Zeitschrift: Bulletin de la Société Vaudoise des Sciences Naturelles
Herausgeber: Société Vaudoise des Sciences Naturelles
Band: 86 (1998-1999)
Heft: 4

Artikel: La construction des calendriers
Autor: Lefort, Jean
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-281128

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 11.01.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

Bull. Soc. Vaud. Sc. Nat. 86.4: 297-312. ISSN 0037-9603

La construction des calendriers*

par

Jean LEFORT[1]

1. La notion de temps

1.1. *Aspects biologiques et physiques*

Difficile de définir le temps. Il fait partie de notre environnement tant physique que biologique. Nous pouvons ergoter sur l'existence d'une différence entre ces deux aspects. Mais nous sommes des humains et nous ne pouvons raisonner qu'à partir de notre humanité qui est essentiellement biologique. Cette réalité biologique est conditionnée en grande partie par notre environnement physique. C'est notre pensée humaine qui fait le lien entre les deux.

Notre réalité biologique est soumise à de très nombreux rythmes: rythme cardiaque, rythme de la respiration, rythme de l'alternance veille - sommeil, rythme mensuel, rythme annuel,... pour n'en citer que quelques uns. Chacun de ces rythmes permet une évaluation du temps écoulé, de la durée. Mais cette perception de la durée est très variable d'un individu à l'autre et chez un même individu en fonction de son âge. (Je suis conscient de ne pas échapper à une certaine circularité de mon discours dans ma réflexion sur le temps et la durée). Que l'on pense à la vitesse de cicatrisation beaucoup plus rapide chez le jeune enfant que chez l'homme mûr et a fortiori chez le vieillard. On peut aussi voir les choses autrement en pensant qu'une année pour un enfant de 5 ans représente 20% de sa vie soit 8 ans pour un adulte de 40 ans. On est ainsi amené à construire différentes échelles de temps: le temps psychologique qui permet le classement des événements constituant l'histoire d'un être humain particulier (d'un point de vue mathématique on a construit un ensemble ordonné); le temps physiologique qui caractérise le passage de l'enfant au vieillard (ce qui permet de donner un âge à une personne); le temps scientifique donné par un mécanisme physique (une montre par exemple).

---

*Conférence donnée le 8 décembre 1999 dans le cadre de la Conférence académique organisée par la SVSN, conjointement avec la Société académique vaudoise.

[1]Professeur de mathématiques. 24, rue Schweitzer, F-68920 Wintzenheim.

CODEN: BSVAA6

© Société vaudoise des Sciences naturelles
Droits de reproduction réservés

Parmi les rythmes biologiques certains sont synchronisés par des phénomènes extérieurs. Il en est ainsi des rythmes circadiens (voisins de la journée de 24 h) qui sont variables d'un individu à l'autre, comme le prouvent les expériences d'isolement au fond de gouffres, mais qui se synchronisent sur l'alternance des jours et des nuits. Cette synchronisation met un certain temps à s'établir aussi bien chez le nouveau-né que chez l'adulte contraint au décalage horaire ou au travail posté. Sans doute y a-t-il aussi un rythme annuel synchronisé par le retour des saisons.

L'homme vivant en société et ayant une forte conscience du temps, il paraît indispensable et finalement assez naturel d'utiliser des phénomènes physiques extérieurs pour évaluer la durée et dater des événements.

Il reste néanmoins une interrogation: Qu'est-ce qui nous fait dire que tel rythme est parfaitement régulier ? Le retour du lever du soleil, le retour de son passage au méridien, le retour de la pleine lune, le retour des saisons… sont-ils plus réguliers ou moins réguliers que la période de tel quasar ou de la radiation correspondant à la transition entre les deux niveaux hyperfins de l'état fondamental de l'atome de césium 133 ? Sans entrer dans les détails disons que l'esprit humain fonctionne suivant un principe de simplicité qui implique que les éléments sont plus simples et plus réguliers que les assemblages. Mais un débat pourrait s'établir sur ce sujet. Réfléchissons seulement à la somme d'ingéniosité que l'Homme a dû déployer pour mesurer le temps et les durées avec une précision de plus en plus grande.

1.2. *Quelques définitions*

J'ai l'intention de parler de calendriers c'est-à-dire de la mesure du temps pour les durées supérieures à la journée. Cela ne m'empêchera pas de faire quelques incursions sur les problèmes de la mesure des durées inférieures, mais le calendrier est par excellence une échelle d'unités permettant de repérer un événement à la journée près.

Nous appellerons journée (parfois jour) une durée voisine de 24 h, mois une durée d'environ 29 jours 1/2 (entre 27 et 31), année une durée d'environ 365 jours (entre 346 et 385). D'autres périodes interviennent comme la semaine (7 jours), la décade (9 ou 10 jours), le lustre (5 ans), le siècle (100 ans) mais elles sont moins fondamentalement reliées à des phénomènes naturels, encore que…!

2. Les aspects astronomiques

La présence du soleil, de la lune, des étoiles et des planètes ont été pour l'homme une source évidente pour la mesure du temps. Les phénomènes astronomiques étant sensiblement les mêmes pour tous les peuples et toutes les civilisations, il est normal que les calendriers finissent par se ressembler. La création des calendriers a été concomitante de l'amélioration de la mesure des durées. C'est l'observation sur de longues périodes qui a permis de préciser la durée d'une lunaison ou d'une année tropique mais c'est parce qu'on disposait d'un calendrier que l'on a pu relier des observations sur des dizaines de générations.

