

Zeitschrift: Bulletin de la Société Vaudoise des Sciences Naturelles
Herausgeber: Société Vaudoise des Sciences Naturelles
Band: 81 (1992)
Heft: 1

Artikel: Aperçu de l'histoire de l'équation du deuxième degré
Autor: Sesiano, Jacques
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-279870>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 12.01.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

Aperçu de l'histoire de l'équation du deuxième degré

par

Jacques SESIANO¹

Summary.—SESIANO J., 1992. Historical survey of the quadratic equation. *Bull. Soc. vaud. Sc. nat.* 81: 271-298.

A historical survey of the resolution of quadratic equations to early modern times.

Key-words: History of mathematics, early algebra.

Résumé.—Sesiano J., 1992. Aperçu de l'histoire de l'équation du deuxième degré. *Bull. Soc. vaud. Sc. nat.* 81: 271-298.

Survol historique de la résolution des équations du second degré, des origines au début des temps modernes.

On enseigne aujourd'hui dans les gymnases que l'équation du second degré $ax^2+bx+c=0$, dans laquelle les coefficients a , b , c sont réels (positifs ou négatifs, avec $a \neq 0$), possède les deux solutions

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a},$$

et que ces solutions seront réelles et différentes si $b^2 > 4ac$, ou bien égales si $b^2 = 4ac$, et qu'elles seront toutes deux complexes, ou imaginaires, si $b^2 < 4ac$.

Si l'on suppose tous les termes divisés par a , l'équation s'écrira, posant $p = \frac{b}{a}$ et $q = \frac{c}{a}$, $x^2 + px + q = 0$, dont les solutions seront

$$x_{1,2} = \frac{-p \pm \sqrt{p^2 - 4q}}{2}.$$

¹Département de Mathématiques, Ecole Polytechnique Fédérale, CH-1015 Lausanne.

Il apparaît de cette dernière expression que, sous cette forme réduite, les relations unissant solutions et coefficients seront

$$x_1 + x_2 = -p$$

$$x_1 \cdot x_2 = q,$$

des relations que l'on associe au nom du mathématicien français F. Viète (1540-1603), qui en a généralisé la forme à des équations de degrés plus élevés².

Que ces solutions soient réelles –inégales ou confondues– ou bien complexes, elles sont au nombre de deux, qui est le nombre caractérisant le degré de l'équation. En effet, C.F. Gauß (1777-1855) a plus généralement démontré que toute équation de degré n possédait exactement n solutions, réelles ou complexes (cette dernière dénomination naît avec lui). L'affirmation de ce théorème, souvent appelé aujourd'hui «théorème fondamental de l'algèbre», était apparue néanmoins quelque deux siècles auparavant, lorsque A. Girard (1595-1632) avait mentionné dans son «*Invention nouvelle en algebre*» (Amsterdam 1629) que «*toutes les equations d'algebre reçoivent autant de solutions que la denomination de la plus haute quantite le demonstre*». Descartes (1596-1650) lui faisait en quelque sorte écho, amplifiant même la notoriété du théorème du fait de la célébrité de sa «*Géométrie*» –parue en 1637 en appendice du «*Discours de la méthode*»– où il déclarait dans les premières pages du Livre III: «*Scachés donc qu'en chasque Equation, autant que la quantité inconnue a de dimensions, autant peut il y avoir de diverses racines, c'est a dire de valeurs de cete quantité. Puis: Au reste tant les vrayes racines que les fausses (les négatives) ne sont pas tousjours reelles; mais quelquefois seulement imaginaires; c'est a dire qu'on peut bien tousjours en imaginer autant que jay dit en chasque Equation; mais qu'il n'y a quelquefois aucune quantité, qui corresponde a celles qu'on imagine*». Telle est, incidemment, la première apparition de la dénomination d'imaginaires pour ces nombres, restée encore en vigueur aujourd'hui, et qui garde la mémoire de la défiance avec laquelle ils furent longtemps regardés.

Aussi n'est-on pas peu surpris de voir que, dans le premier recueil des «*Bulletins des séances de la Société vaudoise des Sciences naturelles*», le professeur J. Gay se doive de s'inscrire en faux contre l'affirmation de L. Lefébure de Fourcy, qui pensait avoir montré, dans les §§185-186 de ses «*Leçons d'algèbre*» (Paris 1833 –1^{re} édition–, ..., 1880 –9^e éd.) destinées à la préparation des examens d'entrée à l'Ecole polytechnique, qu'une équation du second degré pouvait posséder, dans le cas où a tendait vers zéro, une troisième solution.

L'existence même de ce débat pourrait suggérer au lecteur actuel que la résolution de l'équation du deuxième degré était encore matière à débat au milieu du XIX^e siècle. L'aperçu qui suit a pour but de montrer qu'elle a en fait une histoire antérieure fort longue, commençant aux premiers temps de l'histoire des mathématiques, mais que la reconnaissance de ses *deux*

²Si l'équation $x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \dots + a_1x + a_0 = 0$ a les solutions x_1, x_2, \dots, x_n , alors $-a_{n-1}$ est la somme de ces racines, $+a_{n-2}$ la somme de tous les produits de paires de ces racines, $-a_{n-3}$ celle de tous les produits de trois racines, et ainsi de suite avec alternance des signes, a_0 se réduisant au produit des n racines multiplié par $(-1)^n$.

solutions devint surtout effective en relation avec le théorème fondamental de l’algèbre plutôt qu’elle ne fut liée aux extensions successives du domaine des nombres jalonnant l’évolution des mathématiques. On ne se soucia en effet tout d’abord, et plus de trois millénaires durant, que de solutions *positives*. A la fin du moyen âge, on fut amené à considérer des solutions en nombres *négatifs*, mais le rôle de l’équation du deuxième degré y fut presque inexistant. Enfin, le XVI^e siècle vit l’apparition des nombres complexes, mais là encore cela ne concerna guère l’équation du deuxième degré.

1. L’ÉQUATION DU DEUXIÈME DEGRÉ EN MÉSOPOTAMIE

Notre connaissance des mathématiques mésopotamiennes remonte à une cinquantaine d’années, lorsque débuta la traduction de tablettes mathématiques qui dataient, pour la plupart, de -1800 environ. Quoique les textes en fussent écrits en accadien, la langue des envahisseurs sémitiques venus en Mésopotamie vers -2000, divers indices amenèrent à penser que leur contenu devait remonter aux habitants antérieurs de la Mésopotamie, les Sumériens.

Deux traits marquants de ces mathématiques d’origine sumérienne sont à relever. Le premier est l’utilisation d’un système de numération de base sexagésimale qui, repris par les Accadiens, leur servit non seulement à transcrire sur des tablettes les textes mathématiques susmentionnés, mais aussi à enregistrer leurs propres observations des mouvements planétaires. Une telle quantité d’informations ne disparut pas complètement avec l’écriture cunéiforme: les astronomes grecs, en particulier Hipparche (-150) y eurent accès, et Ptolémée (+150) mentionne dans son ouvrage majeur, la «Syntaxe mathématique» ou «Almageste» (III,7), que, depuis le début du règne de Nabonassar (747 av. J.-C.), «l’on possède les anciennes observations, qui, en général, ont été conservées jusqu’à présent». L’utilisation de ces observations était d’autant facilitée que le même système sexagésimal avait entre-temps été adopté en Grèce pour l’astronomie. De mêmes causes appelant de mêmes effets, il allait encore être maintenu lors de la transmission de l’astronomie grecque au monde musulman, puis lors du passage de l’astronomie grecque et arabe en Europe par les traductions latines du XII^e siècle, en sorte que la division du cercle en degrés, minutes et secondes est restée en usage jusqu’à aujourd’hui.

Cette digression sur le système sexagésimal était souhaitable pour que soient rapportés ici des exemples illustrant une seconde découverte capitale des mathématiciens mésopotamiens, à savoir la résolution d’équations et de systèmes algébriques du second degré.

L’équation générale du second degré n’a pas toujours été considérée sous sa forme actuelle $ax^2+bx+c=0$. Depuis les temps mésopotamiens jusqu’à la Renaissance, voire –mais d’une manière moins rigide– au-delà, elle apparaît sous trois formes que l’on dirait immuables, qui toutes ne contiennent que des termes à coefficients positifs et peuvent ou doivent posséder une solution positive, la seule qui fût alors acceptée³. Ces trois types sont:

³Si Descartes avait posé l’égalité à zéro, on retrouve encore bien après l’égalité entre termes. Même Newton utilise dans son «Arithmetica universalis» de 1707 (1^{ère} édition) (1722 –2^e éd.) la forme, pour lui générale, $xx = px \cdot q$ (xx pour x^2 est alors usuel), où le point tient la place de l’un ou l’autre signe.

1. $ax^2 + bx = c$, avec la solution positive

$$x = \frac{-\frac{b}{2} + \sqrt{(\frac{b}{2})^2 + ac}}{a}.$$

2. $ax^2 + c = bx$, avec –pour autant que $(\frac{b}{2})^2$ soit supérieur à ac – les *deux* solutions positives

$$x = \frac{\frac{b}{2} \pm \sqrt{(\frac{b}{2})^2 - ac}}{a}.$$

3. $ax^2 = bx + c$, avec la solution positive

$$x = \frac{\frac{b}{2} + \sqrt{(\frac{b}{2})^2 + ac}}{a}.$$

Les tablettes cunéiformes conservées ne contiennent que peu d'exemples d'équations quadratiques. Il en ressort toutefois la connaissance des formules des premier et troisième types ci-dessus, comme l'attestent les deux problèmes suivants, contenus dans la tablette 13901 du British Museum⁵.

«*J'ai additionné la surface et le côté de mon carré: 45'.* Tu poseras 1, l'unité. Tu fractionneras en deux 1: 30'. Tu multiplieras 30' et 30': 15'. Tu ajouteras 15' à 45': 1. C'est le carré de 1. Tu soustrairas 30', que tu as multiplié, de 1: 30', le côté du carré».

L'équation de ce problème est donc de la forme $x^2+px=q$, avec $p=1$ et $q=45'$. Les calculs successivement effectués dans le texte sont les suivants:

$$\begin{aligned} \frac{p}{2} &= 30' \\ (\frac{p}{2})^2 &= (900'') = 15' \\ (\frac{p}{2})^2 + q &= 1 \\ \sqrt{(\frac{p}{2})^2 + q} &= 1 \\ \sqrt{(\frac{p}{2})^2 + q} - \frac{p}{2} &= 1 - 30' = 30' = x. \end{aligned}$$

⁴L'équation $ax^2+bx+c=0$ avec a, b, c positifs n'a pas de solution positive.

⁵Voir THUREAU-DANGIN (1938), p. 1. Dans la transcription ci-après des chiffres sexagésimaux, les fractions sexagésimales sont désignées par ' (parties de 60), " (parties de 60^2), alors que les entiers sexagésimaux sont représentés par la juxtaposition des facteurs des puissances de 60. Il importe de remarquer que l'écriture cunéiforme n'a aucun symbole permettant de distinguer les puissances (positives ou négatives) de 60, de sorte que l'ordre de grandeur des quantités connues ou calculées doit être déduit de quelque indication trouvée dans le problème.

