Zeitschrift: Bulletin de la Société Vaudoise des Sciences Naturelles

Herausgeber: Société Vaudoise des Sciences Naturelles

Band: 88 (2002-2003)

Heft: 3

Artikel: Un algorithme d'inversion par moindres carrés pondérés : application aux données géophysiques par méthodes électromagnétiques en domaine fréquence

Autor: Marescot, Laurent

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-281430

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 08.01.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

Bull. Soc. Vaud. Sc. Nat. 88.3: 277-300 ISSN 0037-9603
Bulletin de Géologie de l'Université de Lausanne N° 357

Un algorithme d'inversion par moindres carrés pondérés: application aux données géophysiques par méthodes électromagnétiques en domaine fréquence

par

Laurent MARESCOT [1, 2]

Abstract.–MARESCOT L., 2003. A weighted least-squares inversion algorithm: application to geophysical frequency-domain electromagnetic data. *Bull. Soc. vaud. Sc. nat. 88.3*: 277-300.
Geophysical inverse theory can be used to process data collected from the surface in order to build an image of the subsurface structures. This processing is the only way to get a quantitative insight into the subsurface features. Inverse problems in geophysics, like the one-dimensional inversion of frequency domain electromagnetic data presented in this paper, frequently suffer from the lack of available information. Interpreting such inverse results can therefore be misleading or dangerous. This prompts us to propose an inverse formulation that contains a maximum of a priori information.
To introduce a priori information into the inverse problem, the least-squares formulation (Marquardt-Levenberg) is completed with weighting matrices. Various parameters (e.g. the damping factor) or the quality of the starting model allow the inverse process to converge towards a plausible solution. Nevertheless, the uniqueness of the solution cannot be guaranteed. Solving inverse problems seems complex at first sight but the background theory can be easily understood. The inverse problem solution, the characteristics of under- or over-determined systems, the principle of norm minimisation as well as the task of a weighting matrix can be presented in a straightforward way. The numerical resolution of the inverse problem is intentionally kept as much general as possible in this work. Therefore, the numerical tools proposed in this paper can be used to solve other inverse problems. To invert a matrix, a Gauss reduction with partial pivoting is first used. The upper triangular linear system is then solved using a back-solving procedure. This method proved to be stable and the computational effort as well as the memory required can be optimised throughout the whole procedure.
This algorithm is used to invert synthetic data calculated on a horizontal-layer model. These examples enhance the influence of the lack of information on the quality of the

[1]Institut de Géophysique, Université de Lausanne, CH-1015 Lausanne, Suisse.
[2]Laboratoire Central des Ponts et Chaussées, F-44341 Bouguenais, France.

CODEN: BSVAA6
© Société vaudoise des Sciences naturelles
Droits de reproduction réservés

model reconstruction. The role of the weighting matrices is also emphasized. These matrices, that can contain measurement errors or constraints on the model, introduce a priori information into the inverse problem. This information proved to have a significantly positive influence on the quality of the model reconstruction. Nevertheless, poor quality results can sometimes be obtained when using starting models too different from the solution. The efficiency of the inversion algorithm is also demonstrated with field data.

Keywords: geophysics, inversion, least-squares, weighting matrix, a priori information, numerical calculus, electromagnetic methods, EM34, EM31.

Résumé.–MARESCOT L., 2003. Un algorithme d'inversion par moindres carrés pondérés: application aux données géophysiques par méthodes électromagnétiques en domaine fréquence. *Bull. Soc. vaud. Sc. nat. 88.3*: 277-300.
Le processus d'inversion en géophysique permet la reconstruction de la structure profonde du sous-sol à partir de données mesurées en surface. Ce type de traitement est indispensable si l'on souhaite pouvoir exploiter de manière quantitative les mesures effectuées. En géophysique, le processus d'inversion souffre fréquemment du manque d'information à disposition. Il s'avère donc nécessaire de résoudre le problème inverse au travers d'une formulation permettant d'utiliser toutes les informations disponibles au moment de l'interprétation des données. La méthode électromagnétique en domaine fréquence, utilisée ici pour effectuer des sondages en une dimension du sous-sol, souffre tout particulièrement de ce manque d'information.
La résolution du problème inverse par moindres carrés (formulation de Marquardt-Levenberg) permet la gestion de l'information a priori au moyen de matrices de pondération. Les différents paramètres de cette formulation (tel le facteur d'amortissement) ou encore la qualité du modèle de départ, permettent d'obtenir une convergence vers une solution plausible. Toutefois, l'unicité de la solution ne peut pas être garantie. Bien que complexe au premier abord, la compréhension de la résolution du problème inverse (conditionnement du problème inverse, notion de minimisation des normes de vecteurs) ne nécessite pas de concepts mathématiques particuliers et peut être présentée de manière relativement simple. Les outils numériques utilisés ont été choisis dans l'optique de présenter un algorithme applicable à de nombreux types de données. L'inversion des matrices s'effectue directement en utilisant une factorisation de Gauss à pivots partiels et le système triangulaire supérieur ainsi obtenu est résolu par substitution rétrograde. Cet algorithme s'avère être très stable et peut être facilement optimisé en temps et espace mémoire.
L'algorithme par moindres carrés pondérés est appliqué à des données électromagnétiques synthétiques calculées sur un système de couches tabulaires ainsi qu'à des mesures de terrain. Dans ces exemples, l'effet de la carence en information du problème inverse est alors souligné de même que le rôle des matrices de pondération. Ces dernières permettent d'introduire des informations a priori telles que des contraintes sur les paramètres du modèle (profondeur de certains niveaux géologiques, conductivités mesurées sur affleurements par exemple) ou encore sur les erreurs expérimentales. Ces informations permettent une amélioration significative de la qualité des modèles obtenus. Toutefois, certaines difficultés de convergence ont parfois été constatées si le modèle de départ est trop éloigné de la solution.

Mots clés: géophysique, inversion, moindres carrés, matrice de pondération, information a priori, calcul numérique, méthodes électromagnétiques, EM34, EM31.

Introduction

La géophysique est une discipline scientifique étudiant les propriétés physiques du sous-sol dans le but d'en caractériser la structure et la composition. Ces mesures se font généralement depuis la surface ou plus rarement en profondeur par l'intermédiaire de forages. Il est en général difficile, voire impossible, d'utiliser ces données en tant que telles pour décrire de manière quantitative les propriétés du sous-sol. Un traitement est donc nécessaire afin d'obtenir un résultat exploitable par le géologue ou l'ingénieur. Le processus d'inversion en géophysique permet la reconstruction de la structure profonde du sous-sol à partir de mesures en surface. La stratégie d'inversion par moindres carrés est sans doute une des solutions les plus fréquemment utilisées en géophysique, bien que d'autres modes de résolution existent (méthodes ART (*algebraic reconstruction technique*) ou encore rétroprojection par exemple).
Cet article est tout d'abord un essai de vulgarisation à l'attention des personnes qui ne sont pas familières avec la théorie du problème inverse. Il s'agit d'aborder de manière simple la théorie du problème inverse par moindres carrés ainsi que la gestion de l'information a priori qui lui est associée. En effet, la qualité du modèle obtenu dépend fortement de la quantité et de la qualité des informations introduites dans le processus d'inversion. Il est primordial de relever que, bien qu'appliquées à des données géophysiques, les notions développées dans ce travail sont de portée générale et peuvent aisément être transposées à d'autres disciplines scientifiques. Dans ce but, les recettes numériques utilisées pour l'élaboration de cet algorithme seront également détaillées.

Cette étude a ensuite pour but d'illustrer les possibilités et les limites de l'inversion par moindres carrés pondérés de données électromagnétiques en domaine fréquence (appareillage EM31/34 de Geonics Ltd.). Cet appareillage fournit une mesure de la conductivité apparente en un point de la surface qui est une fonction des conductivités vraies qui composent le sous-sol. La conductivité d'une roche est la capacité de cette dernière à laisser passer un courant électrique. Ce paramètre physique dépend, entre autres, de la composition des roches, de leur saturation et de la qualité de l'eau d'imbibition. Cette méthode est surtout utilisée de manière qualitative, sous la forme de profils de conductivité destinés à appréhender la variabilité latérale du sous-sol (voir par exemple Ogilvy *et al.* 1991 ou Gex 1997). Une autre approche consiste à effectuer des sondages électromagnétiques. Dans cette méthode, les mesures effectuées depuis la surface servent à appréhender les variations verticales de la conductivité à l'aplomb du dispositif. Comme seule la variation de la conductivité avec la profondeur nous intéresse, les modèles obtenus sont dits à une dimension (1D). Le traitement quantitatif de ce type de données sous la forme de sondages n'est pas évident (Gómez-Treviño *et al.* 2002). En effet, les appareillages mentionnés plus haut ne permettent d'acquérir qu'un

nombre très limité de mesures par sondage. Il va donc être capital de trouver une manière d'introduire de l'information a priori (connue indépendamment des données) dans le problème inverse si l'on désire obtenir une reconstruction correcte du sous-sol.