2.1. *La journée*

2.1.1. *Généralités*

L'alternance des jours et des nuits est la première manifestation de cycles temporels. Une nuit et un jour font une journée (de 24 heures). Ce regroupement n'a pas toujours été évident et c'est pourquoi nous divisons le jour et la nuit en 12 heures chacun. Cette division en deux fois douze heures «régulières» n'a d'ailleurs pas toujours existé et résulte à la fois d'un progrès dans la mesure des durées inférieures à la journée (clepsydre, sablier…) et de la perception unitaire de la journée (le nycthémère des Grecs). Sans insister, disons que dans un premier temps le jour et la nuit ont été divisés chacun en un même nombre d'unités, 3 puis 6 puis 12 qui n'étaient pas les mêmes suivant les saisons et pas les mêmes entre le jour et la nuit. Ce n'est que plus tard que ces unités ont été regroupées pour former les 24 heures, beaucoup plus régulières, de la journée.

Il est assez naturel de compter la journée à partir soit du début du jour soit à partir du début de la nuit. Notre décompte à partir de minuit s'est imposé petit à petit pour faciliter le repérage dans un calendrier. Les astronomes préfère mesurer à partir du passage du soleil au méridien, c'est-à-dire sensiblement à partir de midi.

2.1.2. *Inégalité des journées*

La terre tourne très régulièrement sur elle-même en quelque 23 heures et 56 minutes. C'est l'inclinaison de son axe sur le plan de son orbite qui implique les variations dans la durée des jours et des nuits suivant les saisons. Par suite si on compte les journées à partir du coucher du soleil, si les jours allongent, la journée comptera plus de 24 heures et moins de 24 heures si les jours raccourcissent.

Cette inclinaison de l'axe des pôles sur le plan de l'écliptique implique également une inégalité dans la durée des journées mesurée au passage au méridien. C'est ce qu'on appelle la réduction à l'équateur qui a une période d'une demi-année.

La trajectoire elliptique de l'orbite terrestre implique une autre inégalité due à la loi des aires. La vitesse de la terre sur son orbite est plus faible à l'aphélie qu'au périhélie ce qui entraîne des journées plus courtes à l'aphélie qu'au périhélie. Cette inégalité à une période annuelle.

La somme de ces deux inégalités constitue ce qu'on appelle l'équation du temps et qui se traduit sur les cadrans solaires par la fameuse courbe en 8.

2.2. *La lunaison*

2.2.1. *Généralités*

Le retour des phases de la lune (les lunaisons) est suffisamment net pour s'imposer comme un regroupement nécessaire des journées. Cela donne le mois lunaire qui est voisin de 29,5 jours.

On a mesuré très souvent le début de la lunaison à partir de la nouvelle lune, plus exactement à partir du moment où l'on observe à nouveau un fin croissant de lune le soir juste après le coucher du soleil. Ceci correspond à un retard d'environ 36 à 48 heures sur la nouvelle lune astronomique. Mais ce

retard est constant ce qui fait que la précision relative sur la durée d'une lunaison croît avec le nombre de lunaison mesuré. 48 heures sur 480 lunaisons soit environ 40 ans permet une mesure à 6 minutes près. On comprend dès lors que l'accumulation de mesures sur plusieurs générations ait permis la mesure du mouvement de la lune avec une très grande précision permettant de mettre en évidence un certain nombre d'inégalités.

2.2.2. *Mouvement de la lune*

Le mouvement de la lune est très complexe et ne peut guère être considéré comme képlérien. Il faut plutôt considérer un système à trois corps (terre lune soleil). La lunaison elle-même a une durée variable de l'ordre de 14 heures.

On distingue essentiellement 4 types de période pour le mouvement de la lune:

La révolution sidérale qui voit la lune revenir dans la même direction stellaire: 27 j 7 h 43 min.

La révolution anomalistique séparant deux passages au périgée: 27 j 13 h 19 min.

La révolution draconitique qui voit passer la lune dans le plan de l'écliptique dans le même sens: 27 j 5 h 6 min.

La révolution synodique ou lunaison qui règle les phases et qui est régie par la position de la lune par rapport au soleil: 29 j 12 h 44 min.

A titre d'information ce sont les deux dernières révolutions qui régissent le retour des éclipses.

2.3. *L'année*

2.3.1. *L'année tropique*

Le mouvement apparent du soleil est bien plus régulier que celui de la lune ce qui n'empêche pas de mettre en évidence plusieurs types d'années. Nous avons déjà vu l'année tropique, celle qui règle le retour des saisons. Sa durée exacte n'est pas facile à mesurer. Il faut d'abord choisir un instant de début: soit un équinoxe (passage du soleil dans le plan de l'équateur), soit un solstice dont la détermination précise n'est pas aisée. Une erreur de quelques jours est possible mais comme la période est sensiblement douze fois plus longue que pour la lunaison il faut douze fois plus de temps pour corriger une telle incertitude. Une vie humaine ne suffit plus. On trouve une durée de 365 j 5 h 49 min.

2.3.2. *Les autres années*

Le mouvement apparent du soleil n'est képlérien qu'en première approximation. On peut considérer qu'il s'agit d'une ellipse très lentement variable. Le retour du soleil au périgée (ou de la terre au périhélie) défini l'année anomalistique qui vaut 365 j 6 h 14 min.

Comme celui d'une toupie, l'axe de rotation de la terre tourne très lentement autour d'une perpendiculaire au plan de l'écliptique. C'est ce qu'on appelle la précession des équinoxes. Le passage du soleil dans un même plan fixe par rapport aux étoiles défini l'année sidérale qui vaut 365 j 6 h 9 min.

On considère parfois l'année draconitique d'environ 346 jours et qui correspond à deux retours consécutifs du soleil dans la même position par rapport à la ligne des nœuds du système terre - lune. Cette année est importante pour la prédiction des éclipses.

