2' O_2''$ *des surfaces pour les points* $A_1 A_2$, *et qu'en opérant ce parcours, le premier centre que l'on rencontre se rapporte à la surface* S_1 (: O_1''), *le dernier à la surface* S_2 (: O_2'').

3° *Que*

$$(O_1'\,O_2'\,O_2''\,O_2') - \cos^2 A \geqq 0$$

A *étant l'un des angles que forment entre elles les sections normales principales des surfaces* S_1 *et* S_2 *aux points* A_1 *et* A_2 *et se rapportant aux centres* O_1' *et* O_2' *ou aux centres* O_1'' *et* O_2''.

Ces conditions sont suffisantes si la troisième d'entre elles se vérifie par une inégalité.

Enfin, si en suivant le parcours indiqué dans la condition (2°) *on est obligé de passer par l'infini, il ne peut y avoir que minimum; dans le cas contraire, il ne peut y avoir que maximum.*

Nous voyons donc que les trois problèmes généraux peuvent être condensés en un seul, ce que l'on pouvait déjà supposer, mais que l'on ne pouvait pas dire à priori d'une manière certaine.

Les deux premières conditions du maximum et du minimum peuvent être vérifiées immédiatement sur le vu des six points fondamentaux; quant à la troisième, elle peut exiger soit le calcul d'un rapport anharmonique, soit une petite construction géométrique que nous allons faire connaître. Cette troisième condition est représentée par l'inégalité

$$(O_1'\,O_2'\,O_2''\,O_1'') - \cos^2 A \geqq 0$$

Nous savons (page 18) que les quatre centres doivent former l'une des deux suites

$$O_1''\,O_1'\,O_2'\,O_2''$$

$$O_1''\,O_2'\,O_1'\,O_2''$$

Considérons le premier de ces deux cas. Les quatre centres étant dans l'ordre $O_1''\,O_1'\,O_2'\,O_2''$ peuvent aussi être regardés comme formant la suite

$$O_1'\,O_2'\,O_2''\,O_1''$$

et l'on a toujours

$$(O_1'\,O_2'\,O_2''\,O_1'') > 1$$

de sorte que, les deux premières conditions étant remplies, la troisième l'est aussi, et il y a toujours maximum ou minimum. Donc :

Les deux premières conditions étant remplies, si l'on peut aller de l'un à l'autre des centres principaux de l'une des surfaces sans passer par l'un des centres principaux de l'autre surface, il y a nécessairement maximum ou minimum.

Occupons-nous maintenant du deuxième cas où les quatre centres se trouvent dans l'ordre suivant :

$$O_1'' \; O_2' \; O_1' \; O_1''$$

La valeur du rapport anharmonique est alors toujours comprise entre 0 et 1. Nous allons montrer comment on peut trouver cette valeur par une construction géométrique; dans les figures 4, nous avons disposé cette construction pour les quatre cas différents qui peuvent se présenter. Elle consiste dans la recherche d'un point M tel que les angles $O_1' MO_1''$ et $O_2' MO_2''$ soient des angles droits; M doit donc être un point quelconque de l'intersection des deux sphères ayant $O_1' \, O_1''$ et $O_2' \, O_2''$ comme diamètres. La valeur du rapport anharmonique que nous recherchons est :

$$(O_1'O_2'O_2''O_1'') = (M.\ O_1'O_2'O_2''O_1'') = \frac{\sin O_1'MO_2''}{\sin O_2'MO_2''} : \frac{\sin (O_1'MO_1'')}{\sin (O_2'MO_2'')}$$

Ce rapport a, pour les quatre cas que nous avons distingués dans notre figure, les valeurs :

$$\text{(I)} \quad \frac{\cos\gamma}{\sin\frac{\pi}{2}} : \frac{-\sin\frac{\pi}{2}}{-\cos\gamma} \qquad \text{(II)} \quad \frac{\cos\gamma}{\sin\frac{\pi}{2}} : \frac{\sin\frac{\pi}{2}}{\cos\gamma}$$

$$\text{(III)} \quad \frac{\cos\gamma}{-\sin\frac{\pi}{2}} : \frac{\sin\frac{\pi}{2}}{-\cos\gamma} \qquad \text{(IV)} \quad \frac{-\cos\gamma}{-\sin\frac{\pi}{2}} : \frac{-\sin\frac{\pi}{2}}{-\cos\gamma}$$