Dans cette étude, le principe de la mesure de la conductivité apparente par la méthode électromagnétique en domaine fréquence est tout d'abord exposé. Le conditionnement, la résolution ainsi que la question de l'unicité et de la convergence du problème inverse sont ensuite décrits de manière plus détaillée. Un algorithme de résolution est également détaillé. Une série de modélisations synthétiques ainsi qu'un exemple de terrain sont finalement présentés afin d'illustrer l'application de l'algorithme d'inversion proposé dans cette étude.

Mesures sur le terrain et problème direct

Les mesures du sous-sol par la méthode électromagnétique en domaine fréquence peuvent être effectuées sur le terrain au moyen de deux bobines tenues horizontalement ou verticalement. La première bobine est un émetteur parcouru par un courant alternatif dans la bande des fréquences audio. La seconde joue le rôle de récepteur et est située à une distance définie s de l'émetteur. En vertu de la loi de Biot-Savart, un champ magnétique primaire H_p variant dans le temps va être créé par le courant alternatif de la bobine émettrice. Selon le principe de Faraday, ce champ primaire va alors induire un courant dans le sous-sol, ce dernier se comportant comme un corps plus ou moins conducteur selon sa composition. Ces courants génèrent de même un champs magnétique secondaire H_s qui est alors mesuré, avec le champ primaire, par la bobine réceptrice. Le champ H_s est une fonction complexe de la distance entre les bobines s, de la fréquence utilisée f et de la conductivité du sous-sol σ.

Sous une certaine hypothèse, appelée approximation à faible nombre d'induction (McNeill 1980), le champ secondaire peut être évalué par une fonction plus simple de ces variables. On peut définir le nombre d'induction B comme étant le rapport de la distance s sur la profondeur de peau δ (pour «*skin depth*»), cette dernière étant définie comme la distance verticale parcourue par une onde plane qui se propage dans un demi-espace (le sous-sol) à laquelle son amplitude ne vaut plus que 1/e de son amplitude en surface (avec $e \cong 2.71$ le nombre népérien). La profondeur de peau δ dépend de la fréquence f et de la conductivité. Pour que l'approximation à faible nombre d'induction soit valide, il est nécessaire de considérer que B soit beaucoup plus petit que 1, c'est à dire que $s \ll \delta$. Dans ce cas, le rapport du champ magnétique secondaire sur le champ magnétique primaire vaut:

$$\frac{H_s}{H_p} \cong \frac{i\,\omega\,\mu_0\,\sigma\,s^2}{4} \tag{1}$$

avec H_s/H_p le rapport du champ magnétique secondaire sur le champ magnétique primaire, ω la fréquence angulaire (radians) avec $\omega=2\pi f$ où f est la fréquence (Hz), μ_0 la perméabilité magnétique du vide, σ la conductivité (S/m) du sous-sol, s la distance entre les bobines (m) et $i=(-1)^{0.5}$.

Dans cette expression, le rapport du champ magnétique secondaire sur le champ magnétique primaire est directement proportionnel à la conductivité apparente σ_a du terrain, exprimée en tant que modules:

$$\sigma_a = \frac{4}{\omega\,\mu_0\,s^2}\left(\frac{H_s}{H_p}\right) \tag{2}$$

Cette conductivité apparente est identique à la conductivité vraie du terrain si ce dernier est homogène et isotrope. Ayant défini une certaine valeur pour la distance s et une valeur pour la fréquence f, la conductivité maximum acceptable pour que l'approximation à faible nombre d'induction soit applicable, peut être déterminée. On peut admettre que cette conductivité ne doit pas excéder 80 mS/m. Au delà, l'approximation à faible nombre d'induction n'est plus valable et la relation liant la conductivité apparente mesurée et la conductivité vraie n'est plus linéaire (McNeill 1980).

Dans le cas d'une modélisation à une dimension, on suppose que le sous-sol est constitué d'une succession de couches horizontales et parallèles, de conductivités et d'épaisseurs différentes (figure 1). Le champ primaire induit dans le sous-sol des boucles de courant horizontales et parallèles entre elles, ces dernières restant confinées dans chaque couche. On suppose de plus qu'il n'y a pas de couplage magnétique entre les différentes boucles de courant, la fréquence utilisée dans l'approximation à faible nombre d'induction étant relativement basse (<10'000 Hz) tout comme la conductivité du sous-sol. Il est donc possible de calculer le champ magnétique résultant à la surface d'un sous-sol composé de couches horizontales parallèles en évaluant indépendamment les contributions de chaque couche. Ces contributions dépendent directement des conductivités et épaisseurs de chaque couche. En géophysique, le calcul de la réponse d'un modèle de terrain porte le nom de problème direct.

Pour effectuer un sondage électromagnétique, l'espacement des bobines ainsi que la fréquence utilisée vont être modifiées afin d'augmenter la profondeur d'investigation tout en respectant l'approximation à faible nombre d'induction. Pour les mesures sur le terrain, les matériels EM31 (distance s

fixe, 3.7 m) et EM34 (distance *s* variable, 10, 20 ou 40 m) de Géonics Ltd. permettent quatre espacements de bobines différents. Ces appareils sont calibrés électroniquement pour permettre une mesure directe de la conductivité apparente. En considérant des dipôles électromagnétiques (perpendiculaires aux bobines émettrices et réceptrices) horizontaux et verticaux, ce matériel permet donc d'effectuer 8 points de mesure par sondage. La profondeur d'investigation de ces dispositifs varie entre 3 m et 60 m en fonction des espacements *s* et des fréquences utilisées (McNeill 1980).

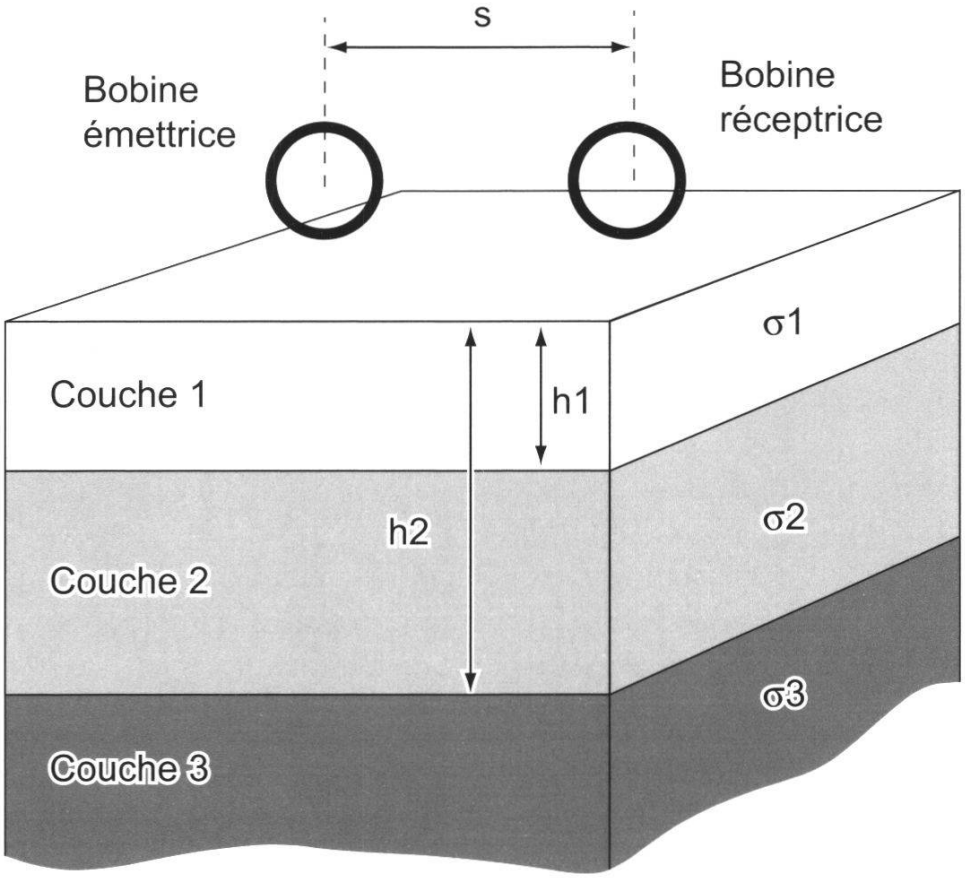

Figure 1.–Dispositif de mesure par méthode électromagnétique en domaine fréquence (bobines émettrice et réceptrice) et paramètres caractérisant un sous-sol tabulaire à trois couches.
The frequency domain electromagnetic measurement device (transmitter and receiver coils) and the geoelectrical parameters for a three-layer tabular earth.