2.4. *Révolution synodique des planètes*

Les planètes, ces astres «errants» des Grecs, ont été largement observées et étudiées. Il s'agit bien sûr de Mercure, Vénus, Mars, Jupiter, Saturne et chez certains peuples d'Océanie d'Uranus. Nous nous contenterons des 5 premiers. Il n'a d'ailleurs pas du tout été évident de regrouper en une seule planète Mercure et Vénus qui apparaissaient tantôt le soir, tantôt le matin.

Le mouvement conjugué de la terre et de la planète fait intervenir ce qu'on appelle la révolution synodique de la planète ce qui revient à étudier le retour dans une position analogue par rapport au soleil. Le tableau ci-après donne les durées des périodes de révolution sidérale et synodique des planètes: (l'année vaut exactement 365,25 jours, ce qu'on appelle une année julienne)

En l'absence de modèle théorique pour les mouvements du système solaire, c'est souvent la révolution synodique qui a été prise en compte par ceux qui ont établi des calendriers. Mais il faut également noter la distance relative à la terre.

Planètes	**Révolution sidérale**	**Révolution synodique**
Mercure	87 j 23 h 17 min	115 j 21 h 6 min = 115, 879 j
Vénus	224 j 16 h 49 min	583 j 22 h 6 min = 583, 921 j
Mars	1 an 321 j 17 h 31 min	779 j 22 h 27 min = 779, 936 j
Jupiter	11 ans 314 j 20 h 8 min	398 j 21 h 13 min = 398, 884 j
Saturne	29 ans 166 j 23 h 31 min	378 j 2 h 12 min = 378, 092 j

2.5. *Autres phénomènes*

Rares sont les autres phénomènes astronomiques périodiques qui ont été pris en compte pour la mesure du temps du calendrier. Citons toutefois que la position du soleil par rapport aux étoiles a souvent servi de repère. On parle alors du lever héliaque de l'étoile quand on voit à nouveau l'étoile peu de temps avant le lever du soleil. Le retour du lever héliaque de l'étoile définit l'année sidérale. La précision instantanée n'est pas très grande mais guère moins que dans le cas de la détermination de l'année tropique.

Une mention particulière doit être faite de Sirius. Non seulement le lever héliaque de Sirius joue un rôle particulier dans le calendrier égyptien mais en plus il est avéré qu'au tout premier temps de la civilisation égyptienne, Sirius était vu comme une étoile rouge et double. La période d'une cinquantaine d'années aujourd'hui sert encore de référence à des fêtes religieuses chez les Dogons qui honorent Vénus, qu'une révélation divine leur assure être une étoile double.

3. Cultures et religions

3.1. *Pythagore: nombres pairs et impairs, le rôle de 10*

On sait que Pythagore qui vécut au 6e siècle avant notre ère (~569 ~500) avait fondé une sorte de secte mathématico-religieuse. Les mathématiques, et surtout les nombres y jouaient un rôle fondamental. Il est intéressant de voir qu'il reprend un certain nombre de croyances qui ont cours dans le bassin méditerranéen. Il met en avant les trois premiers nombres entiers 1, 2 et 3 qu'il met en parallèle avec le singulier, le duel et le pluriel, avec les trois personnes de la conjugaison (tout au moins au singulier). Il est intéressant de remarquer que cela correspond à la façon dont se construit la connaissance des nombres chez l'enfant où le passage de 3 à 4 est un obstacle épistémologique.

Dans une société patriarcale, le 1 est associé au masculin le 2 au féminin et d'une façon générale les nombres impairs sont masculins et les nombres pairs sont féminins. Cela résulte explicitement du fait que les nombres pairs sont divisibles par 2 et qu'on y associe de façon symbolique les mécanismes de la reproduction, où la femme «se divise en deux» lors de l'accouchement.

La somme des quatre premiers entiers donne 10 ce sera la tétrakys. 10 apparaît comme parfait puisque base de la numération des Grecs. Schématiquement 1, 2 et 3 sont les nombres des hommes et 4 celui des dieux. Dans la mystique pythagoricienne la somme des entiers successifs joue un rôle important et d'une façon générale le lien entre multiplication et addition, d'où la notion de nombre parfait (6, 28,…) et de nombres amiables (comme 220 et 284).

3.2. *Méso-Amérique: le rôle de 20 et de 13*

En Amérique centrale le système de numération est de base 20, nombre qui va donc jouer un rôle très important dans l'établissement du calendrier qui sera organisé autour de période de 20 jours. Un autre nombre important est le nombre 13 qui correspond au nombre de cieux. 13 est un nombre sacré.

Les Mayas et les Aztèques utiliseront ainsi un calendrier de $20 \times 13 = 260$ jours, calendrier religieux fonctionnant en parallèle avec un calendrier civil de $20 \times 18 + 5 = 365$ jours. Cette intervention de 18 sera à l'origine d'une singulière irrégularité dans la numération utilisée pour compter les jours.

3.3. Les Babyloniens et la consécration des planètes: le nombre 7

Le nombre 7 est un nombre maléfique pour les Babyloniens. Ceci implique qu'il est préférable de ne rien faire tous les sept jours de peur que ce qui est fait tourne à la catastrophe. Il est à peu près certain que cette période de sept jour est lié au quart de lunaison. Une heureuse coïncidence avec le nombre de «corps célestes» va renforcer la stabilité du nombre sept. Chaque jour va finir par se voir attribuer un des sept corps célestes. Il semble même que chaque heure du jour et de la nuit ait été dédiée à un des corps célestes, bien évidemment divinisé, chaque jour étant consacré à la divinité honorée lors de la première heure.

Ces propriétés particulières du nombre 7 ne se limitent pas à la seule région de Babylone. Il est certain, qu'avec des variantes, le nombre 7 joue un rôle important dans les civilisations voisines. C'est pourquoi, même si le pentateuque (genèse, exode, lévitique, nombres et deutéronome) a été rédigé après la captivité à Babylone (6e siècle avant notre ère) et a donc subi l'influence babylonienne, cette rédaction s'est faite sur une tradition orale bien antérieure datant au moins de Moïse (13e siècle).