Le traitement du problème qui le suit est tout à fait similaire:

«*J'ai soustrait de la surface le côté de mon carré: 14 30. Tu poseras 1, l'unité. Tu fractionneras en deux 1: 30'. Tu multiplieras 30' et 30': 15'. Tu (l') ajouteras à 14 30: 14 30 15'. C'est le carré de 29 30'. Tu ajouteras 30', que tu as multiplié, à 29 30': 30, le côté du carré».*

L'équation proposée, $x^2 - x = 14\ 30$, est de la forme $x = px + q$, avec $p = 1$ et $q = 14\ 30 = 14 \cdot 60 + 30 = 870$. La résolution montre que les calculs correspondent à l'application de la formule

$$\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 + q} + \frac{p}{2} = x.$$

On ne connaît pas, comme il a déjà été suggéré ci-dessus, un tel exemple d'application pour la formule du second cas. On se gardera toutefois de conclure à l'ignorance de cette formule: les exemples mésopotamiens d'*équations* quadratiques conservés sont rares, comme ils l'étaient sans doute déjà, relativement, au début du deuxième millénaire. En effet, beaucoup plus fréquents que les équations sont les *systèmes* du second degré, lesquels systèmes ne sont pas ramenés à des équations simples par élimination d'une variable, comme nous le ferions aujourd'hui, mais résolus par l'usage d'identités appropriées.

Tels sont par exemple les systèmes

$$\begin{cases} x + y = p \\ x \cdot y = q \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} x - y = p \\ x \cdot y = q, \end{cases}$$

où sont connus le produit et la somme, respectivement la différence, de deux grandeurs cherchées. Grâce à l'identité

$$\left(\frac{x+y}{2}\right)^2 - xy = \left(\frac{x-y}{2}\right)^2,$$

la demi-différence ou la demi-somme sera connue après l'extraction d'une racine, et l'identité

$$x, y = \frac{x+y}{2} \pm \frac{x-y}{2}$$

permettra la détermination des valeurs individuelles de nos deux inconnues.

De même, dans l'un et l'autre des deux systèmes

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = p \\ x + y = q \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} x^2 + y^2 = p \\ x - y = q, \end{cases}$$

l'application de l'identité

$$\left(\frac{x+y}{2}\right)^2 + \left(\frac{x-y}{2}\right)^2 = \frac{x^2 + y^2}{2}$$

nous fera connaître la demi-différence ou la demi-somme des inconnues, et nous ramènera ainsi à la situation finale précédente.

Les systèmes proposés n'apparaissent pas toujours sous ces formes simples, mais y sont souvent ramenés par des changements de variables

appropriés. L'exemple ci-après –qui correspondrait à une équation du type $x^2+q=px$ si l'on éliminait l'une des variables– en servira d'illustration⁶.

«*Un rectangle. J'ai multiplié la longueur par la largeur, j'ai ainsi construit une surface. Ensuite, j'ai ajouté à la surface ce dont la longueur excède la largeur: 3 3. Enfin, j'ai additionné la longueur et la largeur: 27. Que sont la longueur, la largeur et la surface? (...)*⁷. *Opère ainsi. Ajoute 27, la somme de la longueur et de la largeur, à 3 3: 3 30. Ajoute 2 à 27: 29. Tu fractionneras en deux 29: 14 30'. 14 30' fois 14 30': 3 30 15'. De 3 30 15', tu soustrairas 3 30: 15' est le reste. 15' est le carré de 30'. Ajoute 30' au premier 14 30': 15, la longueur. Tu retrancheras 30' du deuxième 14 30': 14, la largeur. 2, que tu as ajouté à 27, tu soustrairas de 14, la largeur: 12, la largeur vraie. Multiplie 15, la longueur, par 12, la largeur; 12 fois 15: 3 0, la surface. (...)*⁸».

Le système à résoudre est donc, désignant par x la longueur et par y la largeur⁹:

$$\begin{cases} xy + (x - y) = 3 3 (= 3 \cdot 60 + 3 = 183) \\ x + y = 27. \end{cases}$$

L'auteur ajoute alors à la première équation la seconde, puis augmente de 2 la seconde. Il obtient ainsi ce que nous écririons

$$\begin{cases} xy + 2x = x(y + 2) = 3 30 (= 210) \\ x + y + 2 = 29, \end{cases}$$

que l'on peut écrire, en posant $y' = y+2$,

$$\begin{cases} xy' = 3 30 \\ x + y' = 29. \end{cases}$$

Or, ce nouveau système permet l'application d'une des identités vues précédemment. On aura en effet

$$\left(\frac{x - y'}{2}\right)^2 = \left(\frac{x + y'}{2}\right)^2 - xy' = \left(\frac{29}{2}\right)^2 - 3 30,$$

en sorte que l'on trouvera que

$$\frac{x - y'}{2} = 30'.$$

Tel est bien le cheminement des calculs du texte, qui aboutissent finalement à

$$x, y' = \frac{x + y'}{2} \pm \frac{x - y'}{2} = 14 30' \pm 30' = 15 \text{ respectivement } 14;$$

la longueur est ainsi $x = 15$, la «largeur» $y' = 14$, la «largeur vraie» étant $y = 12$.

⁶Voir THUREAU-DANGIN (1938), p. 65.

⁷Le texte donne ici les résultats que la résolution va établir.

⁸Suit la preuve numérique des résultats trouvés.

⁹Les mots sumériens pour «longueur» et «largeur», conservés dans la traduction accadienne, jouent de fait le rôle de dénominations d'inconnues, au point de se détacher, dans certains problèmes, de leur sens originel.

Ces trois exemples nous permettent déjà de remarquer l'aspect qui est pour nous le plus caractéristique des mathématiques mésopotamiennes, à savoir le défaut d'explications. Ainsi, les résolutions ne contiennent aucune justification des calculs; elles paraissent présupposer la connaissance de formules ou d'identités de base dont le lecteur sait qu'on doit les appliquer, éventuellement après un travail préalable de transformation du problème. On remarque aussi que le détail des opérations arithmétiques n'est pas effectué; le lecteur est censé s'appuyer sur des tables de multiplication ou d'extraction de racines simples, et il est vrai que ce matériel ne devait pas lui faire défaut: il n'est guère de musée archéologique qui ne possède aujourd'hui quelque fragment de table de multiplication en écriture cunéiforme¹⁰.

2. L'ÉQUATION DU DEUXIÈME DEGRÉ EN GRÈCE

L'algèbre en Grèce se présente sous trois aspects. L'un est *pratique*, ou du moins en a l'apparence, et consiste à appliquer des formules dans des cas précis. Ce premier aspect, qui présente beaucoup d'analogie avec les méthodes mésopotamiennes —soit qu'il s'agisse d'une influence directe ou que l'usage d'identités pour la résolution de problèmes algébriques soit une première phase— se retrouve dans les papyri scolaires ainsi que dans divers écrits attribués à Héron d'Alexandrie (env. +60). Le second aspect, beaucoup plus *théorique* celui-là (il fait intervenir les propriétés arithmétiques de classes de nombres entiers), est celui qui intervient dans l'algèbre indéterminée de Diophante (env. +250), qui utilise tant un raisonnement qu'un symbolisme algébrique. Enfin, les «Eléments» d'Euclide (vers -300), l'ouvrage de base des mathématiques antiques, contient nombre de théorèmes démontrés *géométriquement* qui représentent en fait des relations entre grandeurs que l'on peut transcrire, avec une relative aisance, en langage algébrique. Celles qui concernent les équations du second degré seront mentionnées lorsque sera étudiée la période islamique.

Dans l'un et l'autre des deux premiers aspects on trouve des exemples d'équations du second degré. Le caractère succinct de leur résolution, avec peu ou pas de calculs intermédiaires (la solution étant parfois donnée directement), a provoqué chez les historiens des mathématiques jusqu'à la première moitié de ce siècle de longues discussions, dont l'objet était de savoir si oui ou non les Grecs étaient en possession d'une formule générale de résolution. L'étude ultérieure des textes cunéiformes a rendu de telles questions caduques, la connaissance de ces résolutions rétrogradant au domaine des mathématiques élémentaires.

La survie de l'algèbre des identités est illustrée par l'exemple suivant de Héron, qui calcule selon une formule qui n'est pas établie, mais que l'on peut déduire d'identités élémentaires, déjà utilisées en Mésopotamie et dont l'équivalent géométrique apparaît dans le livre II des «Eléments» d'Euclide. Il s'agit de déterminer la longueur des côtés u , v , w (en nombres rationnels) d'un triangle rectangle (donc tel que $u^2 + v^2 = w^2$) de façon que la somme de

¹⁰L'utilisation de tables de multiplication était en Mésopotamie une nécessité impérieuse; la connaissance des produits des 59 chiffres sexagésimaux entre eux —en négligeant les opérations de leur multiplication par 0 et 1 ainsi que les répétitions dues à la commutativité du produit— aurait imposé de retenir 1711 résultats.

son périmètre et de sa surface soit un nombre donné¹¹. Le problème est indéterminé, et il est en outre soumis à une condition de rationalité.

Soit donc à résoudre

$$u + v + w + \frac{1}{2}uv = k,$$

avec k donné (Héron pose $k=280$). Le texte de la résolution de Héron montre qu'il n'a rien à envier, du point de vue de la didactique, à ses prédecesseurs mésopotamiens:

«L'aire d'un triangle rectangle avec son périmètre est de 280 pieds; déterminer individuellement les côtés et trouver l'aire. Je fais ainsi. Cherche toujours¹² les diviseurs entiers; or, 280 est 2 fois 140, 4 fois 70, 5 fois 56, 7 fois 40, 8 fois 35, 10 fois 28, 14 fois 20. J'ai noté que 8 et 35 rempliront l'exigence donnée (έσκεψάμην, ὅτι ὁ ἡ καὶ ἡ ποιήσουσι τὸ δοθέν ἔπιταγμα). Prenant $\frac{1}{2}$ des 280, il vient 35 pieds. Enlève à chaque fois 2 de 8; il reste 6 pieds. Ainsi, 35 et 6 font ensemble 41 pieds. Multiplie ceci par lui-même; il vient 1681 pieds. 35 fois 6 font 210 pieds. Fais-en toujours le produit avec 8; il vient 1680 pieds. Enlève-les de 1681; il reste 1, dont la racine carrée (πλευρά τετραγωνή) est 1. Considère alors les 41, et enlève-les-en l'unité, 1; le reste est 40. La moitié en est 20. Tel sera le côté perpendiculaire: 20 pieds. Considère à nouveau les 41, et ajoute-leur 1; il vient 42 pieds. La moitié en est 21. Soit la base de 21 pieds. Considère les 35, et enlève-les-en les 6; il reste 29 pieds. Considère alors le côté perpendiculaire fois la base; la moitié en sera 210 pieds. Et les trois côtés du périmètre font 70 pieds. L'ajoutant à la surface, il vient 280 pieds».