Position du problème inverse

L'opération inverse du problème direct est résolue pour remonter aux caractéristiques inconnues du terrain à partir de la réponse mesurée. Il s'agit, à partir des données mesurées sur le terrain (conductivités apparentes regroupées dans un vecteur **d** de dimension *N*), de retrouver les paramètres du modèle de

terrain (conductivités vraies et profondeurs de chaque couche regroupées dans un vecteur **m** de dimension M), décrivant le sous-sol de manière plausible et expliquant bien les données mesurées (figure 1). Connaissant un modèle de terrain particulier, les composantes d'un vecteur **g(m)** de dimension N, appelées données calculées, peuvent être évaluées en utilisant la formulation du problème direct. L'opération d'inversion s'effectue en général par une minimisation de la somme des écarts (au carré dans le cas d'une minimisation par moindres carrés) entre les observations mesurées et calculées. Comme l'a démontré AL-CHALABI (1992), il est indispensable que les erreurs (incertitudes expérimentales) sur les données mesurées suivent des distributions normales lorsque l'on applique une minimisation par moindres carrés (norme L_2). Cette propriété sera supposée dans notre cas.

La solution du problème inverse dépend fortement du rapport entre le nombre de données mesurées et le nombre de paramètres du modèle (conditionnement du problème). Le problème peut être parfaitement déterminé. Dans ce cas, il y a exactement le même nombre de données sans incertitude expérimentale que de paramètres du modèle. La solution obtenue est alors unique avec un vecteur d'écart entre données mesurées et calculées nul. Cette situation n'arrive jamais en science expérimentale car les données mesurées sont toujours entachées d'incertitudes. Un problème peut aussi être sur-déterminé s'il y a plus de données (conductivités apparentes entachées d'erreurs expérimentales) que de paramètres du modèle. Dans ce cas, le vecteur d'écart entre les données mesurées et calculées est non-nul et une minimisation de la norme L_2 permet d'obtenir une solution au sens des moindres carrés. Par contre, dans le cas d'un problème purement sous-déterminé, il n'y a pas assez de données pour déterminer de manière univoque les paramètres du modèle. Il y a donc plusieurs solutions possibles avec un vecteur d'écart entre données mesurées et calculées invariablement nul. Ce type de problème est résolu en introduisant d'une part des informations a priori afin de sélectionner la solution la plus probable ou du moins limiter le nombre de solutions possibles (le problème de la qualité de l'information a priori se pose alors) et en supposant d'autre part que la solution du problème inverse est «simple». On obtient généralement une solution mathématiquement «simple» en minimisant la norme L_2 des paramètres du modèle ou leur écart par rapport à un modèle de référence.

Toutefois, en science expérimentale, le problème du conditionnement est plus subtil. La plupart des problèmes inverses ne sont en effet pas complètement sous-déterminés ou sur-déterminés. En effet, le géophysicien doit souvent travailler avec des données en nombre suffisant mais entachées d'erreurs expérimentales, redondantes (certains dispositifs EM34 donnent plus ou moins la même profondeur d'investigation) et dont l'échantillonnage n'est pas adéquat. Le système d'équations, qui lie données et paramètres du modèle, est donc inconsistant. On parle alors de problèmes mixtes et dans ce cas, le

vecteur d'écart entre données mesurées et calculées n'est pas nul. Idéalement, il serait nécessaire de séparer les paramètres du modèle en deux groupes: ceux qui sont sous-déterminés et ceux qui sont sur-déterminés. Cette opération peut par exemple être effectuée par une méthode de décomposition des valeurs propres (SVD pour «*singular-value decomposition*»). Comme cette méthode est relativement lente lorsqu'il y a beaucoup de données, on lui préfère généralement une alternative par moindres carrés amortis pour les problèmes mixtes faiblement sous-déterminés.

En sondage électromagnétique utilisant le matériel EM31/34, il est possible de mesurer 8 conductivités apparentes par sondage. Il sera donc difficile d'imager des terrains à plus de trois couches, ces derniers présentant déjà cinq paramètres pour le modèle (3 conductivités et 2 profondeurs). La complexité du problème inverse électromagnétique vient également de sa non-linéarité (i.e. les relations qui relient paramètres du modèle et données calculées ne sont pas linéaires). Une approche possible consiste à rendre linéaire ce problème en effectuant un développement limité du premier ordre autour d'une solution approchée puis en résolvant le problème inverse de manière itérative selon une minimisation par moindres carrés (norme L_2).

Solution du problème inverse

La méthode décrite ci-dessous est une adaptation de la méthode de Marquardt-Levenberg (Lines and Treitel 1984) qui consiste à déterminer une solution qui minimise simultanément la norme L_2 du vecteur d'écart entre données mesurées et calculées et la norme L_2 du vecteur de modification à apporter au modèle. Par cette dernière opération, on cherche alors à éviter des oscillations de la solution.

On rend le problème électromagnétique linéaire en effectuant un développement selon une série de Taylor autour d'une solution estimée $\mathbf{m}^p$ (modèle de départ).

$$\mathbf{g}(\mathbf{m}) \cong \mathbf{g}(\mathbf{m}^p) + \mathbf{G}\,(\mathbf{m} - \mathbf{m}^p) \tag{3}$$

Cette équation peut encore s'écrire

$$\mathbf{g}(\mathbf{m}) - \mathbf{g}(\mathbf{m}^p) \cong \mathbf{G}\,\Delta\mathbf{m} \tag{4}$$

Dans l'équation 4, on notera $\Delta\mathbf{m}=\mathbf{m}-\mathbf{m}^p$ la modification à apporter au modèle. Les éléments de la matrice **G** valent:

$$G_{ij} = \frac{\partial g(m)_i}{\partial m_j} \tag{5}$$

G est une matrice qui joue donc le même rôle que l'opérateur **A** dans une relation linéaire de type **d**=**Am**. La matrice **G** est la matrice de sensibilité (ou matrice des dérivées partielles ou matrice des dérivées de Fréchet ou encore le jacobien). Elle n'est pas carrée car de taille *N*x*M* et ne peut donc pas être inversée directement. Les coefficients de cette matrice représentent la sensibilité de la mesure en un point à une variation des paramètres du modèle. En utilisant l'approximation par faible nombre d'induction, il est possible de calculer analytiquement les composants de la matrice de sensibilité ce qui a été fait dans ce travail. Pour d'autres problèmes (en méthode géophysique par courant continu par exemple), un évaluation numérique des dérivées partielles pourrait être nécessaire.