3.4. Se démarquer des autres: le calendrier musulman

La construction d'un calendrier avec ses fêtes (ses jours sacrés) ses interdits,… se base sur la culture, au sens large, du peuple qui doit utiliser ce calendrier. (Je ne veux pas entrer dans les détails des interactions entre les dirigeants religieux ou civils et les pratiques du peuple). Mais un peuple peut également rechercher son identité en se démarquant ou en s'opposant à ses voisins. C'est ainsi que quand le prophète Mahomet a fédéré les tribus arabes, il l'a fait dans un contexte de concurrence entre schématiquement trois religions: la juive, la chrétienne et la polythéiste. Il a imposé un calendrier de douze mois lunaires interdisant l'usage d'un treizième mois à l'instar des juifs ce que faisaient certaines tribus. C'est pourquoi on trouve dans le Coran, sourate 9, verset 36 et 37: «Oui, le nombre de mois, pour Dieu, est de douze mois inscrits dans le Livre de Dieu …. Le mois intercalaire n'est qu'un surcroît d'infidélité ».

4. Approximations rationnelles

4.1. *Suites de Farey*

On appelle suite de Farey d'ordre n l'ensemble ordonné F_n des nombres rationnels compris entre 0 et 1 et dont la forme réduite a un dénominateur inférieur ou égal à n. Voici les premières suites de Farey.

F_1	$\frac{0}{1}$																		$\frac{1}{1}$
F_2	$\frac{0}{1}$									$\frac{1}{2}$									$\frac{1}{1}$
F_3	$\frac{0}{1}$						$\frac{1}{3}$			$\frac{1}{2}$			$\frac{2}{3}$						$\frac{1}{1}$
F_4	$\frac{0}{1}$				$\frac{1}{4}$		$\frac{1}{3}$			$\frac{1}{2}$			$\frac{2}{3}$		$\frac{3}{4}$				$\frac{1}{1}$
F_5	$\frac{0}{1}$			$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{4}$		$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{5}$		$\frac{1}{2}$		$\frac{3}{5}$	$\frac{2}{3}$		$\frac{3}{4}$	$\frac{4}{5}$			$\frac{1}{1}$
F_6	$\frac{0}{1}$		$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{4}$		$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{5}$		$\frac{1}{2}$		$\frac{3}{5}$	$\frac{2}{3}$		$\frac{3}{4}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{5}{6}$		$\frac{1}{1}$
F_7	$\frac{0}{1}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{2}{7}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{3}{7}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{4}{7}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{5}{7}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{5}{6}$	$\frac{6}{7}$	$\frac{1}{1}$

La présentation montre que l'on passe d'une suite (d'une ligne) à la suivante en intercalant entre deux éléments $\frac{a}{b}$ et $\frac{c}{d}$ l'élément $\frac{a+c}{b+d}$ pourvu que $b+d$ soit inférieur ou égal à n. La démonstration de ce résultat dépasse le cadre du présent exposé.

Ces suites peuvent se prolonger au-delà de 1 en ajoutant 1 puis 2 puis 3… aux nombres fractionnaires qui apparaissent dans la table précédente.

L'intérêt de ces suites connues depuis longtemps mais principalement étudiées par le physicien John Farey au début du XIXe siècle, réside dans le fait qu'il est très facile de les utiliser pour trouver une approximation rationnelle d'un nombre réel donné r. Il suffit de construire les fractions de F_n qui encadrent r. Cela se fait à partir d'un encadrement donné $\frac{a}{b} < r < \frac{c}{d}$ en testant la position de $\frac{a+c}{b+d}$ par rapport à r. Voici à titre d'exemple ce que cela donne pour le nombre e base des logarithmes népériens ($e \approx 2{,}7182818\ldots$).

val inf	$\frac{2}{1}$	$\frac{5}{2}$	$\frac{8}{3}$	$\frac{8}{3}$	$\frac{19}{7}$	$\frac{19}{7}$	$\frac{19}{7}$	$\frac{19}{7}$	$\frac{19}{7}$	$\frac{106}{39}$	$\frac{106}{39}$
val sup	$\frac{3}{1}$	$\frac{3}{1}$	$\frac{3}{1}$	$\frac{11}{4}$	$\frac{11}{4}$	$\frac{30}{11}$	$\frac{49}{18}$	$\frac{68}{25}$	$\frac{87}{32}$	$\frac{87}{32}$	$\frac{193}{71}$
nvl val	$\frac{5}{2}$	$\frac{8}{3}$	$\frac{11}{4}$	$\frac{19}{7}$	$\frac{30}{11}$	$\frac{49}{18}$	$\frac{68}{25}$	$\frac{87}{32}$	$\frac{106}{39}$	$\frac{193}{71}$	$\frac{299}{110}$
test	2,5000	2,6667	2,7500	2,7143	2,7273	2,7222	2,7200	2,7188	2,7179	2,7183	2,7182

Nous obtenons ainsi les meilleures approximations rationnelles à l'aide de fractions dont le dénominateur ne dépasse pas une quantité donnée.