Il apparaît des calculs de cette résolution que Héron applique les formules

$$u, v = \frac{1}{2}[(p+q-2) \pm \sqrt{(p+q-2)^2 - 8p(q-2)}], \quad w = p - (q-2),$$

où $p \cdot q = k$, ces deux facteurs de k étant choisis d'une manière appropriée (comme on l'imagine, afin que la quantité sous le radical soit un carré).

Etablissons ces formules selon les identités connues dans l'antiquité.

Comme

$$uv = \frac{1}{2}[(u+v)^2 - (u^2 + v^2)], \quad \text{on aura}$$

$$\frac{1}{2}uv = \frac{1}{4}[(u+v)^2 - w^2] = \left(\frac{u+v+w}{2}\right)\left(\frac{u+v-w}{2}\right).$$

Selon la donnée, il faudra donc que

$$u+v+w + \left(\frac{u+v+w}{2}\right)\left(\frac{u+v-w}{2}\right) = \frac{u+v+w}{2} \left[\frac{u+v-w}{2} + 2\right] = k.$$

Posons donc, utilisant la décomposition de k choisie, que

$$\frac{u+v+w}{2} = p \quad \text{et}$$

¹¹Voir ses «Geometrica» —dans HÉRON (1899-1914), IV—, p. 422-425.

¹²«Toujours» ou (plus loin) «à chaque fois» signifie que l'opération à effectuer est générale et nullement liée aux données numériques particulières du problème.

$$\frac{u+v-w}{2} + 2 = \epsilon \text{ soit } \frac{u+v-w}{2} = q - 2.$$

On aura alors d'une part

$$\frac{u+v+w}{2} + \frac{u+v-w}{2} = u+v = p+q-2$$

et d'autre part

$$\left(\frac{u+v+w}{2} \right) \left(\frac{u+v-w}{2} \right) = \frac{1}{2} uv = p(q-2), \text{ soit}$$

$$4uv = 8p(q-2).$$

Comme $(u-v)^2 = (u+v)^2 - 4uv = (p+q-2)^2 - 8p(q-2)$, la formule de la demi-somme et de la demi-différence amènera

$$u, v = \frac{1}{2} \left[(p+q-2) \pm \sqrt{(p+q-2)^2 - 8p(q-2)} \right], \text{ cependant que}$$

$$w = \frac{u+v+w}{2} - \frac{u+v-w}{2} = p - (q-2).$$

Comme déjà dit, il nous faut en outre que les deux facteurs de k choisis rendent la quantité sous le radical rationnelle. C'est ce qu'opère le choix particulier $p=35, q=8$ de Héron.

Quant aux quelques équations quadratiques que l'on trouve chez Héron, soit elles sont résolues en complétant le carré – l'équation $ax^2 + bx = c$ étant par exemple transformée en $a^2x^2 + abx = ac$, puis, par addition de $(\frac{b}{2})^2$, en $(ax + \frac{b}{2})^2 = (\frac{b}{2})^2 + ac$ – soit le résultat est donné directement.

L'algébriste Diophante a, lui aussi, un petit nombre d'équations quadratiques dans les livres conservés de son «Arithmetica»¹³. Dans les problèmes "VI", 6 & 7, les solutions (positives) de $84x^2 + 7x = 7$ et de $84x^2 = 7x + 7$ sont indiquées directement. Dans le problème "IV", 31, où une première détermination l'amène à l'équation $5x^2 = 3x + 18$, Diophante remarque que «*cette équation n'est pas rationnelle* (οὐκ ἔστιν ἡ ἴσωσις ὁμοτήτη)», ce qui serait le cas, ajoute-t-il, si le coefficient de x^2 multiplié par 18 et augmenté du carré de la moitié de 3, le coefficient de x , était un carré. Il reforme alors son hypothèse de départ en accord avec cette exigence.

On peut s'étonner qu'un ouvrage d'*algèbre* ne contienne que peu d'équations quadratiques. Cela tient à la nature des problèmes traités par Diophante, qui sont pour la plupart indéterminés, l'auteur posant les grandeurs cherchées en fonction d'une inconnue de manière à aboutir à une équation de résolution ne contenant plus que *deux* termes avec des puissances *consécutives* de l'inconnue, ce qui lui assure la rationalité de la solution. Il promet toutefois dans l'introduction de présenter aussi des cas où l'équation

¹³Selon l'indication de son introduction, l'«Arithmetica» devait comprendre treize livres (chapitres). Six livres en grec furent connus en Europe occidentale depuis la Renaissance, qui avaient été numérotés selon la tradition byzantine de I à VI. En 1968 ont été découverts quatre autres livres en traduction arabe, qui trouvaient leur place au milieu des livres grecs conservés. On possède donc actuellement les livres I à III en grec, IV à VII en arabe et "IV" à "VI" en grec (vraisemblablement les livres originels VIII à X).

finale contiendra *trois* termes, mais ceci manque dans la partie aujourd’hui conservée de l’«*Arithmetica*». Les quelques exemples mentionnés ci-dessus suffisent néanmoins à se convaincre que la résolution de l’équation du deuxième degré en Grèce faisait partie du domaine des connaissances courantes.

3. L’ÉQUATION DU DEUXIÈME DEGRÉ DANS LE MONDE ISLAMIQUE

Les mathématiciens grecs que nous avons mentionnés avaient un autre point commun que celui de toucher, de près ou de loin, à l’équation quadratique: ils avaient tous élu domicile dans la colonie grecque d’Alexandrie qui, depuis l’époque d’Euclide jusqu’à la fin de l’empire romain, était restée le pôle de l’activité scientifique. Leurs œuvres, ou certaines d’entre elles, allaient revivre dans la cité qui devint, dès les premières décennies suivant sa fondation (762), la capitale du monde musulman et le nouveau centre du monde lettré. Trois héritages scientifiques se retrouvèrent à Bagdad. Il y avait d’abord le vieil héritage *babylonien*, ayant peu ou prou survécu dans le monde oriental (en Perse en particulier) et ayant laissé ça et là des traces dans les écrits grecs. Un deuxième héritage provenait d’une science qui connaissait alors sa première apogée et qui avait intégré des éléments des sciences mésopotamiennes et grecques, la science *indienne*. Un contact direct avec des savants indiens à Bagdad apporta aux mathématiciens musulmans les éléments de la trigonométrie et de l’astronomie indiennes. Sans doute connaissaient-ils déjà le système de numération reposant sur les chiffres qu’ils appelaient «indiens» et que nous appelâmes «arabes» –le donataire attribuant dû crédit au donateur–, puisqu’on en trouve déjà la mention en Syrie au VII^e siècle¹⁴. En tout cas, ils se formèrent à son utilisation pour les opérations arithmétiques avant le début du IX^e siècle, et peut-être adoptèrent-ils aussi des Indiens cette prédilection dont ils firent montre pour l’application de l’algèbre et de l’arithmétique aux problèmes de la vie courante, en particulier au négoce. Toute théorique, ou presque, est la formation qu’apportèrent les traductions arabes des classiques mathématiques *grecs*. Ce troisième héritage mit notablement plus de temps que les autres à être assimilé: il ne s’agissait plus d’apprendre quelque recette ou méthode de calcul, mais de comprendre une suite de démonstrations sur lesquelles, de théorème en théorème, se construisait la théorie faisant l’objet du traité. On conçoit que rendre de tels raisonnements, où chaque mot avait son importance, exigeait de la part des traducteurs tant une aptitude insigne aux mathématiques qu’une compétence philologique aiguë, l’une et l’autre qualités étant seules à même de remédier aux éventuelles corruptions du texte ou de combler les inévitables lacunes des copistes de la basse antiquité. D’aucuns eurent même à rechercher, ou à faire rechercher, de meilleurs manuscrits, ce qui n’était point une mince affaire: la filiation des œuvres scientifiques depuis la fin de l’antiquité était devenue fort ténue, et ne tenait parfois qu’à un seul exemplaire, ce qui incidemment explique que plusieurs traités grecs ne nous soient parvenus que dans leur traduction arabe.

¹⁴En 662 par Severus Sebokht, évêque de Qinnisrin; cf. NAU (1910), p. 225-227.

La science grecque donnant une place privilégiée à la démonstration géométrique, il était inévitable que l'étude de l'équation du second degré à l'époque islamique s'en trouvât influencée. Aux illustrations géométriques intuitives des formules de résolution apparaissant dans les anciens traités en arabe succéderont ainsi des illustrations utilisant des théorèmes d'Euclide, puis des démonstrations de la *construction* géométrique des solutions, un point qui mettra en évidence le lien entre opérations arithmétiques pouvant être effectuées à l'aide des deux instruments admis par la géométrie d'Euclide, la règle et le compas, et résolution des équations algébriques. Car la résolution de l'équation du second degré, ne dépendant que des opérations d'addition, de soustraction, de multiplication, de division, et d'extraction de racines *carrées*, appartient encore au domaine commun, au contraire de l'équation du troisième degré, qui fait intervenir des extractions de racines *cubiques*.

3.1. Illustrations intuitives des formules

On attribue le premier traité d'algèbre en arabe à un auteur d'ascendance persane, mais travaillant à Bagdad, Muhammad ibn Mūsā al-Khwārizmī (vers 820)¹⁵. Bien qu'il existât déjà une première version des «Eléments» d'Euclide, ses illustrations des formules de résolution n'y font nulle référence. Il est vrai que son ouvrage, qui était dans l'intention de l'auteur destiné à un large public, ne pouvait en exiger la connaissance préalable des «Eléments» dont la lecture n'était pas plus aisée pour un lecteur d'alors qu'elle ne l'est pour le lecteur d'aujourd'hui. En bref, al-Khwārizmī désire simplement montrer que, dans chacun des trois cas, un segment de droite représentant la solution satisfera bien à la donnée de l'équation.

• Cas de $x^2 + px = q$

Représentons par AB (fig. 1) le carré x^2 ¹⁶. Prolongeant d'abord chacun de ses côtés, de part et d'autre, du segment connu $\frac{p}{4}$, on construit ensuite le carré extérieur DE. La surface de ce plus grand carré vaudra donc d'une part $(x + \frac{p}{2})^2$, d'autre part, par addition des neuf éléments qui la composent, $x^2 + 4\frac{p}{4}x + 4(\frac{p}{4})^2 = x^2 + px + (\frac{p}{2})^2$, qui égale, selon la donnée de l'équation, $q + (\frac{p}{2})^2$. Le côté de ce carré vaudra donc

$$x + \frac{p}{2} = \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 + q}, \quad \text{d'où}$$

$$x = \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 + q} - \frac{p}{2}.$$

¹⁵Texte arabe avec traduction anglaise dans ROSEN (1831).

¹⁶Deux lettres placées aux angles opposés d'une figure rectangulaire servent à en désigner la surface; ce mode de désignation était déjà en usage en Grèce.