Nous allons tout d'abord utiliser la norme L_2 afin d'évaluer l'écart entre les valeurs de conductivités apparentes mesurées et les conductivités apparentes calculées.

$$\begin{aligned} \mathbf{q} = \mathbf{d} - \mathbf{g}(\mathbf{m}) &\cong \mathbf{d} - (\mathbf{g}(\mathbf{m}^p) + \mathbf{G}\,\Delta\mathbf{m}) \\ &= \Delta\mathbf{d} - \mathbf{G}\,\Delta\mathbf{m} \end{aligned} \tag{6}$$

Il peut être intéressant de pondérer le vecteur d'écart entre données mesurées et calculées en fonction de la précision des données mesurées. De cette manière, une donnée plus précise qu'une autre peut avoir un plus grand poids dans le calcul de l'erreur globale. Nous savons par exemple que les mesures effectuées par dipôles verticaux sont moins précises que les mesures effectuées par dipôles horizontaux, de par la difficulté d'avoir des bobines coplanaires sur le terrain. Cette pondération est effectuée par le biais d'une matrice *N*x*N* diagonale $\mathbf{W_d}$ qui définit la contribution relative de chaque individu à l'erreur globale.

$$\mathrm{diag}(\mathbf{W_d}) = [a_{11}\,,\, a_{22}\,,\, \ldots\,,\, a_{ii}\,,\, \ldots\,,\, a_{NN}]^{\mathrm{T}} \tag{7}$$

avec i=1,….,N

Plus a_{ii} est grand, plus la mesure est fiable. Cette information agit tout particulièrement sur la partie sous-déterminée du problème. L'expression de la norme L_2 du vecteur d'écart entre données mesurées et calculées s'exprime alors, sous forme matricielle:

$$S_D = \mathbf{q}^T \mathbf{W_d} \mathbf{q} \cong (\Delta\mathbf{d} - \mathbf{G}\,\Delta\mathbf{m})^T \ \mathbf{W_d}\,(\Delta\mathbf{d} - \mathbf{G}\,\Delta\mathbf{m}) \tag{8}$$

Il est également possible de pondérer la minimisation de la modification à apporter à la solution. Pour cela, une matrice MxM diagonale $\mathbf{W_m}$ peut être incluse dans la minimisation. Cette matrice diagonale tient compte du degré d'information a priori que nous possédons sur certains paramètres du modèle initial. Il se peut par exemple que nous connaissions la conductivité ou la profondeur du substratum avec une relative précision (par le biais de mesures sur affleurement ou en forage). Dans ce cas, un plus fort poids sera donné à ce paramètre à l'aide de la matrice de pondération. Les paramètres du modèle pourront évoluer avec plus ou moins de liberté durant l'inversion suivant le poids qui leur sera attribué.

$$\mathrm{diag}(\mathbf{W_m}) = [b_{11}\,,\, b_{22}\,,\, \ldots\,,\, b_{ii}\,,\, \ldots\,,\, b_{MM}]^T \tag{9}$$

avec i=1,….,M

L'expression utilisée lors de la minimisation de la norme L_2 sur la modification à apporter à la solution devient alors, sous forme matricielle:

$$S_M = \Delta\mathbf{m}^T \ \mathbf{W_m}\ \Delta\mathbf{m} \tag{10}$$

La formulation du problème inverse par moindres carrés peut alors être trouvée par la méthode des multiplicateurs de Lagrange. On minimise alors S_D sous la contrainte que S_M est minimum. Cela revient à minimiser la fonction de coût S:

$$S = S_D + \lambda\, S_M \tag{11}$$

avec λ un multiplicateur de Lagrange.

Pour résoudre le problème inverse, nous allons minimiser l'expression S en cherchant le zéro de son gradient. L'équation que nous obtenons après minimisation est une forme modifiée de l'équation de Gauss-Newton:

$$\Delta\mathbf{m} = [\mathbf{G}^T \mathbf{W_d}\, \mathbf{G} + \lambda\, \mathbf{W_m}]^{-1}\ \mathbf{G}^T\ \mathbf{W_d}\ \Delta\mathbf{d} \tag{12}$$

avec $\Delta\mathbf{m}$ le vecteur de modification à appliquer au modèle. Le facteur λ est également appelé facteur d'amortissement car il limite la longueur de $\Delta\mathbf{m}$ et amortit ainsi la modification apportée au modèle.

Du point de vue de la théorie du problème inverse, le facteur d'amortissement λ détermine l'importance relative donnée au vecteur sur les paramètres du modèle par rapport à la distance entre les données calculées et mesurées. Ce facteur applique une contrainte sur les valeurs du vecteur de modification des

paramètres du modèle $\Delta\mathbf{m}$. Il est alors possible de trouver un compromis entre la partie sur-déterminée et la partie sous-déterminée du problème considéré en faisant varier la valeur de λ. Le facteur λ peut être également utilisé pour trouver un compromis entre résolution et précision du résultat. Si λ est trop fort, le résultat perd rapidement en résolution (SASAKI 1992). La précision du résultat a par contre tendance à s'améliorer (INMAN 1975).

D'un point de vue plus mathématique, le facteur λ est un moyen d'ajouter une valeur scalaire aux valeurs propres de la matrice $\mathbf{G}^T\mathbf{W}_d\mathbf{G}$, évitant ainsi que cette dernière, dans le cas où le conditionnement est médiocre, devienne singulière au cours du processus itératif. Cela peut par exemple se passer lorsque le modèle de départ est trop éloigné de la solution. Le fait d'augmenter la taille des faibles valeurs propres de $\mathbf{G}^T\mathbf{W}_d\mathbf{G}$ diminue la longueur du vecteur de modification $\Delta\mathbf{m}$ à appliquer au modèle, ce qui a pour conséquence de donner des solutions plus proches de la réalité. De plus, si ce vecteur de modification est trop grand, de par l'effet des valeurs propres faibles, l'approximation linéaire perd en précision. Si le modèle de départ est médiocre et que l'on inverse avec de faibles valeurs propres, le processus aura tendance à imager de petits détails et à diverger de la solution. Ces faibles valeurs propres ne doivent être tolérées qu'à proximité de la solution.

CONVERGENCE ET UNICITÉ

Il n'y a pas de moyen simple permettant de savoir, en l'absence d'informations a priori, si un problème inverse non-linéaire possède une solution unique par la méthode des moindres carrés. Afin d'évaluer la non-unicité d'un problème inverse non-linéaire, il est nécessaire de s'intéresser à la topologie de la surface d'écart entre les données mesurées et calculées dans l'espace des paramètres du modèle. Cette surface peut présenter plusieurs extrema («sommets», «cuvettes») secondaires, être creuse ou presque plate. Pour un grand nombre de paramètres, ce type d'investigation graphique est toutefois impossible. Même si un problème inverse non-linéaire est connu pour présenter une solution unique, rien ne nous garantit que la technique itérative appliquée converge vers cette solution. Un minimum local est toujours possible, qui empêche le processus de converger vers le vrai minimum. Les méthodes itératives ne peuvent trouver que des solutions qui sont linéairement proches de l'estimation initiale des paramètres du modèle. Un choix soigneux du modèle initial est donc de rigueur. La non-unicité d'un problème peut également provenir des incertitudes sur les données (parfois importante sur des mesures de faibles champs induits), qui se propagent numériquement vers les paramètres du modèle, ou encore du formalisme mathématique qui ne décrit pas exactement la réalité physique du phénomène (nous utilisons ici des approximations pour

le problème direct et le sous-sol peut également ne pas être tabulaire). Il peut donc y avoir plusieurs modèles de terrains différents qui peuvent expliquer (presque) aussi bien les conductivités apparentes mesurées. Le seul critère d'ajustement ne permettra donc pas toujours de décider quel modèle est le plus représentatif du terrain.

Une des manières de déterminer l'unicité d'un problème inverse serait de résoudre ce problème pour un grand choix d'estimations initiales. Mais comme le nombre d'expérimentations ne peut être infini, rien ne nous garantit que la totalité de la topologie de la surface d'écart entre les données mesurées et calculées a été appréhendée. De plus, il n'est souvent pas nécessaire de connaître toutes les solutions possibles mais uniquement celles qui semblent plausibles. Pour parvenir à interpréter de manière univoque les mesures de terrain, des informations a priori seront donc souvent nécessaires. Dans notre cas, la pertinence géologique ou les mesures sur affleurements peuvent être d'une grande aide lors du choix des contraintes.

Le choix de la valeur de λ a une influence sur la rapidité de la convergence. Si λ est très grand, la méthode de Marquardt-Levenberg est proche de la méthode du gradient (*steepest descent*) qui présente une convergence stable mais lente à proximité du minimum (si λ est infini, il n'y a plus de correction apportée au modèle). Si λ est proche de zéro, l'algorithme obtenu est celui de Newton-Raphson qui converge (si $\mathbf{G}$ est bien conditionnée) rapidement à proximité d'un minimum mais peut diverger loin de tout minimum. C'est pourquoi, pour un problème non-linéaire, on combine ces deux approches et le processus est amorcé avec une forte valeur de λ que l'on diminue à chaque itération, à mesure que l'on s'approche de la solution.