4.2. Algorithme d'Euclide et fractions continues

Une autre façon d'obtenir de bonnes approximations d'un nombre réel est d'utiliser l'algorithme d'Euclide pour la recherche du pgcd de deux nombres. On effectue des divisions successives avec reste. Voici l'exemple de la recherche du pgcd de 300 et 108.

$$\begin{aligned} 300 &= 108 \times 2 + 84 & \qquad a &= b \times q_1 + r_1 \\ 108 &= 84 \times 1 + 24 & \qquad b &= r_1 \times q_2 + r_2 \\ 84 &= 24 \times 3 + 12 & \qquad r_1 &= r_2 \times q_3 + r_3 \\ 24 &= 12 \times 2 + 0 & \qquad r_2 &= r_3 \times q_4 + r_4 \end{aligned}$$

Le dernier reste non nul correspond au pgcd (ici 12). On remarque alors qu'on peut écrire sur l'exemple précédent:

$$\frac{300}{108} = 2 + \frac{84}{108} = 2 + \frac{1}{\frac{108}{84}} = 2 + \frac{1}{1 + \frac{24}{84}} = 2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{3 + \frac{12}{24}}} = 2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{3 + \frac{1}{2}}}$$

On obtient ce qu'on appelle une fraction continuée. On voit apparaître dans l'exemple précédent la suite des quotients successifs (2 ; 1 , 3 , 2) qui est ici finie. Il est à noter que si on arrête la suite avant son terme, par exemple à (2 ; 1 , 3) on obtient la fraction $2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{3}} = \frac{11}{4}$ qui vaut 2,75 à comparer à $\frac{300}{108}$ qui vaut à peu près 2,778.

C'est une bonne approximation.

L'idée est de généraliser ce processus à un nombre réel. Comme nous voulons que les quotients successifs soient entiers nous allons partir de $a = r$, $b = 1$ et $q_1 = [r] = \left[\frac{r}{1}\right]$ la partie entière de r ce qui conduit à r_1 égale à la partie décimale de r. A l'étape suivante nous prendrons $q_2 = \left[\frac{1}{r_1}\right] = \left[\frac{b}{r_1}\right]$ et ainsi de suite $q_i = \left[\frac{r_{i-2}}{r_{i-1}}\right]$. (Le crochet indiquant systématiquement la partie entière). Voyons ce que cela donne avec π.

$$\pi = 3,141\,592\ldots = 1 \times 3 + 0,141\,592$$

$$1 = 0,141\,592\ldots \times \left[\frac{1}{0,141592}\right] + r_2 = 0,141\,592\ldots \times 7 + 0,008\,851\ldots$$

$$0,141\,592\ldots = 0,008\,85\ldots \times \left[\frac{0,141592}{0,008851}\right] + r_3 = 0,008\,851\ldots \times 15 + 0,008\,821\ldots$$

$$0,008\,851\ldots = 0,008\,821\ldots \times \left[\frac{0,008851}{0,008821}\right] + r_4 = 0,008\,821\ldots \times 1 + 0,000\,030\ldots$$

On voit ainsi apparaître la suite (3 ; 7 , 15 , 1 ,...) qui conduit aux approximations $3, \frac{22}{7}$ (donnée par Archimède), $\frac{333}{106}$ et $\frac{355}{113}$ cette dernière fraction ayant été publiée par Adrien Métius (mais connue des Chinois depuis le Ve siècle).

Avec une calculatrice on construit très facilement la suite des quotients en partant de r en retranchant la partie entière (premier quotient) qu'on lit directement sur l'affichage, puis en prenant l'inverse du résultat, on en retranche la partie entière (deuxième quotient) et on prend l'inverse du résultat, etc.

Les fractions obtenues par cette méthode apparaissent également dans les suites de Farey. Cependant la précision obtenue par ces fractions successives $\frac{p}{q}$ est excellente puisqu'elles approchent le nombre à moins de $\frac{1}{q^2}$ près. C'est en ce sens les meilleures approximations possibles.

4.3. *Dans la pratique*

Il est bien évident que l'humanité n'a pas disposé instantanément de ces approximations rationnelles. C'est par l'observation attentive sur des générations qu'une mesure de plus en plus exacte des périodes des corps célestes a pu être établie. Par le fait même que l'unité de base est la journée, la mesure s'effectuait à l'aide d'une fraction rationnelle et ce d'autant plus facilement que la notion d'irrationalité n'est apparue que tardivement. Par ailleurs il s'agit de rechercher un ordre dans le cosmos, ordre caché par les dieux et que l'homme doit essayer de retrouver pour comprendre et suivre la volonté des dieux. Or le nombre irrationnel est, comme son nom l'indique, peu capable de représenter la volonté des dieux.

Nous savons aujourd'hui qu'il est inutile de chercher une précision extrême de la période des différents corps du système solaire car le mouvement est chaotique à l'échelle du million d'années. Par conséquent les nombres rationnels, avec de petits dénominateurs suffisent amplement pour la construction de calendriers parfaitement rigoureux à l'échelle des civilisations.

Fractions continues et suites de Farey seront donc pour nous un guide permettant de comprendre d'où sortent les approximations utilisées par les diverses cultures.

4.4. *Introduction des cycles; retour sur les calendriers*

Tous les calendriers cherchent à concilier des phénomènes périodiques dont les périodes sont dans un rapport peu simple. Tous les calendriers admettent l'unité du jour et y rajoutent soit la lunaison, soit l'année tropique, soit les deux ou d'autres phénomènes. Ils cherchent ensuite à trouver une période commune. Cela est rigoureusement impossible mais on peut trouver d'excellentes approximations.

Prenons l'exemple d'un calendrier qui veut concilier le nombre 7 et l'année tropique. Il faut donc concilier l'année tropique avec les jours. Différentes approximations peuvent être proposées. Par exemple 365 +1/4 jours ce qui correspond à un cycle de 4 ans, avec 3 années communes de 365 jours et une année abondante (bissextile) de 366 jours. Combiné avec le cycle de 7 jours, imposé par des considérations religieuses, nous obtenons un cycle de 28 années. Ce cycle de 28 années est appelé cycle solaire. Il permet de retrouver les mêmes jours de la semaine de 7 jours aux même date de l'année. Ce cycle est utilisé dans le calendrier julien.