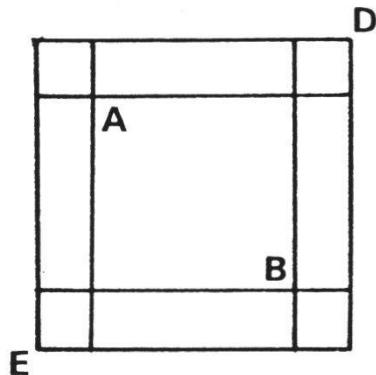


Figure 1.

• Cas de $x^2 + q = px$

Soit (fig. 2) $AD=x^2$, et traçons $DN=p$. Ainsi, la surface GN vaut px , et, selon l'équation, AN égalera q . Prenons $DT=TN=\frac{p}{2}$ et dessinons sur TN le carré $TM=(\frac{p}{2})^2$. Alors, $KH=AH=\frac{p}{2}-x$ (on suppose donc que $\frac{p}{2} > x$). Posant maintenant $HZ=AH$, il vient que $KZ=(\frac{p}{2}-x)^2$. Les surfaces AT et LE , dont les côtés sont égales, sont égales. Il suit de là que la différence des surfaces KN et AN égalera d'une part $(\frac{p}{2})^2-q$, d'autre part $KZ=(\frac{p}{2}-x)^2$, en sorte que l'on aura aussi

$$\frac{p}{2}-x = \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}, \text{ d'où}$$

$$x = \frac{p}{2} - \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}.$$

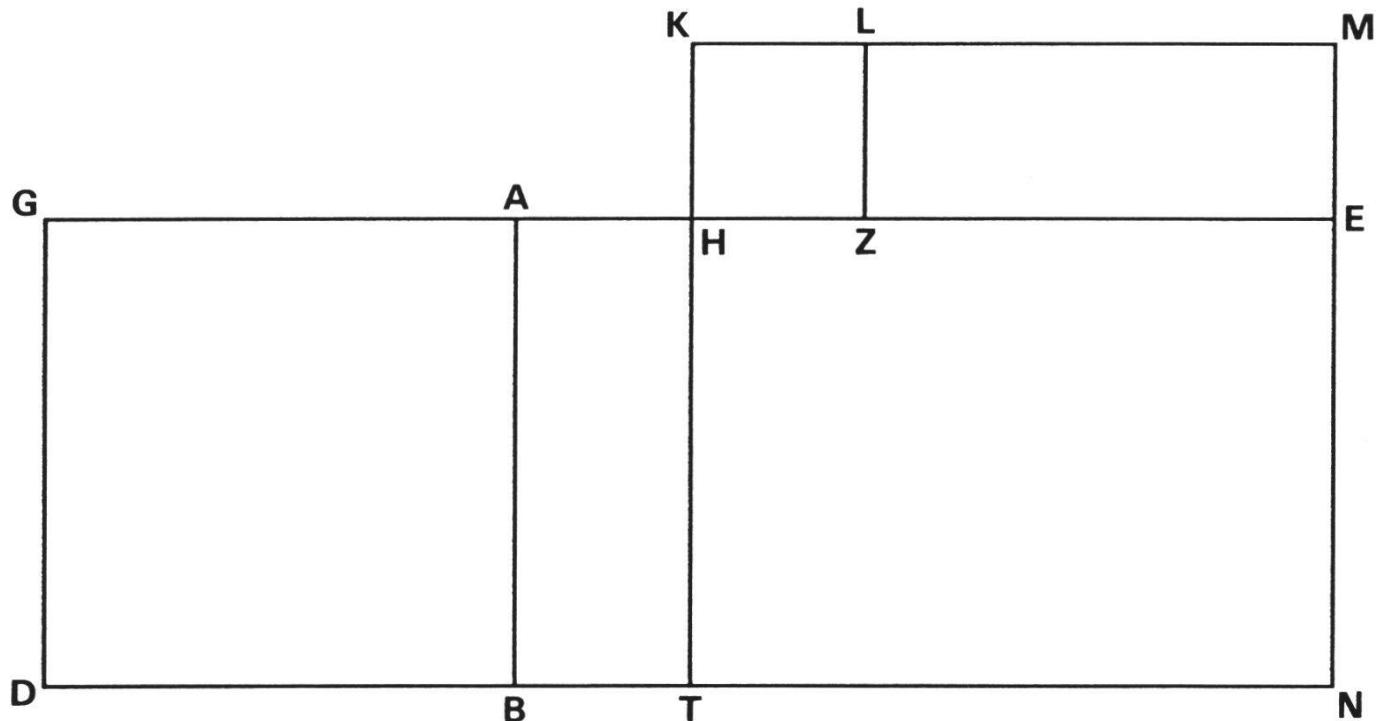


Figure 2.

Quoique al-Khwārizmī mentionnât pour ce cas l'existence d'une seconde solution par *addition* de la racine, son ouvrage n'en contient point d'illustration. On en trouve une chez l'un de ses contemporains, 'Abd al-Hamīd ibn Turk, présenté ultérieurement comme son concurrent¹⁷. Le fragment conservé de son traité d'algèbre contient la démonstration suivante¹⁸.

Supposant donc cette fois $\frac{p}{2} < x$, représentons (fig. 3) x^2 par ADZ et p par DZ, en sorte que $AZ = q$. Prenons $DH = HZ = \frac{p}{2}$ et construisons $TZ = (\frac{p}{2})^2$. Alors, $TN = AN = x - \frac{p}{2}$. Menant $HL = HB$, on formera le carré LB égal à $(x - \frac{p}{2})^2$. Donc, comme les surfaces TM et AK sont égales, la différence des surfaces TZ et AZ vaudra d'une part $(\frac{p}{2})^2 - q$, d'autre part $LB = (x - \frac{p}{2})^2$, en sorte que

$$x - \frac{p}{2} = \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}, \quad \text{d'où}$$

$$x = \frac{p}{2} + \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}.$$

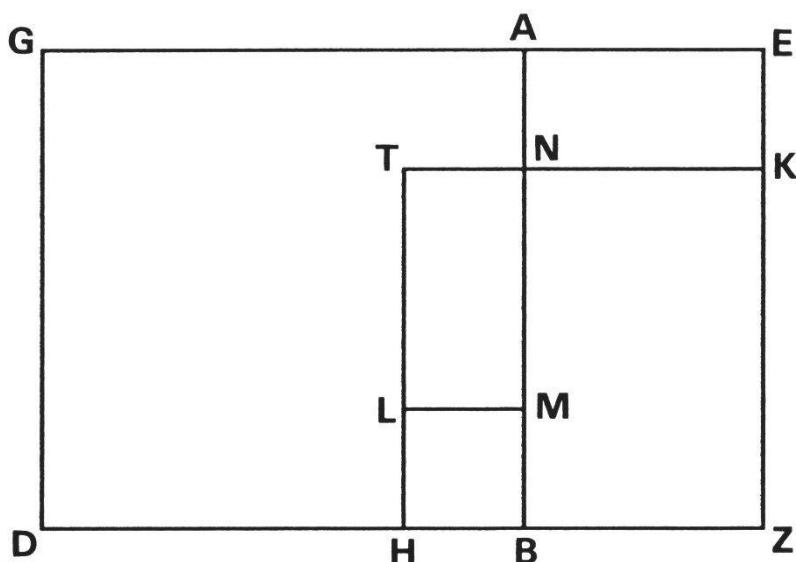


Figure 3.

Le cas de la racine double survient lorsque $(\frac{p}{2})^2 = q$, donc lorsque les paires de points B, H et A, T du dessin précédent sont confondues, comme le représente encore 'Abd al-Hamīd (fig. 4). En ce cas,

$$x = \frac{p}{2} = \sqrt{q}.$$

¹⁷Selon son petit-fils, c'est à lui que devait revenir la primeur de la composition d'un ouvrage d'algèbre en arabe; Abū Kāmil (dont il sera question plus loin) s'est toutefois vivement élevé contre cette prétention de reléguer al-Khwārizmī au second rang, comme nous l'apprend le bibliographe Hājjī Khalīfa (1609-1657); voir FLÜGEL (1835-58), V, p. 68 & 168.

¹⁸Ledit fragment a été édité et traduit en anglais par SAYILI (1962).

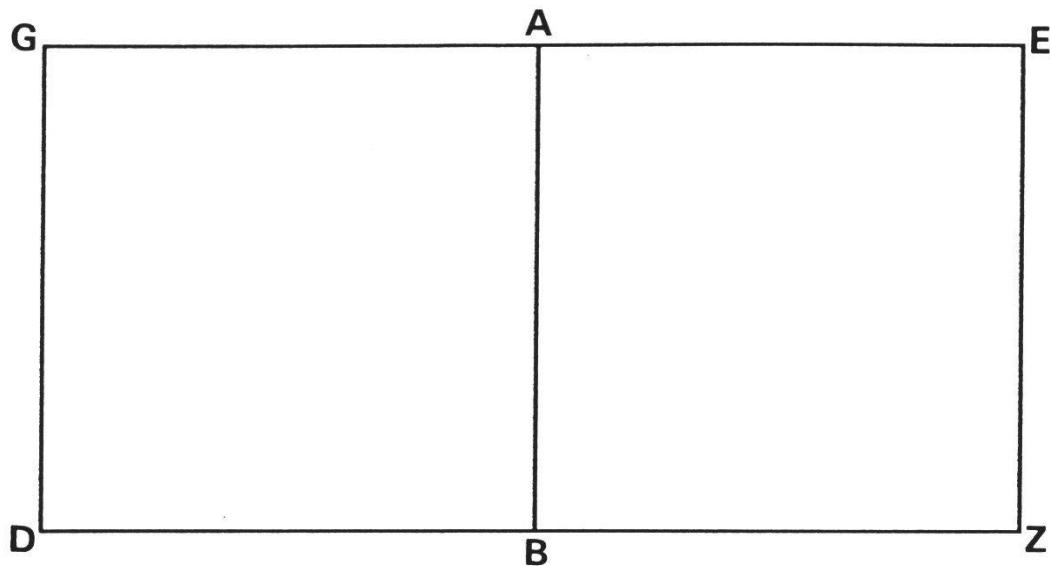


Figure 4.