Algorithme et recette numérique

L'algorithme du processus d'inversion est schématisé dans la figure 2. Un modèle de départ est tout d'abord proposé par l'utilisateur ainsi que différents paramètres et contraintes. Les matrices et vecteurs sont ensuite construits puis le processus d'inversion itératif commence. A chaque itération, la matrice de sensibilité est recalculée puis on évalue le vecteur de correction sur les paramètres du modèle. Une erreur moyenne RMS (pour *Root Mean Square*) entre les données mesurées et calculée est également évaluée et le facteur d'amortissement est diminué. Le processus d'inversion se termine lorsqu'un des critères d'arrêt est rempli (l'erreur RMS augmente ou ne diminue plus de manière significative par exemple) et dans ce cas la convergence est atteinte. Les points cruciaux de cet algorithme sont précisés ci-dessous. Ce programme d'inversion a été écrit en langage C^{++}, un langage orienté objet permettant de regrouper sous forme de classes un bon nombre d'opérations matricielles fréquemment utilisées.

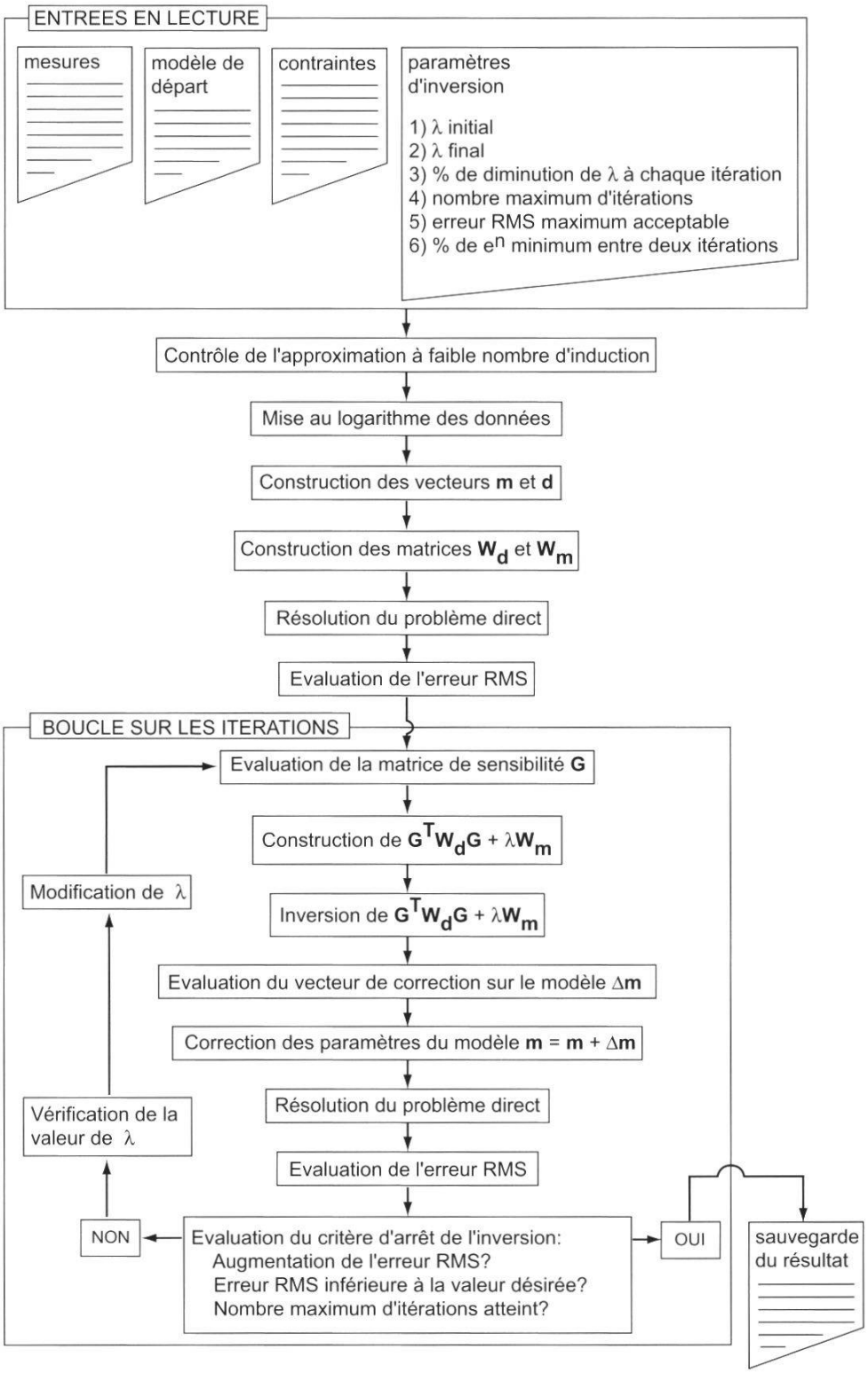

Figure 2.–Représentation schématique de l'algorithme d'inversion itératif par moindres carrés pondérés.
The schematic structure of the iterative weighted least-squares algorithm.

Mise à l'échelle des variables

Relevons tout d'abord que les variables considérées dans cet algorithme sont les logarithmes des conductivités et épaisseurs. L'utilisation du logarithme permet de considérer des variations significatives de la conductivité et de tenir

compte de la grande variabilité de ce paramètre dans la nature. En considérant des conductivités directement, on introduirait un déséquilibre entre les faibles et fortes valeurs de ce paramètre. A partir d'une série de tests synthétiques, nous avons constaté que ces fortes valeurs sont alors rendues artificiellement plus influentes.

Inversion de la matrice

Le problème inverse exposé dans ce travail ne nécessite pas d'opérations avec des matrices de grandes tailles. Il n'y a donc pas de problème numérique et informatique (stockage des données en mémoire, temps de calcul prohibitif) qui serait hors de portée d'un micro-ordinateur moderne. L'inversion de la matrice $[\mathbf{G}^T\mathbf{W_d}\mathbf{G}+\lambda\mathbf{W_m}]$ (équation 12), que nous identifierons dorénavant par **A,** peut donc être effectuée de manière traditionnelle. L'inverse d'une matrice carrée **A** de dimension MxM peut être obtenu en posant que l'expression $\mathbf{AA}^{-1}=\mathbf{I}$, où **I** est la matrice identité MxM, doit être satisfaite. Cette expression peut être interprétée comme l'ensemble de M équations de la forme $\mathbf{Ax}=\mathbf{b}$, avec **x** une colonne de $\mathbf{A}^{-1}$ et **b** la colonne correspondante de **I**. Pour trouver $\mathbf{A}^{-1}$, il suffit alors de résoudre M équations d'un système linéaire en utilisant une des méthodes numériques disponibles (QUARTERONI *et al.* 2000).

La matrice **A** étant de composition variable, une factorisation de Gauss à pivot partiel rendant la matrice triangulaire supérieure a été choisie pour le calcul du problème inverse. D'autres types de factorisations peuvent s'avérer plus efficaces si la structure de la matrice **A** est particulière (factorisation de Cholesky si **A** est symétrique définie positive par exemple). La méthode de Gauss consiste à soustraire les lignes de **A** entre elles dans le but de convertir en zéros la partie de chaque colonne sous la diagonale principale. La colonne de gauche est partiellement mise à zéro en soustrayant A_{21}/A_{11} fois la première ligne de la seconde ligne, A_{32}/A_{11} fois la première ligne de la troisième et ainsi de suite. La seconde colonne est traitée de la même manière en soustrayant A_{32}/A_{22} fois la seconde ligne de la troisième, A_{42}/A_{22} fois la seconde ligne de la quatrième et ainsi de suite. Le vecteur **b** doit également être modifié durant cette opération. Si un des éléments de la diagonale est nul (ou proche de zéro), une division par zéro survient. Une solution possible consiste à rechercher le plus grand élément dans la même ligne que l'élément diagonal considéré (appelé pivot) et à le transférer à la place de cet élément diagonal en effectuant une permutation des colonnes.