Prenons un autre exemple, celui des calendriers méso-américains. L'approximation de l'année est de 365 jours ($365 = 5 \times 73$). Mais il faut la combiner avec les nombres 20 (imposé par la numération) et le nombre 13 (imposé par la religion) – Cela correspond aux 260 jours du calendrier religieux ($260 = 4 \times 5 \times 13$) . Le plus petit commun multiple est alors une période de 52 années appelé cycle calendaire (calendar round en anglais). Il se trouve que ce cycle de 52 années correspond aussi à 32,5 révolutions synodiques de Vénus (de 584 jours), ce qui veut dire qu'au bout de 2 cycles calendaires Vénus revient sensiblement à la même position à la même date dans les deux calendriers, civil et religieux. Cause ou conséquence, Vénus joue un rôle très important dans les civilisations méso-américaines et son mouvement était particulièrement bien étudié.

Prenons un dernier exemple. On cherche à concilier la lunaison et l'année tropique. Il nous faut donc trouver une bonne approximation rationnelle de l'année exprimée en lunaisons. Différentes solutions ont été proposées et ont servi de modèle à des calendriers: $12 + \frac{1}{2}$; $12 + \frac{1}{3}$; $12 + \frac{2}{5}$; $12 + \frac{3}{8}$ (cette dernière valeur correspondant à l'octaéride des calendriers grecs) ; $12 + \frac{4}{11}$ et enfin $12 + \frac{7}{19}$ donnant un cycle de 19 années, appelé cycle de Méton en l'honneur de son découvreur (Ve siècle avant notre ère). Le rang d'une année dans le cycle s'appelle le nombre d'or de l'année. D'autres approximations (meilleures) ont été proposées mais elles ne furent jamais reprises dans les calendriers.

Dans un cycle, on va devoir mélanger des éléments dont la durée varie d'une unité. Ainsi dans notre calendrier avons-nous des années de 365 et d'autres de 366 jours. Dans le cycle de Méton nous aurons des années de 12 et de 13 mois. Le but est d'obtenir au bout du cycle une valeur moyenne la plus précise possible. Comment intercaler les éléments longs et les éléments courts ? L'idée est d'attendre que l'écart soit supérieur à une unité pour placer un élément long, ou bien d'attendre qu'il soit supérieur à une demi-unité. On a alors l'impression de ne pas trouver le même rythme d'intercalation mais cela dépend tout bonnement du choix de l'origine. Voici l'exemple de l'octaéride des Grecs:

1	2	3	4	5	6	7	8	1	2	3	4	5	6	7	8
2	3	4	5	6	7	8	1	2	3	4	5	6	7	8	1
3	4	5	6	7	8	1	2	3	4	5	6	7	8	1	2
4	5	6	7	8	1	2	3	4	5	6	7	8	1	2	3
5	6	7	8	1	2	3	4	5	6	7	8	1	2	3	4
6	7	8	1	2	3	4	5	6	7	8	1	2	3	4	5
7	8	1	2	3	4	5	6	7	8	1	2	3	4	5	6
8	1	2	3	4	5	6	7	8	1	2	3	4	5	6	7

(En gris, les années de 13 mois dont le rang change selon le choix du début du cycle).

5. Quelques exemples de calendriers

La façon la plus simple de mesurer le temps qui passe est de compter les jours. Mais les nombres utilisés deviennent vite trop grands et le regroupement en lunaisons s'impose très vite. C'est une unité pratique, facilement accessible à l'observation et très commode pour les peuples de pasteurs nomadisant dans des régions peu sensibles aux saisons. Le regroupement naturel des lunaisons est de dix chez les peuples dont le système numéral est de base dix (indo-européens, sémitiques) et c'est pourquoi les premiers calendriers italiques (ancêtre des Romains) et arabes ne comportaient que 10 mois. Le passage à l'agriculture implique le respect de l'année tropique ce qui impose très rapidement un regroupement par douze et une intercalation d'un 13e mois de temps en temps de manière à ce qu'un mois de même nom reviennent toujours à la même saison. La complication d'un tel calendrier lui fait rapidement préférer un calendrier purement solaire d'environ 365 jours où les mois n'ont plus rien à voir avec les lunaisons.

5.1. *Jour julien*

Compter les jours est la façon la plus naturelle de mesurer le temps. Les astronomes qui, à travers les siècles ont cherché à rassembler les observations des générations précédentes pour les relier aux leurs ont été amenés à compter les jours. Pour que l'opération soit la plus simple possible ils ont créé des ères. Selon les époques on a rattaché ces ères à une origine plus ou moins importante. L'intérêt étant d'éviter des nombres négatifs dont l'usage ne s'est répandu qu'à partir du XIVe siècle (au moins en Europe). On peut ainsi citer :

L'ère des Séleucides datant de ~312 correspondant à l'entré triomphale de Séleucos 1er à Babylone après sa victoire à Gaza.

L'ère de Nabonassar, créée par l'astronome Ptolémée au IIe siècle de notre ère. Elle doit son nom au plus ancien souverain babylonien auquel il put remonter: Nabonassar qui prit le pouvoir le 26 février 747 avant notre ère. Cette ère est très importante car elle servit pendant longtemps de repère chronologique pour les observations astronomiques et pour les historiens.

L'ère de la création du Monde, utilisée dans le calendrier juif, l'ère de l'Hégire, utilisée dans le calendrier musulman, l'ère chrétienne, bien sûr, même si l'on préfère dire «notre ère» pour éviter toute susceptibilité religieuse !