- Cas de $x^2 = px + q$

Soient, selon al-Khwārizmī (fig. 5), $AD=x^2$ et $BE=p$; donc, $ZD=q$. Posons que $BH=HE=\frac{p}{2}$. Traçant en outre, perpendiculairement à BE , $HT=HE$, on aura $TE=(\frac{p}{2})^2$. Prolongeant HT de $TL=ED=NM$, on aura $HL=HD=x-\frac{p}{2}$. Mais $TK=NZ$, en conséquence de quoi les surfaces LK et ZM sont égales. La différence des surfaces LD et TE est donc d'une part égale à $(x-\frac{p}{2})^2 - (\frac{p}{2})^2$, d'autre part aussi à $ZD=q$, en sorte que

$$x - \frac{p}{2} = \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 + q}, \quad \text{d'où}$$

$$x = \frac{p}{2} + \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 + q}.$$

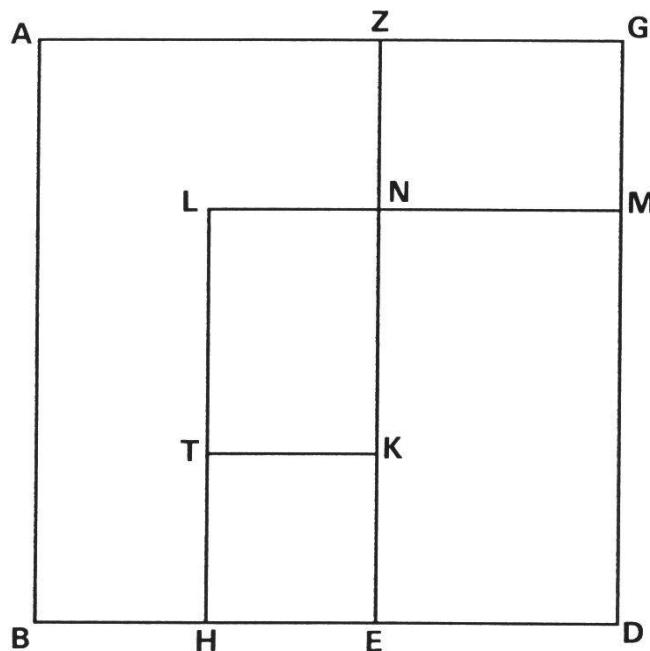


Figure 5.

3.2. Illustrations à l'aide de deux théorèmes d'Euclide

Si l'ouvrage d'al-Khwārizmī visait un large public, tel n'était pas le cas de celui de son successeur Abū Kāmil (env. 880)¹⁹. Ce dernier s'adresse en effet à un cercle de mathématiciens formés, dont il suppose la connaissance des «Eléments» d'Euclide. Il peut ainsi présenter des illustrations de la solution des trois types d'équations quadratiques à l'aide d'un raisonnement simplifié s'appuyant sur la connaissance de deux théorèmes des «Eléments», à savoir les théorèmes 5 et 6 du livre II, qui sont les suivants.

II,5: «*Si un segment de droite est partagé en deux parties égales et en deux parties inégales, le rectangle (=le produit) formé par les deux segments inégaux, avec le carré sur le segment compris entre les points de section, sera égal au carré sur la moitié*».

Donc (fig. 6): $AD \cdot DB + FD^2 = AF^2$.



Figure 6.

II,6: «*Si un segment de droite est partagé en deux parties égales et qu'on lui joigne un segment dans sa continuation, le rectangle formé par la droite entière avec le segment ajouté et le segment ajouté, avec le carré de la moitié, sera égal au carré sur le segment formé par la moitié et le segment ajouté*».

Donc (fig. 7): $AD \cdot DB + FB^2 = FD^2$.



Figure 7.

Dépouillées de leurs atours géométriques, ces deux propositions se réduisent à une seule identité algébrique, la même qui était à la base de la résolution mésopotamienne de certains systèmes du second degré, soit

$$uv + \left(\frac{u-v}{2}\right)^2 = \left(\frac{u+v}{2}\right)^2,$$

comme on le voit en posant $AD=u$, $DB=v$.

Pour présenter les démonstrations d'Abū Kāmil sous un aspect uniforme, nous utiliserons les mêmes lettres pour désigner les quantités de même dénomination, convenant que $AC=x^2$, $AB=p$ –la surface BC représentant alors la quantité q – et que F soit le milieu de AB.

¹⁹Reproduction de l'unique manuscrit arabe dans ABŪ KĀMIL (1986). Il existe de ce texte une traduction latine médiévale incomplète aux fol. 71^v-97^r du manuscrit latin 7377A de la Bibliothèque Nationale de Paris. Une traduction médiévale en hébreu a été (incomplètement et médiocrement) éditée, traduite et commentée par LEVEY (1966).

- Cas de $x^2 + px = q$ (fig. 8)

Par II,6, $AD \cdot DB + FB^2 = FD^2$, en sorte que $q + (\frac{p}{2})^2 = (x + \frac{p}{2})^2$.

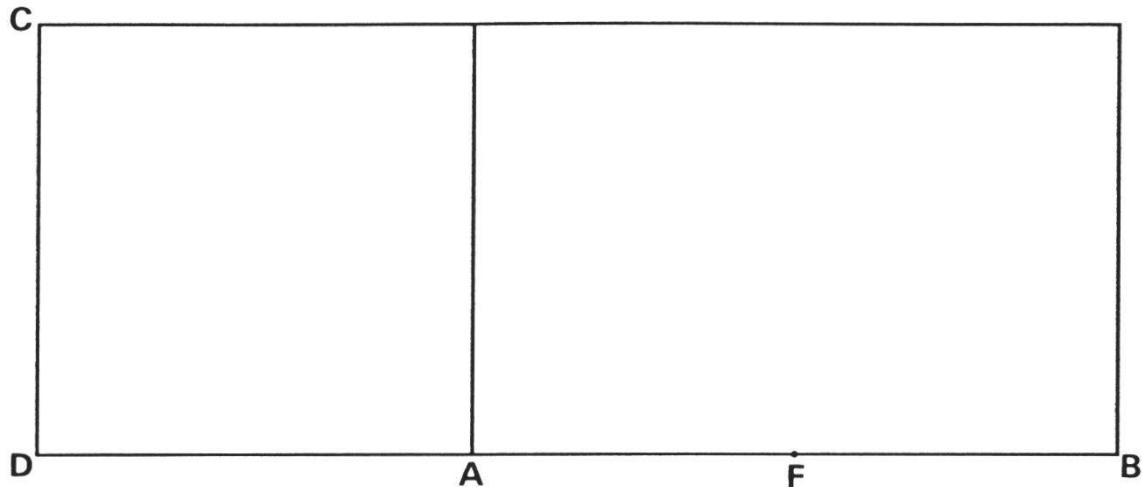


Figure 8.

- Cas de $x^2 + q = px$ (fig. 9-10)

Par II,5, $AD \cdot DB + FD^2 = AF^2$, en sorte que $q + (x - \frac{p}{2})^2 = (\frac{p}{2})^2$, où l'on prendra $x - \frac{p}{2}$ positif ou négatif, ou nul dans le cas où F et D coïncident.

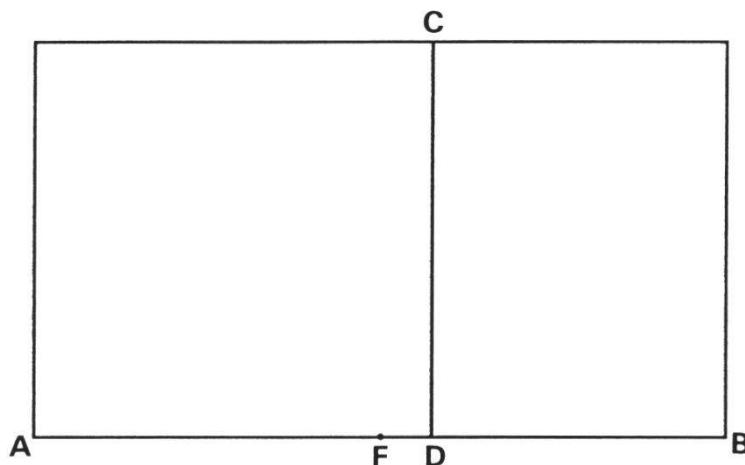


Figure 9.

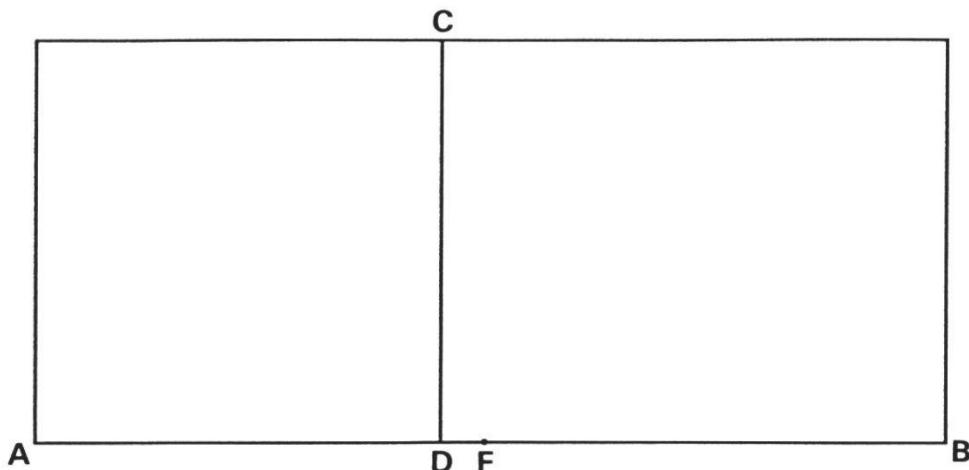


Figure 10.

- Cas de $x^2 = px + q$ (fig. 11)

Par II,6, $AD \cdot DB + FB^2 = FD^2$, en sorte que $q + (\frac{p}{2})^2 = (x - \frac{p}{2})^2$.

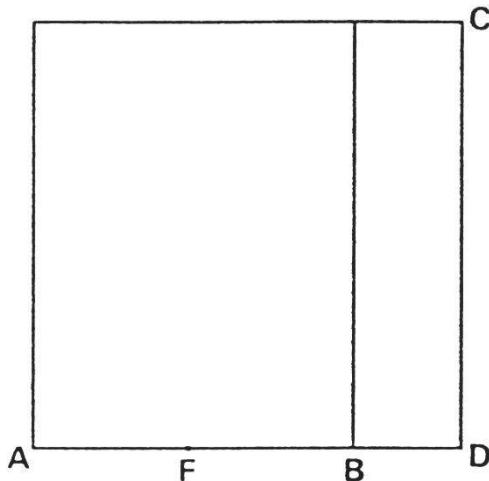


Figure 11.

On retrouve ainsi les formules vues précédemment.

3.3. Construction géométrique des solutions

Tout ceci n'est, comme déjà dit, qu'une illustration des formules de l'équation du second degré. Or, l'usage de la règle et du compas permet de construire les solutions en partant des segments de droites ayant la valeur des coefficients p et q , et ceci grâce aux deux théorèmes généraux VI,28-29 des «Eléments» d'Euclide, dits des «applications d'aires». Dans notre cas particulier des équations quadratiques, le problème revient à construire un rectangle d'aire donnée q ayant sa base sur une droite de longueur donnée p –éventuellement prolongée–, en sorte qu'il diffère du rectangle de même hauteur et de base p par une surface carrée.

- Cas de $x^2 + px = q$, mise sous la forme $x(x+p)=q$

Construisons (fig. 12) sur la moitié de $AB=p$, le carré $CB=(\frac{p}{2})^2$, sur la base duquel nous construisons le plus grand carré $CE = (\frac{p}{2})^2 + q$.²⁰ Le rectangle cherché est alors AE , différant de AD par la surface carrée $BE=x^2$, en sorte que $BF=BD$ est la solution cherchée.