Relevons que cette factorisation n'a besoin d'être effectuée qu'une seule fois par itération du processus d'inversion. Une attention spéciale a été portée à la programmation de l'opération de factorisation afin d'optimiser le temps de calcul nécessaire et la mémoire requise. Premièrement, les colonnes de **A** ne sont pas réordonnées durant l'opération, mais leurs positions dans le triangle

sont enregistrées dans un vecteur de travail. Deuxièmement, l'emplacement des éléments de **A** qui ont été annulés par l'opération peuvent servire à stocker les multiplicateurs (il est inutile de stocker des variables nulles). Dans notre cas, cette méthode s'avère être stable car il est généralement possible de trouver un pivot non nul, de par l'effet du facteur d'amortissement, dans les limites de l'erreur d'arrondi de l'ordinateur.

Une fois le système linéaire **Ax=b** rendu triangulaire supérieur sous la forme d'un système **A'x=b'**, il est ensuite résolu en utilisant une procédure de substitution rétrograde. On commence par la dernière ligne en posant que $x_M = b'_M / A'_{MM}$ puis on remonte dans les lignes en posant:

$$x_i = \frac{1}{A'_{ii}} \left(b'_i - \sum_{j=i+1}^{M} A'_{ij} \, x_j \right) \tag{13}$$

Choix du facteur d'amortissement

Le facteur d'amortissement peut être utilisé soit de manière statique, dans ce cas il est choisi avant inversion et ne varie plus durant le processus itératif, soit de manière dynamique. Nous préférons ici une utilisation dynamique. A partir d'une série de tests synthétiques, nous avons déterminé des valeurs satisfaisantes pour le facteur λ. La première itération est effectuée avec λ=0.50, puis le facteur est diminué de moitié jusqu'à une valeur minimale de 0.02. La forte valeur de λ au début du processus d'inversion donne alors une grande influence à la matrice de pondération $\mathbf{W_m}$, à un moment où le besoin d'information a priori est capital. Cette influence est ensuite diminuée au cours de l'inversion, à mesure que le processus converge vers la solution.

Critère d'erreur

Un critère de convergence est nécessaire afin de pouvoir vérifier si le modèle obtenu explique bien les données mesurées et, le cas échéant, pouvoir mettre fin au processus d'inversion. Une erreur moyenne RMS peut être utilisée. Cette erreur RMS est de l'ordre de grandeur du bruit de mesure affectant les données. En suivant SASAKI (1992), on peut donner la définition suivante de l'erreur RMS:

$$e_{RMS} = \frac{\sqrt{(\mathbf{d} - \mathbf{g}(\mathbf{m}^p))^T \, (\mathbf{d} - \mathbf{g}(\mathbf{m}^p))}}{N} \tag{14}$$

Nous pouvons de plus nous baser sur le taux de variation e^n de l'erreur RMS entre deux itérations n et $n+1$ pour mettre fin au processus d'inversion.

$$e^n = \frac{\left(e^n_{RMS} - e^{n+1}_{RMS}\right)}{e^n_{RMS}} \tag{15}$$

Un faible taux de variation signifie que le processus est parvenu à une situation numériquement stable et n'en sort plus, qu'il s'agisse d'une solution acceptable ou non.

Exemples synthétiques

Nous donnons ici quelques exemples synthétiques dans le but d'illustrer les notions développées dans les paragraphes précédents. Le modèle synthétique utilisé est le même pour tous les exemples traités. Il s'agit d'un modèle géoélectrique à trois couches dont les paramètres (Figure 1) sont les suivants:

Couche 1: Conductivité σ_1=20 mS/m, profondeur h_1=4 m

Couche 2: Conductivité σ_2=5 mS/m, profondeur h_2=23 m

Couche 3: Conductivité σ_3=10 mS/m

Ce modèle pourrait par exemple représenter une succession moraine, dépôt graveleux et Molasse sur le Plateau suisse. Les données sont calculées en utilisant les paramètres géométriques propres à l'EM31 et à l'EM34, à savoir une valeur de 3.7, 10, 20 et 40 m pour la distance s. Pour ces données synthétiques, une valeur de 0.01 a été choisie pour e^n (équation 15) et l'erreur RMS maximum a été fixée à 0.01%.

Gestion des contraintes a priori sur le modèle

L'information a priori sur le modèle peut être facilement introduite dans le problème inverse par le biais de la matrice $\mathbf{W_m}$. Une première inversion est effectuée avec deux modèles de départ (itérations 0) figurant dans le tableau 1. Les éléments des diagonales de $\mathbf{W_d}$ et $\mathbf{W_m}$ ont un poids unité (on ne favorise aucune donnée pour sa qualité, ni n'introduit aucune information a priori). Le tableau 1 présente les modèles obtenus après inversion. Dans les deux cas, le processus d'inversion s'arrête car la valeur de e^n est inférieure à celle prédéfinie. Les résultats obtenus ne reflètent pas réellement le modèle synthétique utilisé bien que l'erreur RMS soit relativement faible. Ceci se remarque particulièrement bien pour la profondeur h_2. La solution finale dépendra donc du modèle initial utilisé. Ce phénomène illustre bien la non-unicité de la solution du problème inverse.

Supposons maintenant que nous sachions avec une certitude relative que la conductivité de la troisième couche corresponde bien à celle entrée dans le

Tableau 1.–Inversion des données synthétiques avec deux modèles de départ différents (a et b) Les matrices de pondération sont des matrices identités.
Inversion of synthetic data using two different starting models (a and b). The weighting matrices are identity matrices.

	Itération	*Erreur [%]*	σ_1 *[mS/m]*	σ_2 *[mS/m]*	σ_3 *[mS/m]*	h_1 *[m]*	h_2 *[m]*
a)	0	5.853	30.00	8.00	10.00	2.00	10.00
	63	0.038	19.91	4.10	9.54	4.21	17.21
b)	0	6.739	30.00	8.00	10.00	2.00	5.00
	11	1.07	22.18	8.22	8.06	2.35	5.04

modèle de départ (10 mS/m). Nous pouvons constater que, bien qu'introduite dans les modèles de départ, cette information évolue durant le processus itératif et n'est pas reflétée dans les modèles obtenus (tableau 1). Pour donner plus d'importance à cette information, nous accordons un poids de 1/0.001 à l'élément diagonal de $\mathbf{W_m}$ correspondant à ce paramètre. Après inversion, les résultats obtenus sont très proches du modèle synthétique (tableau 2) et l'erreur RMS sur les modèles correspond à l'erreur désirée. On notera tout particulièrement que la conductivité de le couche 3 est restée très semblable à celle entrée dans le modèle de départ.

Nous voyons donc dans cet exemple qu'il est relativement aisé d'introduire des informations a priori dans le problème inverse (géologie, données de forage, autres types de données géophysiques). Soulignons encore que cette information n'est pas introduite de manière rigide, mais peut évoluer au cours

Tableau 2.–Inversion des données synthétiques avec les mêmes modèles de départ que pour le Tableau 1 (a et b) mais en augmentant le poids de la conductivité de la troisième couche dans la matrice de pondération sur les paramètres du modèle.
Inversion of synthetic data using the same starting models as in Table 1 (a and b) but increasing the weight of the third layer conductivity in the model parameter weighting matrix.

	Itération	*Erreur [%]*	σ_1 *[mS/m]*	σ_2 *[mS/m]*	σ_3 *[mS/m]*	h_1 *[m]*	h_2 *[m]*
a)	0	5.853	30.00	8.00	10.00	2.00	10.00
	31	0.010	19.99	4.95	9.99	4.01	22.76
b)	0	6.739	30.00	8.00	10.00	2.00	5.00
	76	0.010	19.98	4.93	9.99	4.02	22.73

du processus d'inversion en fonction du facteur d'amortissement choisi. De plus, chaque conductivité et épaisseur peut être pondérée de manière indépendante, ce qui confère une certaine flexibilité à la méthode.

Pondération des données mesurées

Dans le cas de données peu entachées d'erreurs expérimentales ou d'incertitude, nous pouvons accorder une plus grande confiance aux mesures introduites dans le processus d'inversion. Le tableau 3 présente deux inversions effectuées à partir du même modèle initial (itération 0). La ligne b du tableau rappelle le résultat obtenu avec les éléments diagonaux de $\mathbf{W_m}$ et $\mathbf{W_d}$ valant 1 et qui a déjà été commenté dans le tableau 1. Nous constatons que le modèle obtenu fournit une information médiocre sur h_2. En donnant un poids de 1/0.01 aux éléments des diagonales de $\mathbf{W_d}$, il est possible de constater une nette amélioration du modèle obtenu (modèle c).