Ces expressions sont les mêmes et égales à :

$$(O_1' \; O_2' \; O_2'' \; O_1'') = \cos^2 \gamma$$

La troisième condition générale du maximum ou minimum prend donc la forme :

$$\cos^2 \gamma - \cos^2 A \geqq 0$$

Elle est ainsi ramenée à la comparaison des angles γ et A. γ est l'angle aigu que forment entre eux les rayons se dirigeant de M sur deux centres principaux n'appartenant pas à la même surface. A étant l'un quelconque des quatre angles que forment entre eux deux plans donnés, nous pouvons aussi le supposer aigu. D'après ces hypothèses, on devra donc avoir, pour qu'il y ait maximum ou minimum :

$$\gamma \leqq A$$

Nous voyons donc que :

En général, pour reconnaître si une normale commune à deux surfaces (qui peuvent se réduire à des courbes ou des points) est une distance maximale ou minimale de ces deux surfaces, il suffit de considérer la position relative des centres de courbure principaux de ces dernières, et, si cela ne permet pas de conclure, de comparer deux angles dont l'un est donné et dont l'autre est très facile à construire au moyen de la règle et du compas.

Fig. 1

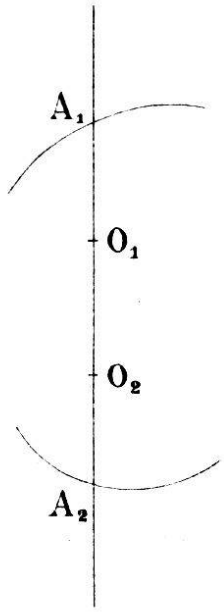


Fig. 2.

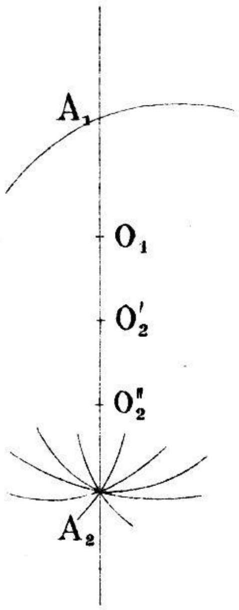


Fig. 3.

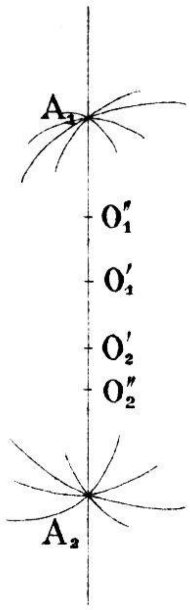
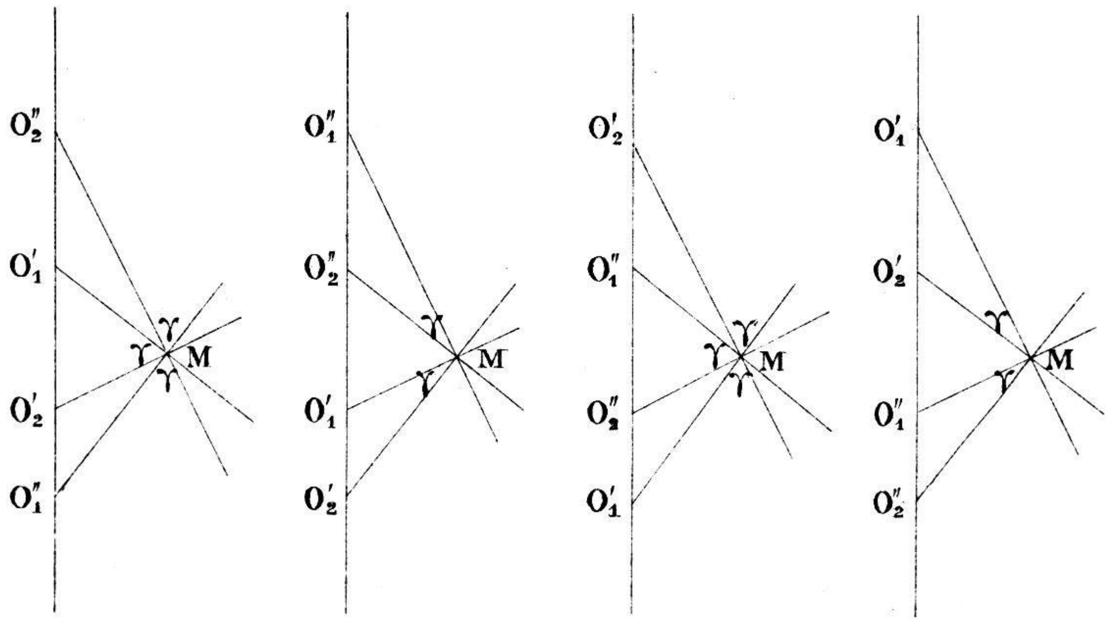


Fig. 4.

I II III IV



A. Odin. Lith. J. Chappuis,