- Cas de $x^2 + q = px$, mise sous la forme $x(p-x)=q$

Dans ce cas (fig. 13), le carré $CE = (\frac{p}{2})^2 - q$ (où $(\frac{p}{2})^2 > q$) est plus petit que le carré $CB=(\frac{p}{2})^2$. Deux rectangles remplissent les conditions: AE , correspondant à la solution $DE=DB=x_1$, et le rectangle de même surface DG , correspondant à la solution $AD=DH=x_2$. Les relations de Viète (cf. p. 272) apparaissent de la figure, puisque l'on a

²⁰Comment construire le côté de ce carré (donc la racine de la quantité connue) est expliqué dans le théorème II,14 des «Eléments». Si a est la quantité connue représentée comme un segment de droite, on prolongera ce segment du segment unitaire, puis on tracera la demi-circonférence de diamètre $a+1$; alors, la hauteur élevée de l'extrémité de a jusqu'à la demi-circonférence aura la longueur \sqrt{a} .

$$x_1 + x_2 = AB = p$$

$$x_1 \cdot x_2 = DF = DG = DI + DK = q \quad ^{21}.$$

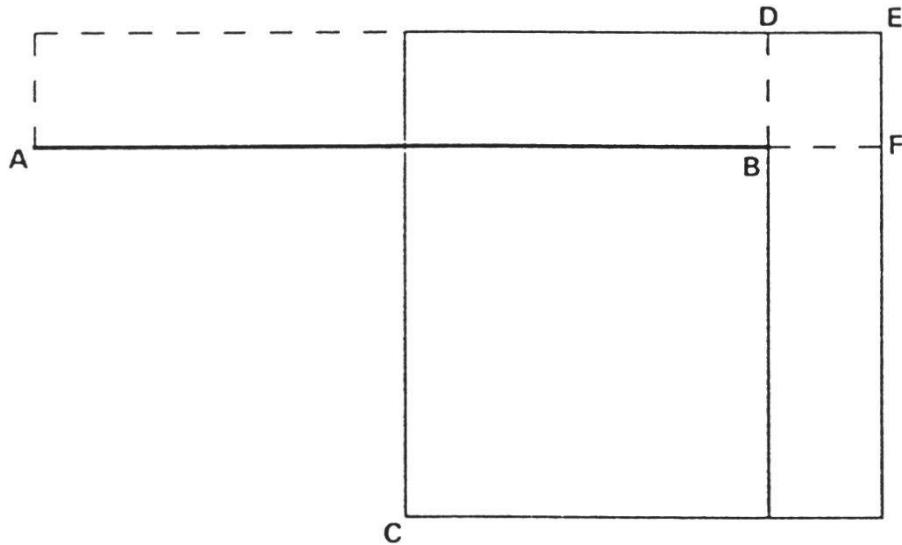


Figure 12.

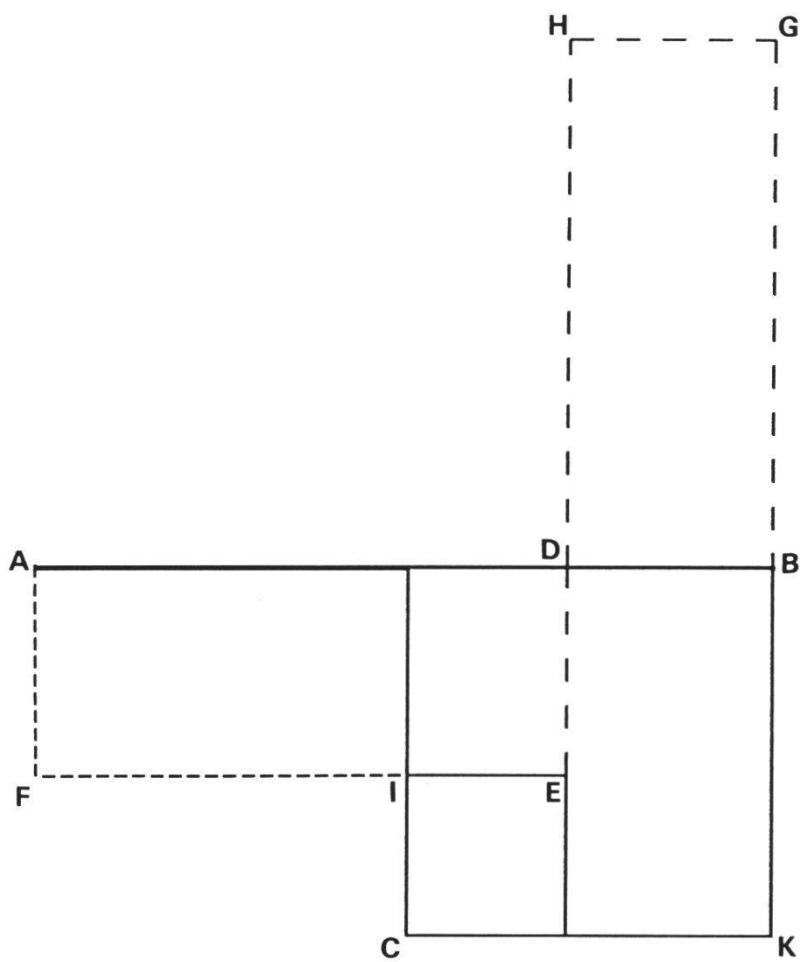


Figure 13.

²¹La relation de Viète sous la forme moderne est notée $x_1 + x_2 = -p$, car on écrit l'équation sous la forme $x^2 + px + q = 0$.

- Cas de $x^2 = px + q$, mise sous la forme $x(x-p)=q$

La même construction que pour le premier cas montre que, cette fois, $x=AF$ et $BE=(x-p)^2$.

Si cette construction n'apparaît pas chez les deux premiers grands algébristes que nous avons mentionnés, c'est qu'elle supposait, au moins chez le lecteur, une connaissance profonde des «Eléments» d'Euclide. On la trouve chez le plus célèbre des algébristes ultérieurs, 'Umar Khayyām (env. 1048 - env. 1131), le premier qui eût résolu *géométriquement* tous les cas à solution positive de l'équation du troisième degré dans ses diverses formes à termes positifs, ce qui n'avait jusqu'alors été fait que pour quelques cas par ses prédecesseurs et en Grèce²². Ladite construction des solutions de l'équation du deuxième degré était toutefois connue auparavant, puisqu'elle apparaît dans une compilation anonyme de divers traités d'algèbre composée en l'an 395 de l'hégire (1004/5 de l'ère chrétienne)²³. L'auteur remarque à la fin qu'une telle construction des solutions dans le cas de l'équation du troisième degré n'est pas faisable par la règle et le compas, mais qu'elle pourra être effectuée si l'on utilise les sections coniques; il mentionne en outre les treize formes de l'équation concernées²⁴.

Que ce soit pour l'illustration ou la construction, le recours à la figure géométrique est un élément caractéristique de l'étude de l'équation du deuxième degré dans les pays islamiques. Le même recours à la représentation par des figures apparaît aussi dans les démonstrations d'identités algébriques ou de théorèmes d'addition de racines. Dans tous ces cas ou presque, des figures analogues se retrouvent chez Euclide, mais y restent toujours confinées dans un cadre purement théorique; la différence réside donc dans l'*application* des théorèmes d'Euclide à l'algèbre. En particulier, les segments irrationnels d'Euclide, correspondant à des racines carrées (ou quatrièmes), deviennent, dans les problèmes arabes, des racines carrées (ou quatrièmes) de nombres rationnels. Avec ceci naît la première extension du domaine des nombres: cependant que jusqu'alors une solution devait, pour qu'elle fût acceptable, être rationnelle et positive, l'algèbre fait désormais intervenir, tant comme constantes données que comme solutions, des quantités irrationnelles (positives).

Ce support de la géométrie à l'algèbre s'étendit même à la résolution de problèmes particuliers. Ainsi, Abū Kāmil présente souvent, lors de la résolution de systèmes d'équations, une détermination géométrique de la solution, établie avec référence explicite aux théorèmes d'Euclide. Il est aussi significatif que, souvent, cette résolution précède la résolution purement algébrique, ou bien qu'elle la suit avec le dessein de la justifier. L'algèbre n'avait pas encore tout à fait gagné son autonomie.

²²Voir l'édition avec traduction française de WOEPCKE (1851).

²³Manuscrit 5325 de la Bibliothèque du Mausolée de l'Imam Reza à Mechhed.

²⁴Soit (outre le cas banal $x^3 = c$): $x^3 + bx = c$, $x^3 + c = bx$, $x^3 = bx + c$; $x^3 + ax^2 = c$, $x^3 + c = ax^2$, $x^3 = ax^2 + c$; $x^3 = ax^2 + c$; $x^3 + ax^2 + bx = c$, $x^3 + ax^2 + c = bx$, $x^3 + bx + c = ax^2$, $x^3 = ax^2 + bx + c$; $x^3 + ax^2 = bx + c$; $x^3 + bx = ax^2 + c$; $x^3 + c = ax^2 + bx$.

4. L'APPARITION DES NOMBRES NÉGATIFS DURANT LE MOYEN AGE CHRÉTIEN

Les traités d'algèbre d'al-Khwārizmī et d'Abū Kāmil eurent une influence non seulement en Orient au début de la science musulmane, mais aussi en Occident musulman, car ils y devinrent le fondement des ouvrages de mathématiques, alors que les recherches ultérieures, telles que celle d'Umar Khayyām, n'y furent pas transmises.

Aussi les premiers ouvrages mathématiques de l'Occident chrétien nous présentent-ils un visage familier. Le «*Liber mahameleth*» de Johannes Hispalensis, écrit à Tolède vers 1150, peu avant les premières traductions de l'arabe, contient des problèmes qui rappellent ceux des deux premiers algébristes mentionnés, sauf qu'ils y sont beaucoup plus nombreux, détaillés à l'extrême dans les calculs, et augmentés presque systématiquement d'une résolution géométrique²⁵. Les illustrations des formules de l'équation du deuxième degré sont répandues par les traductions, et si bien adoptées qu'elles subsisteront jusqu'au XVI^e siècle: même l'«*Ars magna*» de Cardan, parue en 1545, qui pourtant enseignait la résolution des équations des deux degrés supérieurs, les maintiendra, Cardan allant même jusqu'à exposer des illustrations analogues, mais à l'aide de figures dans l'espace, pour les formules de résolution des équations du troisième degré.

L'évolution de l'algèbre se fit plutôt dans une autre direction, et ceci surtout grâce à l'oeuvre de Léonard Fibonacci de Pise (env. 1220), dont les voyages autour de la Méditerranée lui avaient assuré une formation supérieure à celle que l'on pouvait acquérir par les seules traductions faites en Espagne. Son domaine de prédilection est la résolution de systèmes linéaires de n équations à n inconnues, qu'il classe en types, pour lesquels il établit dans de nombreux cas une formule de résolution générale en fonction des constantes données et du nombre n . Faisant alors varier ses constantes, il fait varier à loisir la valeur des solutions, allant jusqu'à proposer des exemples dans lesquels l'une des solutions prend une valeur non seulement nulle, ce qui était inhabituel, mais aussi *négative*. Même s'il ne l'accepte pas à proprement parler, il tente de l'interpréter, ouvrant ainsi la voie menant à la reconnaissance des solutions négatives et donc des nombres négatifs²⁶. Deux exemples suffiront à illustrer ceci.