Tableau 3.–Inversion des données synthétiques à partir du modèle de départ donné en a. Le résultat en b est une inversion avec des matrices de pondération identités. Le résultat en c est obtenu en augmentant tous les poids de la matrice de pondération sur les données.
Inversion of synthetic data using the starting model in a. The model in b is the result of an inversion with weighting matrices which are identity matrices. All the weights of the data weighting matrix were increased for the result presented in c.

	Itération	*Erreur [%]*	σ_1 *[mS/m]*	σ_2 *[mS/m]*	σ_3 *[mS/m]*	h_1 *[m]*	h_2 *[m]*
a)	0	5.853	30.00	8.00	10.00	2.00	10.00
b)	63	0.038	19.91	4.10	9.54	4.21	17.21
c)	35	0.010	19.97	4.79	9.84	4.05	21.09

L'opération décrite précédemment n'est généralement valable que pour des données peu entachées d'incertitude. De plus, l'intérêt de la matrice $\mathbf{W_d}$ est de pouvoir donner des poids différents aux termes qui contribuent à la somme S_D. Dans l'exemple du tableau 4, une erreur expérimentale aléatoire (10% de bruit gaussien) est simulée sur les données obtenues lors des mesures effectuées avec des dipôles verticaux. Une première inversion (modèle b) est effectuée avec le modèle de départ (itération 0) figurant dans le tableau 4. Les éléments des diagonales de $\mathbf{W_m}$ et $\mathbf{W_d}$ sont supposés avoir un même poids de 1. Nous remarquons immédiatement que le résultat obtenu est médiocre. Ce problème peu être partiellement résolu dans le cas où un plus faible poids est assigné aux données entachées d'erreur expérimentale. Nous accordons donc un poids de 1 aux éléments diagonaux de $\mathbf{W_d}$ correspondant aux mesures obtenues par dipôles verticaux et un poids de 1/0.01 aux autres données. Après inversion, le résultat

obtenu est beaucoup plus satisfaisant (tableau 4, modèle c) et s'approche des valeurs obtenues avec des données non-bruitées, sans information a priori sur le modèle (tableau 1, modèle a).

Le fait de tenir compte de la qualité des données dans le processus d'inversion améliore sensiblement la convergence du processus itératif. Comme dans le cas de la matrice $\mathbf{W_m}$, cette procédure apporte de l'information a priori et diminue donc quelque peu la sous-détermination du problème inverse.

Tableau 4.–Inversion des données synthétiques bruitées à partir du modèle de départ donné en a. Le résultat en b est une inversion avec des matrices de pondération identités. Le résultat en c est obtenu en diminuant le poids des données bruitées dans la matrice de pondération sur les données.
Inversion of noisy synthetic data using the starting model in a. The model in b is the result of an inversion with identity weighting matrices. The weights of the noisy data were lowered in the data weighting matrix for the result presented in c.

	Itération	*Erreur [%]*	σ_1 *[mS/m]*	σ_2 *[mS/m]*	σ_3 *[mS/m]*	h_1 *[m]*	h_2 *[m]*
a)	0	6.078	30.00	8.00	10.00	2.00	10.00
b)	9	1.525	22.77	7.66	8.20	2.27	10.23
c)	4	1.023	20.59	5.03	9.21	3.71	16.77

Contraintes et équivalence

Il n'est pas évident de définir, sur le terrain, si le nombre de couches présentes dans le modèle de départ correspond bien au nombre de couches du sous-sol. Dans l'exemple suivant, des données synthétiques ont été calculées sur un modèle à deux couches possédant les paramètres suivants:

Couche 1: Conductivité σ_1=5 mS/m, profondeur h_1=30 m

Couche 2: Conductivité σ_2=10 mS/m

Le tableau 5 présente une inversion en un modèle à trois couches de ces données. Le résultat obtenu sans information a priori (modèle b) est déjà très proche du modèle à deux couches mais peut être encore amélioré (modèle c) en fixant la valeur de σ_3 (l'élément diagonal correspondant dans $\mathbf{W_m}$ est fixé à 1/0.001, les autres valent 1). Soulignons que le paramètre h_1 dans le modèle à trois couches n'a pas de réelle signification dans cet exemple (les conductivités des deux premières couches sont presque identiques).

L'inversion en un modèle à deux couches de données mesurées sur un système à trois couches n'est pas évident. Des tests tendent à montrer que si le contraste de conductivité entre les deux premières couches est trop fort (ce qui est le cas ici), le processus ne converge pas. Le nombre d'unités géoélectriques constituant le sous-sol est donc une information a priori importante que doit obtenir le géophysicien.

Tableau 5.–Inversion des données synthétiques calculées sur un modèle deux couches à partir du modèle de départ trois couches donné en a. Pour le résultat présenté en b, les matrices de pondération sont des matrices identités. Pour le résultat présenté en c, le poids de la conductivité de la troisième couche dans la matrice de pondération sur les paramètres du modèle a été augmenté.
Inversion of synthetic data calculated on a two-layer model using the three-layer starting model in a. The model in b is the result of an inversion with identity weighting matrices. The weight of the third layer conductivity in the model parameter weighting matrix was increased for the model c.

	Itération	*Erreur [%]*	σ_1 *[mS/m]*	σ_2 *[mS/m]*	σ_3 *[mS/m]*	h_1 *[m]*	h_2 *[m]*
a)	0	18.652	10.00	10.00	10.00	5.00	10.00
b)	165	0.024	5.00	4.82	9.62	7.67	25.92
c)	44	0.012	5.00	4.97	9.99	5.92	29.78

Exemple de terrain

Afin d'illustrer cette méthode d'inversion au moyen d'un exemple de terrain, deux sondages électromagnétiques ont été effectués dans la région de Arnex sur Orbe (canton de Vaud, Suisse), vers le flanc S de la vallée des Vaux. Ces sondages sont perpendiculaires entre eux et possèdent le même point central (coord. 530'227/171'131, alt. env. 550 m). Les deux sondages ont été effectués selon des directions E-W et N-S. Le centre des sondages est situé à environ 80 m d'un forage dont la lithologie et les propriétés physiques (obtenues par diagraphies) sont connues.

Les sédiments quaternaires constituant le remplissage de la vallée sont composés de produits d'altération molassique (Molasse d'eau douce inférieure, Chattien) avec des alternances métriques d'argiles, de limons, de sables et de graviers. La conductivité de ces sédiments varie entre 10 et 30 mS/m dans le forage. On rencontre ensuite, à une profondeur de 29.5 m, un calcaire fracturé, bréchique, souvent recristallisé et contenant parfois des paléokarsts (Urgonien). La conductivité de ce calcaire fracturé varie entre 0.1 et 0.5 mS/m dans le forage.

Supposons que nous désirions obtenir la profondeur du toit du substratum calcaire. Un modèle à deux couches semble donc être acceptable en fonction du but recherché. De plus, l'importance du contraste de conductivité existant entre le substratum calcaire et les sédiments quaternaires justifie une telle interprétation. Les instruments utilisés sont l'EM38 (avec s=1 m), l'EM31 (avec s=3.66 m) et l'EM34 (avec s=10, 20, 40 m). Pour chaque sondage, les dipôles horizontaux et verticaux ont été mesurés.

Le tableau 6 présente les résultats de l'inversion des données pour les sondages E-W et N-S. Les deux jeux de données ont été également inversés simultanément. Une valeur de 0.3 mS/m a été attribuée au calcaire. Il n'est pas fondamental de connaître la valeur exacte de la conductivité du substratum calcaire de par la faible contribution de ce dernier au signal total (faible induction). Pour ces données de terrain, une valeur de 0.01 a été choisie pour e^n (équation 15) et l'erreur maximum RMS a été fixée à 0.01. Lors des premières itérations, les éléments des diagonales de $\mathbf{W_d}$ et $\mathbf{W_m}$ ont tout d'abord un poids unité (modèles b). Pour introduire de l'information concernant la conductivité du substratum calcaire, connu par les mesures en forage, nous accordons ensuite un poids de 1/0.001 à l'élément diagonal de $\mathbf{W_m}$ correspondant à ce paramètre (modèles c). Malgré le choix d'un modèle de départ relativement éloigné de la solution, les résultats obtenus pour les différents sondages sont tous cohérents. La profondeur du substratum est compatible avec les données de forage (elle doit être un peu plus profonde en fonction du léger pendage tectonique des

Tableau 6.–Inversion des données de terrain (sondages électromagnétiques N-S, E-W et combinaison des deux jeux de données). L'inversion s'effectue à partir d'un modèle à deux couches. Le modèle de départ est donné en a. Pour les résultats présentés en b, les matrices de pondération sont des matrices identités. Pour les résultats présentés en c, le poids de la conductivité de la seconde couche dans la matrice de pondération sur les paramètres du modèle a été augmenté.
Inversion of field data (electromagnetic soundings N-S, E-W and merging of the two data sets). The inversion is carried out on a two-layer model. The starting model is given in a. The models in b are the result of inversions with identity weighting matrices. The weight of the second layer conductivity in the model parameter weighting matrix was increased for the models c.