C'est en 1583 que Joseph-Juste Scaliger propose de compter les jours les uns après les autres en prenant comme origine le lundi 1er janvier - 4712 à midi en temps universel. Il s'agissait de trouver une origine suffisamment lointaine pour ne pas avoir de nombres négatifs, d'utiliser les cycles solaires (de 28 ans) et de Méton (de 19 ans) auquel il ajoute un cycle de 15 ans dit indiction romaine et qui avait été créé par l'empereur Constantin pour remplacer les olympiades et correspondant à la périodicité des recensements nécessaires à la levée des impôts. Il a donc chercher une année commençant un lundi pour laquelle le nombre d'or et l'indiction valaient 1. D'où son choix. À partir de cette origine, il compte les jours les uns après les autres, le jour numéro 1 finissant le 2 janvier - 4712 à midi.

Scaliger donne le nom de période julienne à cette ère, car il conçoit qu'elle ne dure que 28 x 15 x 19 = 7980 ans, au bout de ce laps de temps on devra recommencer le compte, d'où la notion de période. De plus il la baptise «julienne» puisque, converti au protestantisme, il refuse la réforme grégorienne de 1582 ; il a d'ailleurs échappé de peu à la St-Barthélémy (24 août 1572) car en route pour la Pologne pour y régler des affaires. Il reviendra prudemment sur Genève.

Le numéro du jour dans la période julienne s'appelle le jour julien et il est régulièrement publié par les instances astronomiques de tous les pays (en France le Bureau des Longitudes). Un tel décompte permet une comparaison immédiate de deux événements astronomiques (ou historiques). Pour des raisons pratiques les durées sont regroupées en années juliennes d'exactement 365,25 jours.

5.2. *Calendrier musulman*

On tient compte exclusivement des phases de la lune, mais on a regroupé les lunaisons par 12 bien qu'il n'y ait que dix noms différents qui sont :

I - Al-Mouharram (30)	II - Safar (29)	III - Rabi le 1er (30)	IV - Rabi le 2d (29)
V - Djoumada la 1ère (30)	VI - Djoumada la 2de (29)	VII - Radjab (30)	VIII - Cha'ban (29)
IX - Ramadan (30)	X - Chaououal (29)	XI - Dou-l-Qa'da (30)	XII - Dou-l-Hidjja (29/30)

Les approximations doivent donc être faites sur la durée de douze lunaisons, soit 354,367056 jours, appelé année lunaire. Comme il faut toujours travailler avec un nombre entier de jours on aura soit des années de 354 jours (années communes) soit de 355 jours (années abondantes). En gros deux années sur trois sont communes l'autre étant abondante. 354 jours font 6 mois (les mois pairs) de 29 jours et 6 mois (les mois impairs) de 30 jours ce qui correspond à une lunaison moyenne de 29,5 jours (au lieu de 29,530 ...). On ajoute un jour au dernier mois de l'année lunaire lors des années abondantes.

Pour être plus précis, on cherche des approximations rationnelles et on trouve: $354 + \frac{1}{3}$; $354 + \frac{3}{8}$; $354 + \frac{4}{11}$; $354 + \frac{7}{19}$; $354 + \frac{11}{30}$. Les cycles de 8 ans et de 30 ans sont utilisés. Le premier a été utilisé au début puis a été repris par les Turcs. Il a le gros avantage d'être compatible avec le cycle de la semaine. En effet 8 x 354 + 3 = 2835 = 7 x 405. Le cycle de 30 ans est actuellement utilisé dans le calendrier musulman officiel, au moins dans les pays de langue arabe.

Les années abondantes sont placées selon le rythme 3 , 6 , 8 pour un cycle de 8 ans. Pour le cycle de 30 ans, le rythme est 2, 5, 7, 10, 13, 16, 18, 21, 24, 26, 29.

5.3. *Calendriers solaires*

La plupart des calendriers solaires se souviennent d'avoir été lunaires dans un passé plus ou moins lointain, d'où l'existence de mois d'environ 30 jours. On a donc douze mois plus éventuellement quelques jours (5 ou 6) qui permettent d'atteindre la durée de l'année solaire.

Les peuples qui utilisent une année de 365 jours ont ce qu'on appelle un calendrier vague. Les différents mois se déplacent dans les saisons en un cycle d'environ 1460 ans. Ce fut le cas du calendrier égyptien. Ce cycle de 1460 années reçut le nom de cycle sothiaque car il voyait revenir le lever héliaque de Sirius (Sothis chez les égyptiens) à la même date.

La meilleure approximation suivante est celle de 365,25 jours qui correspond au calendrier julien. Une année sur quatre est bissextile et comporte 366 jours. Ce calendrier fut créé par Jules César, d'où son nom, sur les conseils de l'astronome égyptien Sosigène en - 44. Un tel calendrier prend un retard sur le soleil d'environ 1 jour tous les 128 ans.

Faire plus précis revient à trouver un rythme plus compliqué. C'est le décalage progressif vers le début de l'année de l'équinoxe de printemps fixé initialement au 25 mars qui alerta les autorités religieuses (cela était important pour la fixation de la date de Pâques). Une réforme aurait dû avoir lieu vers 1347-1348 mais la peste noire qui s'abattit sur l'Europe en décida autrement. Finalement la réforme eut lieu à partir de 1582 sous le pontificat de Grégoire XIII. Les états protestants et orthodoxes la refusèrent. Au lieu de prendre l'approximation de $365 + \frac{1}{4}$, il faudrait prendre l'approximation $365 + \frac{7}{29}$ ou $365 + \frac{8}{33}$.

En fait l'attraction du siècle imposa un cycle de 4 siècles car $\frac{8}{33} = \frac{24}{99}$ presqu'égal à $\frac{24}{100}$. On a donc en général 24 année bissextile par siècles (l'année séculaire n'est pas bissextile) et tous les 4 siècles 25 années bissextiles comme dans le calendrier julien. C'est ce qui fait que 2000 est bissextile alors que 1900 ne l'était pas.