Dans l'un des types de systèmes étudiés chez Léonard, trois hommes possèdent en commun un capital dont chacun détient une part connue, et qu'ils décident d'enfermer dans un coffre. Mal leur en prend, car, profitant de l'absence des deux autres compères, chacun va à tour de rôle voler furtivement une partie de l'argent, le dernier laissant le coffre vide. Ils conviennent alors que chacun remettra dans le coffre une fraction donnée de ce qu'il a volé, cet argent récupéré devant ensuite être distribué entre eux à parts égales. Les données du problème sont ainsi faites que, avec l'argent qu'ils ont conservé de leur vol, tous retrouvent leur mise initiale.

²⁵Manuscrit latin 7377A de la Bibliothèque Nationale de Paris, fol. 99^r-203^r. Le titre *mahameleth* est la transcription (approximative) de l'arabe *mu'āmalāt*, qui désigne les textes dont l'objet est l'application de l'algèbre au négoce.

²⁶Il ne faut pas confondre le calcul avec des termes soustraits (la règle des signes était connue dès les débuts de l'algèbre) et la mise en évidence de quantités négatives, qui n'apparaît donc que relativement tard.

Parmi les divers problèmes de ce genre proposés par Léonard, l'un amène une solution négative pour un des partenaires²⁷. Désignons par S le capital initial, dont les trois partenaires possèdent respectivement $\frac{1}{2}S$, $\frac{2}{5}S$ et $\frac{1}{10}S$. Soient en outre x_1 , x_2 , x_3 les montants respectifs de leurs vols; il est dit qu'ils doivent remettre dans le coffre $\frac{1}{2}x_1$, $\frac{1}{3}x_2$ et $\frac{1}{6}x_3$ respectivement, de sorte que le système à résoudre est

$$\begin{cases} \frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{3}\left[\frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{3}x_2 + \frac{1}{6}x_3\right] = \frac{1}{2}S \\ \frac{2}{3}x_2 + \frac{1}{3}\left[\frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{3}x_2 + \frac{1}{6}x_3\right] = \frac{2}{5}S \\ \frac{5}{6}x_3 + \frac{1}{3}\left[\frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{3}x_2 + \frac{1}{6}x_3\right] = \frac{1}{10}S. \end{cases}$$

L'indétermination du problème permet à Léonard de choisir la valeur de S , qu'il pose ici égale à 470 (il donne souvent la préférence à des valeurs menant à des solutions entières). Les parts initiales se monteront donc respectivement à 235, 188, 47. Il calcule alors les solutions, qui sont $x_1=326$, $x_2=174$, $x_3=-30$. Autrement dit, comme il le remarque, l'argent volé par les deux premiers, soit 500, apparaît *supérieur* au montant du capital S . Il propose alors de considérer que le troisième, en toute confiance, avait placé 30 de son argent propre, non compris dans le capital, dans le coffre, de sorte que, lorsque les deux premiers ont *gagné* par leur vol, lui a *perdu*, outre sa part, ses 30. Lors de la remise d'une partie de l'argent volé, les deux premiers remettent $\frac{1}{2}x_1=163$ et $\frac{1}{3}x_2=58$; le dernier, censé rendre $\frac{1}{6}x_3=-5$, profite en fait de subtiliser 5 de l'argent que viennent de remettre ses deux partenaires. Le partage du reste en trois rétablit ensuite chacun dans son droit, le troisième, recevant lui aussi 72, recouvrant avec les 5 qu'il a déjà récupérés sa mise initiale de 47 et son bien propre de 30.

De telles contorsions intellectuelles ne sont pas toujours nécessaires à Léonard pour trouver un sens à sa solution négative. C'est le cas dans les problèmes dits de l'achat d'un cheval, où un nombre fixe de t partenaires pris consécutivement n'a pas assez d'argent pour acquérir le cheval, mais en atteindra juste le prix en recevant des $n-t$ autres une fraction donnée de leur avoir. Léonard en a de nombreux exemples –dont certains avec des solutions négatives– le cas le plus simple étant celui d'un seul des partenaires recevant la fraction donnée des $n-1$ autres. Le problème est dans ce cas

$$x_i + m_i \sum_{k \neq i}^n x_k = y \quad (i=1, \dots, n),$$

les x_i représentant les sommes individuelles, les m_i les fractions données, et y le prix du cheval (donné ou posé). La formule de résolution qu'établit Léonard s'écrirait

$$x_i = (S - y) \left[\frac{1}{n-1} \sum_{k=1}^n \frac{1}{1-m_k} - \frac{1}{1-m_i} \right] \text{ où } S = \sum_{i=1}^n x_i.$$

²⁷Voir BONCOMPAGNI (1857), p. 296-297. Sur l'ensemble des problèmes médiévaux à solutions négatives, voir SESIANO (1985).

On voit que le bien du $i^{\text{ème}}$ partenaire sera négatif si $\frac{1}{1-m_i}$ est supérieur à la somme des $\frac{1}{1-m_k}$ divisée par le nombre des participants moins 1. Dans un tel cas, Léonard dit simplement que le problème est impossible, à moins que l'on ne considère que le participant concerné a une *dette*, qui devra être soustraite des biens des autres.

L'attitude de Léonard par rapport aux solutions négatives est claire: on ne lèvera l'impossibilité qu'en interprétant le résultat négatif par une inversion du concept qu'il représente —par quoi la solution négative est *de facto* transformée en une solution positive. Pourtant, cette attitude de refus eut pour conséquence que l'on n'exclut plus *a priori* des solutions négatives. Le pas suivant fut franchi dans un traité anonyme, écrit en provençal vers 1435, qui, lui, admit une solution négative sans l'interpréter. Son auteur le fit pour un système comme celui que nous venons de voir, concernant cette fois l'acquisition d'une pièce de drap par cinq marchands, soit

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 + \frac{1}{2}(x_2 + x_3 + x_4 + x_5) = y \\ x_2 + \frac{1}{3}(x_3 + x_4 + x_5 + x_1) = y \\ x_3 + \frac{1}{4}(x_4 + x_5 + x_1 + x_2) = y \\ x_4 + \frac{1}{5}(x_5 + x_1 + x_2 + x_3) = y \\ x_5 + \frac{1}{6}(x_1 + x_2 + x_3 + x_4) = y, \end{array} \right.$$

lequel problème suit le traitement des deux cas similaires pour $n=3$ et 4 , qui, eux, ont des solutions positives²⁸. En posant dans ce dernier système $S-y=60$, il calcule que $x_1=-10\frac{3}{4}$, $x_2=19\frac{1}{4}$, $x_3=29\frac{1}{4}$, $x_4=34\frac{1}{4}$, $x_5=37\frac{1}{4}$. Or, il dit bien que le premier $-10\frac{3}{4}$ «moins que rien (*mens de nonres*)», mais la particularité du résultat apparaît du fait que dans ce problème, et dans ce problème seulement, la validité de la solution est prouvée par l'introduction des valeurs trouvées dans chacune des équations.

Cette acceptation arrivait à son heure: la deuxième moitié du XV^e siècle verra quelques exemples d'autres acceptations —certes toujours timides—, que ce soit dans des problèmes à données concrètes ou en nombres. Mais il s'en faudra de beaucoup que les nombres négatifs gagnent plein droit de cité: ils resteront longtemps des *numeri ficti* (Cardan) ou des *racines fausses* (Descartes), et seule l'exigence axiomatique de leur nécessaire introduction pour que la soustraction puisse être effectuée sans restriction allait, au XIX^e siècle, les détacher du problème de leur application occasionnelle à des phénomènes réels.

²⁸Manuscrit français n. acq. 4140 de la Bibliothèque Nationale de Paris, fol. 100^r-101^v.

5. L'APPARITION DES NOMBRES COMPLEXES AU XVI^e SIECLE

Depuis la fin du XIV^e siècle on savait, en Italie, qu'une équation complète du troisième degré

$$y^3 + ay^2 + by + c = 0$$

(en écriture moderne, puisque l'on n'égalait pas encore à zéro) pouvait être transformée en posant $y = x - \frac{a}{3}$ en une équation du troisième degré déficiente du terme quadratique. Ainsi, en particulier, l'équation à coefficients positifs

$$y^3 + ay^2 + by = c,$$

qui a toujours une solution positive, devenait

$$x^3 + px = q.$$

L'identité —connue au moins depuis l'antiquité grecque—

$$(u-v)^3 = u^3 - 3u^2v + 3uv^2 - v^3$$

$$(u-v)^3 + 3uv(u-v) = u^3 - v^3,$$

ce qui permettait de poser, par identification avec l'équation précédente,

$$u - v = x$$

$$uv = \frac{p}{3}$$

$$u^3 - v^3 = q.$$

Grâce à l'identité bien connue depuis les temps mésopotamiens (cf. p. 275),

$$\left(\frac{u^3 + v^3}{2} \right)^2 = \left(\frac{u^3 - v^3}{2} \right)^2 + u^3 v^3, \text{ on avait alors}$$

$$\frac{u^3 + v^3}{2} = \sqrt{\left(\frac{q}{2} \right)^2 + \left(\frac{p}{3} \right)^3}.$$

Comme d'autre part

$$\frac{u^3 - v^3}{2} = \frac{q}{2},$$

on obtenait par l'application de la formule de la demi-somme et de la demi-différence

$$u^3, v^3 = \sqrt{\left(\frac{q}{2} \right)^2 + \left(\frac{p}{3} \right)^3} \pm \frac{q}{2}$$

et donc

$$x = u - v = \sqrt[3]{\sqrt{\left(\frac{q}{2} \right)^2 + \left(\frac{p}{3} \right)^3} + \frac{q}{2}} - \sqrt[3]{\sqrt{\left(\frac{q}{2} \right)^2 + \left(\frac{p}{3} \right)^3} - \frac{q}{2}}.$$

On sait que, vers 1500, Scipione del Ferro était en possession de cette formule, qui donna naissance aux formules des autres cas par ses successeurs Tartaglia et Cardan. Quoique l'on ne connaisse des recherches de del Ferro que le résultat ci-dessus, il n'y a guère de doute qu'il l'ait obtenu de la manière vue.

La formule de del Ferro correspondait donc au cas $x^3 + px = q$ avec, en particulier, p positif. La formule générale, applicable aux deux autres formes réduites à solutions positives, soit $x^3 = px + q$ et $x^3 + q = px$, est

$$x = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}},$$

dite «formule de Cardan».