Sondage		*Itération*	*Erreur [%]*	σ_1 *[mS/m]*	σ_2 *[mS/m]*	*h1 [m]*
E-W	a)	0	68.72	10.00	0.30	5.00
	b)	3	4.19	37.95	0.77	27.84
	c)	3	4.17	37.71	0.30	29.10
N-S	a)	0	66.58	10.00	0.30	5.00
	b)	3	4.17	34.45	0.80	30.09
	c)	3	4.14	34.24	0.30	31.65
E-W & N-S	a)	0	47.84	10.00	0.30	5.00
	b)	3	3.08	35.93	1.26	29.30
	c)	2	3.08	35.66	0.30	30.45

couches calcaires). La conductivité du remplissage est certainement une moyenne des conductivités des différentes couches constituant le Quaternaire de la vallée. La grande variabilité du remplissage de la vallée peut expliquer que la conductivité calculée soit légèrement plus élevée que celles mesurées dans le forage. On notera encore que l'erreur RMS caractérisant les modèles diminue rapidement en quelques itérations.

Le tableau 7 présente différentes inversions pour le sondage N-S effectuées à partir de différents modèles de départ. Les éléments des diagonales de $\mathbf{W_d}$ et $\mathbf{W_m}$ ont tout d'abord un poids unité (modèles b). Nous accordons ensuite un poids de 1/0.001 à l'élément diagonal de $\mathbf{W_m}$ correspondant à la conductivité

Tableau 7.–Inversion des données de terrain (sondage électromagnétique N-S) avec différents modèles de départ donnés en a. Pour les résultats présentés en b, les matrices de pondération sont des matrices identités. Pour les résultats présentés en c, le poids de la conductivité de la seconde couche dans la matrice de pondération sur les paramètres du modèle a été augmenté.
Inversion of field data (electromagnetic sounding N-S) with various starting models given in a. The models in b are the result of inversions with identity weighting matrices. The weight of the second layer conductivity in the model parameter weighting matrix was increased for the models c.

Sondage		*Itération*	*Erreur [%]*	σ_1 *[mS/m]*	σ_2 *[mS/m]*	*h1 [m]*
N-S	a)	0	99.71	10.0	0.30	1.0
	b)	6	4.36	35.19	15.28	12.29
	c)	4	4.13	34.18	0.30	31.98
N-S	a)	0	35.04	10.0	0.30	100.0
	b)	7	4.13	33.50	0.29	35.31
	c)	7	4.13	33.50	0.30	35.31
N-S	a)	0	121.63	1.0	0.30	5.0
	b)	2	4.14	33.80	6.33	24.78
	c)	10	4.13	33.55	0.30	35.03
N-S	a)	0	27.30	60.0	0.30	5.0
	b)	4	4.14	34.32	0.36	31.27
	c)	4	4.14	34.31	0.30	31.36

du substratum (modèles c). Lorsque de l'information a priori est entrée dans le modèle, le processus converge dans tous les cas vers une solution très semblable.

Conclusions

L'algorithme d'inversion par moindres carrés pondérés présenté dans ce travail est de portée générale et peut aisément être transposé à d'autres disciplines scientifiques. Pour des problèmes impliquant peu de données et des modèles relativement simples, la résolution numérique proposée dans ce travail semble stable, efficace et applicable à de nombreux domaines. La matrice à inverser est rendue triangulaire supérieure en utilisant la méthode de Gauss à pivots partiels puis le système linéaire est résolu par une méthode de substitution rétrograde. Cet algorithme peut être facilement optimisé en temps et espace mémoire.

Lorsque l'on désire inverser des données électromagnétiques en domaine fréquence sous la forme de sondage sur un sous-sol tabulaire, le problème inverse a fortement tendance à être sous-déterminé. Il est donc indispensable d'introduire des informations a priori dans le processus d'inversion et d'appliquer un fort facteur d'amortissement. Cette opération peut être effectuée de manière très simple par l'intermédiaire de matrices de pondération sur les données mesurées et les paramètres du modèle. Ces matrices permettent de régler de manière très fine la qualité et la quantité d'information a priori que le géophysicien désire ajouter au problème inverse. Cette information est non seulement modulable à volonté pour chaque donnée et paramètre, mais peut également évoluer au cours des différentes itérations. Les exemples synthétiques et de terrain ont montré que les incertitudes sur les données mesurées ou encore des informations extérieures sur la profondeur ou la conductivité des couches pouvaient être efficacement exploitées par le biais de l'inversion par moindres carrés pondérés amortis.

Ce programme d'inversion permet donc une interprétation rapide et efficace du sous-sol en termes de conductivités et de profondeurs pour un milieu tabulaire. La résolution obtenue est certainement inférieure à celle d'un sondage électrique par courant continu mais suffisante pour une modélisation rapide et simplifiée du sous-sol. Relevons encore qu'une amélioration de l'efficacité de cet algorithme d'inversion passera sans doute par l'utilisation d'une solution au problème direct beaucoup plus précise.

Il est finalement intéressant de relever que cette formulation du problème inverse par moindres carrés pondérés (équation 12) est très similaire à la formulation probabiliste de Tarantola et Valette (1982a et 1982b). Cette analogie est révélée si l'on suppose que les composantes des matrices de pondération sont des matrices de covariance contenant l'inverse de la variance sur les données et les paramètres du modèle.

Remerciements

Je tiens à exprimer mes sincères remerciements à S. Palma Lopes du Laboratoire Central des Ponts et Chaussées (centre de Nantes, France) pour la relecture attentive et détaillée du manuscrit et les critiques constructives apportées à ce travail. Je tiens également à remercier P. Gex, de l'Institut de Géophysique de l'Université de Lausanne (Suisse), pour les discussions que nous avons eues concernant les méthodes électromagnétiques et pour son aimable disponibilité sur le terrain.

Bibliographie

Al-Chalabi M., 1992. When least-squares squares least. *Geophys. Prosp. 40*: 359-378.

Gex P., 1997. Etude géophysique de la prolongation orientale de quelques structures liées au Mormont (VD). *Bull. Soc. vaud. Sc. nat. 84.3*: 275-297.

Gomez-Trevino E., Esparza F.J. and Mendez-Delgado S., 2002. New theoretical and practical aspects of electromagnetic soundings at low induction numbers. *Geophysics 67*: 1441-1451.

Inman J. R., 1975. Resistivity inversion with ridge regression. Geophysics 40,5: 798- 817.

Lines L.R. and Treitel S., 1984. Tutorial: A review of least squares inversion and its application to geophysical problems. *Geophys. Prosp. 32*: 159-186.

McNeill J.D., 1980. EM34-3 survey interpretation techniques. Tech. Note TN-8, Geonics Ltd. 88 p.

Ogilvy R.D., Cuadra A., Jackson P.D. and Cuellar V., 1991. Delineation of a resistive drainage channel by EM conductivity survey. *Geoexploration 28*: 139-152.

Quarteroni A., Sacco R. et Saleri F., 2000. Méthodes numériques pour le calcul scientifique. Springer Verlag France. 444 p.

Sasaki Y., 1992. Resolution of resistivity tomography inferred from numerical simulation. *Geophys. Prosp. 40*: 453-463.

Tarantola A. and Valette B., 1982a. Inverse problems = Quest for information. *J. Geophys. 50*: 159-170.

Tarantola A. and Valette B., 1982b. Generalized nonlinear inverse problems solved using the least squares criterion. *Rev. Geophy. Space Phys. 20, 2*: 219-232.

Manuscrit reçu le 28 octobre 2002