5.4. *Calendriers luni-solaire*

5.4.1. *Le calendrier juif*

C'est un calendrier assez complexe puisqu'il faut tenir compte à la fois du jour, de la lunaison, de l'année tropique et d'interdits religieux qui résulte de l'histoire accumulée des juifs. Les mois lunaires vont voir quasi alterner des mois de 29 et de 30 jours. Les années seront de 12 dites communes ou 13 mois dites embolismiques (ce qui veut dire «ajouter» en grec). Les interdits religieux vont faire qu'il ne saurait y avoir 2 fêtes considérées comme des «sabbats» deux jours consécutifs. L'année ne peut donc commencer ni par un dimanche, ni par un mercredi, ni par un vendredi. Pour cela les années communes pourront avoir 353 (années défectives), 354 (années régulières) ou 355 (années abondantes) jours. De même pour les années embolismiques qui pourront avoir 383 (défectives), 384 (régulières) ou 385 (abondantes) jours.

Les règles d'intercalation des années embolismiques se font suivant le cycle de Méton de 19 années et les années embolismiques y seront placées aux rangs 3, 6, 8, 11, 14 et 19. Le choix de la nature de l'année, défective, régulière ou abondante suit 5 règles, dites règles de Hillel. Hillel II est un patriarche

qui fit les calculs vers 350 de notre ère. Ce système fut définitivement adopté vers le Xe siècle après bien des discussions. Il n'est pas question d'entrer dans les détails de ces règles dans le présent exposé.

Il y a finalement six types d'années et trois mois peuvent voir leur durée varier. Le système est fort complexe, d'autant plus qu'il y a à la fois une année civile commençant vers l'équinoxe d'automne et une année religieuse commençant vers l'équinoxe de printemps. Si le décompte des années se fait d'après le calendrier civil, le mois supplémentaire des années embolismique est ajouté à la fin de l'année religieuse, c'est-à-dire au milieu de l'année civile !

	Années					
	Communes			Embolismiques		
	Défectives	Régulières	Abondantes	Défectives	Régulières	Abondantes
Tisri	30	30	30	30	30	30
Heshvan	29	29	30	29	29	30
Kislev	29	30	30	29	30	30
Tevet	29	29	29	29	29	29
Shevat	30	30	30	30	30	30
Adar	29	29	29	30	30	30
Véadar	0	0	0	29	29	29
Nisan	30	30	30	30	30	30
Iyar	29	29	29	29	29	29
Sivan	30	30	30	30	30	30
Tamouz	29	29	29	29	29	29
Av	30	30	30	30	30	30
Elul	29	29	29	29	29	29
TOTAL	353	354	355	383	384	385

Dans la pratique religieuse, lors des années embolismiques, c'est le mois de Véadar qui voit célébrer les fêtes du mois de Adar. Tout se passe comme si on ajoutait un mois de 30 jours entre le 11e et le 12e mois de l'année religieuse.

5.4.2. *La date de Pâques*

La date de Pâques a été fixée aux premiers temps de l'église chrétienne en liaison avec le calendrier luni-solaire juif. C'est pourquoi elle suit sensiblement un cycle de 19 ans. Elle est théoriquement fixée au premier dimanche qui suit le 14e jour de la lune (la pleine lune) qui atteint cet âge à l'équinoxe de printemps ou immédiatement après.

Dans le calendrier julien, il est relativement facile de concilier cette définition en un cycle de 19 x 28 = 532 ans. On construit alors très facilement des calendriers religieux perpétuels comme ceux qu'on trouve dans les livres des heures (les très riches heures du Duc de Berry par exemple). Attention il s'agit de lunes théoriques qui peuvent avoir un ou deux jours d'écart avec la lune réelle.

Dans le calendrier grégorien, la date de Pâques suit un rythme très compliqué qui fait bien évidemment intervenir le cycle de Méton, le cycle solaire et aussi ce qu'on appelle l'épacte et qui est rattaché à l'âge de la lune au 1er janvier. L'épacte peut prendre 30 valeurs différentes et saute parfois lors des changements de siècle !

6. Conclusion: vers une réforme ?

Quand les révolutionnaires français de 1789 décidèrent d'inventer le système métrique, il faisait œuvre unificatrice dans un royaume morcelé en divers systèmes de mesure. Malgré des tentatives d'unification depuis Charlemagne, les unités de même nom avaient des valeurs différentes d'une province à l'autre, d'une ville à l'autre. L'unification fut accueillie avec soulagement par tous les marchands et commerçants et il fut relativement aisé de convaincre d'autres royaumes européens de se rallier au système métrique. Ce ne fut pas le cas de l'Angleterre qui disposait depuis le XIIIe siècle d'un système unifié même s'il n'était pas simple.

Quand les révolutionnaires français voulurent, sur leur lancée, décimaliser la mesure du temps ils se heurtèrent à bien plus forte partie. Des questions de pouvoir intervenaient, mais le système était unifié et ce fut un échec.

Aujourd'hui le temps est mesuré en seconde, unité légale. Le calendrier civil grégorien est d'usage quasi généralisé sur toute la terre et le changer n'est pas à l'ordre du jour. Les scientifiques disposent d'unités commodes comme le jour julien ou l'année julienne de 365,25 jours qui permettent de comparer des dates anciennes et les progrès techniques dispensent de conversions fastidieuses entre les différentes unités.

Finalement, ce n'est pas le simple que l'on cherche mais l'unité. Alors, à moins d'un bouleversement complet de la civilisation actuelle, le calendrier grégorien a encore de belles années devant lui.

© Société vaudoise des Sciences naturelles, CH-1005 Lausanne.
Droits de reproduction réservés.

Rédaction:
Pierre Gex, Institut de Géophysique. bâtiment du collège propédeutique, CH-1015 Lausanne
Imprimerie: Edipresse Imprimeries Réunies Lausanne s.a., CH-1020 Renens.