La découverte de la résolution de l'équation du troisième degré eut une conséquence notable. On voit que, dans le cas où $p < 0$, on peut avoir $(\frac{q}{2})^2 + (\frac{p}{3})^3 < 0$, c'est-à-dire que la quantité sous le radical de la racine carrée peut devenir négative —ce qui, incidemment, est précisément le cas où les *trois* racines de l'équation sont réelles et distinctes. Ainsi, dans son «Algebra» de 1572, R. Bombelli avait remarqué que l'équation $x^3 = 15x + 4$ qui, selon la formule de Cardan (avec $p = -15$, $q = -4$), avait la solution

$$\sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}},$$

était pourtant satisfaite numériquement par la solution évidente $x = 4$. Il avait en outre démontré *géométriquement* que l'équation $x^3 = px + q$, avec p et q positifs, devait avoir une solution positive, et ceci quelles que fussent les grandeurs respectives de p et de q . Il eut donc l'idée de poser, dans son cas particulier de $x^3 = 15x + 4$,

$$\begin{aligned}\sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} &= 2 + r\sqrt{-1} \\ \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}} &= 2 - r\sqrt{-1},\end{aligned}$$

qui donnait bien la valeur $x = 4$ par addition; élevant chaque côté des deux égalités au cube, il obtenait

$$\begin{aligned}2 + 11\sqrt{-1} &= 8 + 12r\sqrt{-1} - 6r^2 - r^3\sqrt{-1} \\ 2 - 11\sqrt{-1} &= 8 - 12r\sqrt{-1} - 6r^2 + r^3\sqrt{-1},\end{aligned}$$

et la détermination $r = 1$ se déduisait de l'égalisation des parties réelles et imaginaires. Il avait ainsi réussi à mettre en évidence la solution désirée, «*benché*, ajoutait-il, *a molti parerà questa cosa stravagante*». Il avait ici appliqué les règles de calcul par lui introduites pour le produit de quantités imaginaires, à savoir, selon sa dénomination de *più di meno* pour $+\sqrt{-k}$ et de *men(o) di meno* pour $-\sqrt{-k}$ (k positif):

<i>più di meno via più di meno fa meno</i>	$\left[(+\sqrt{-k})(+\sqrt{-k}) = -k, \text{ donc } (+i)(+i) = -1 \right]$
<i>più di meno via men di meno fa più</i>	$\left[(+\sqrt{-k})(-\sqrt{-k}) = +k, \text{ donc } (+i)(-i) = +1 \right]$
<i>meno di meno via più di meno fa più</i>	$\left[(-\sqrt{-k})(+\sqrt{-k}) = +k, \text{ donc } (-i)(+i) = +1 \right]$
<i>meno di meno via men di meno fa meno</i>	$\left[(-\sqrt{-k})(-\sqrt{-k}) = -k, \text{ donc } (-i)(-i) = -1 \right]$

²⁹Pour ces diverses contributions de Bombelli, voir la nouvelle édition de l'«Algebra», enrichie d'une partie pas publiée en 1572, par BORTOLOTTI (1966), p. 225, 228-229, 133-134.

La généralisation au cas où la solution positive était inconnue posait toutefois une difficulté. Avec

$$x = \sqrt[3]{u + \sqrt{-v}} + \sqrt[3]{u - \sqrt{-v}}, \text{ on poserait}$$

$$\sqrt[3]{u + \sqrt{-v}} = s + \sqrt{-t}$$

$$\sqrt[3]{u - \sqrt{-v}} = s - \sqrt{-t}, \quad \text{avec } s, t > 0,$$

et la solution réelle positive était $x=2s$. Toutefois, la détermination de s par élévation au cube puis élimination de t entre les deux relations l'amenait en général à une équation de la forme $s^3 = \alpha s + \beta$, donc à une équation du même type que celle du début: c'était le *casus irreducibilis* des mathématiciens de l'époque. F. Viète parvint à contourner la difficulté rencontrée par Bombelli en utilisant une résolution trigonométrique qui donnait même les trois solutions réelles pour le cas du discriminant négatif. A Bombelli revient néanmoins la première tentative de calcul avec les quantités imaginaires — mais, comme on l'a vu, dans le but purement utilitaire d'en déduire les solutions réelles.

6. EPILOGUE

Nous avons assisté à la naissance de deux extensions successives du domaine des nombres, celle des nombres négatifs et celle des nombres complexes, mais nous n'avons mentionné en relation avec elles que des exemples de systèmes linéaires et l'équation du troisième degré, respectivement. Il nous convient de dire quelques mots de l'équation du deuxième degré à cette époque et de ses rapports avec ces deux extensions.

On ne connaît guère d'exemples d'équations du deuxième degré avec des résultats négatifs au XV^e siècle. Le seul exemple s'en trouve chez Luca Pacioli, l'auteur d'une vaste et influente —quoique dépourvue d'originalité— «*Summa de arithmeticā*», parue en 1494 à Venise puis en 1523 à Toscolano. Or, ledit exemple de Pacioli ne se trouve pas dans la «*Summa*», mais dans un manuscrit écrit vers 1480 à l'intention de ses étudiants à Pérouse³⁰. Examinant les solutions de

$$(x+k)k + \left(\frac{x}{2}\right)^2 = l,$$

avec k et l donnés, Pacioli indique que la solution sera $x = 2(\sqrt{l} - k)$, puis il passe à des exemples numériques: $l=100$ avec $k=4$, $l=101$ avec $k=4$, puis à nouveau $l=100$ avec $k=6$ et $k=20$. Il remarque que dans ce dernier cas 20 ne peut être soustrait de $\sqrt{100}$: «*avenga che (20) non si possa chavare dela R(adice) 100*»; il ajoute néanmoins que la solution serait $\sqrt{400} - 40$, «*e tanto seria el numero tutto*».

³⁰Manuscrit latin 3129 de la Bibliothèque Vaticane, fol.351^r (seule la dédicace est en latin).

Dans le même manuscrit (fol. 229v-230r), la solution (complexe) du système

$$\begin{cases} x + y = 10 \\ \frac{y}{x} + x = 5, \end{cases}$$

équivalent à une équation du type $x^2 + q = px$ (avec $q=10$ et $p=6$), est qualifiée d'impossible: soustrayant q de $(\frac{p}{2})^2$, «restarà non so quanto, dit Pacioli, perché l'è più el numero [donc q] che non ve la multiplicatione dela $\frac{1}{2}$ (du coefficient) dele chose [des x]³¹ in se. Impossibile».

Au XVI^e siècle, nonobstant l'utilisation croissante des nombres négatifs voire des nombres complexes, leurs applications à des solutions d'équations quadratiques sont rares. Le premier exemple que l'on connaisse pour une solution complexe est celui de Cardan dans le chapitre XXXVII de l'«Ars magna», qui remarque que la solution, qualifiée plus loin de *sophistica*, du système

$$\begin{cases} x + y = 10 \\ x \cdot y = 40 \end{cases}$$

serait $5 + \sqrt{-15}$ et $5 - \sqrt{-15}$ —ou, comme Cardan l'écrit, $5 \tilde{p}R \tilde{m} 15$ respectivement $5 \tilde{m}R \tilde{m} 15$, avec les abréviations d'écriture \tilde{p} pour *più* et \tilde{m} pour *meno* (fig. 14; on notera la remarque initiale «*manifestum est quod casus seu quaestio est impossibilis*»).

REGOLA II.

Secundum genus positionis falsæ, est per radicem \tilde{m} . Et dabo exemplum, si quis dicat, diuide 10. in duas partes, ex quarum unius in reliquam ductu, producatur 30. aut 40. manifestum est quad casus seu quaestio est impossibilis, sic tamen operabimur, diuidemus 10. per æqualia, & fiet eius medietas 5. duc in se fit 25. auferes ex 25. ipsum producendum, vtpote 40. vt docuite, in capitulo operationum, in quarto libro, fiet residuum \tilde{m} . 15. cuius 8. addita & detracta à 5. ostendit partes, quæ inuicem ductæ producunt 40. erunt igitur hæ, 5. \tilde{p} . 8. \tilde{m} . 15. & 5. \tilde{m} . 8. \tilde{m} . 15.

Figure 14.

³¹Le latin *res* puis l'italien *cosa* rendent l'arabe *chay'*, utilisé pour la dénomination de l'inconnue au premier degré.

Même Bombelli rechigna à admettre une solution complexe pour l'équation $x^2 + 20 = 8x$:³² «*questo agguagliamento non si può fare se non in questo modo sofistico*», à savoir d'écrire $4 + \sqrt{-4}$ et $4 - \sqrt{-4}$, «*e ciascuna di queste quantità da sé sarà la valuta del Tanto* (de x)».

Deux siècles après, Euler remarque dans son «Algebra» (I,§151) que les solutions de

$$\begin{cases} x + y = 12 \\ x \cdot y = 40 \end{cases}$$

sont $6 + \sqrt{-4}$ et $6 - \sqrt{-4}$, en sorte que «*die zwei gesuchten Teile (...) unmöglich sind*» –ce qui ne l'empêche pas de considérer que «*diese Lehre* (der unmöglichen Zahlen) *ist in der That von der größten Wichtigkeit*».

Il faut se rendre à l'évidence que l'équation du deuxième degré, dont l'exposition de la résolution et les applications avaient été pendant trente-cinq siècles l'une des préoccupations principales des mathématiciens, ne présentait plus qu'un moindre intérêt, et que ses solutions négatives et surtout complexes n'étaient en quelque sorte regardées que comme des curiosités. La situation devait changer avec la démonstration du théorème fondamental de l'algèbre. Mais l'équation du deuxième degré allait alors s'en trouver reléguée au rang de cas particulier.

RÉFÉRENCES

- ABŪ KĀMIL, 1986. The book of algebra (...) by Abū Kāmil. Institut für Gesch. d. arab.-islam. Wissenschaften, Francfort s. M. xi+226 p.
- BONCOMPAGNI B., 1857. Il Liber Abbaci di Leonardo Pisano. Tipografia delle scienze mat. e fis., Rome. 459 p.
- BORTOLOTTI E., 1966. L'Algebra, opera di Rafael Bombelli da Bologna. Feltrinelli, Milan. Ixiii+671 p.
- FLÜGEL G., 1835-58. Lexicon bibliographicum et encyclopaedicum a (...) Haji Khalfa (...) compositum, ed. & Lat. vert. G. Flügel. Oriental translation fund (Londres), Leipzig 1835-1858. 8 vol.
- HÉRON, 1899-1914. Heronis Alexandrini Opera quae supersunt [paene] omnia. Teubner, Leipzig 1899-1914. 6 vol. [Réimpression: Teubner, Stuttgart, 1976. 5 vol.].
- LEVEY M., 1966. The Algebra of Abū Kāmil. University of Wisconsin Press, Madison. xi+226 p.
- NAU F., 1910. «Notes d'astronomie syrienne». *Journal asiatique*, sér. X, vol. 16: 209-228.
- ROSEN F., 1831. The Algebra of Mohammed ben Musa. Oriental translation fund, Londres. xvi+208+123 p. [Réimpression: Olms, Hildesheim, 1986].
- SAYILI A., 1962. The Algebra of Ibn Türk, *Türk tarih kurumu yayınlarından*, sér. VII, vol. 41. 176 p.
- SESIANO J., 1985. The appearance of negative solutions in mediaeval mathematics. *Arch. hist. ex. sci.*, 32: 105-150.

³²Voir BORTOLOTTI (1966), p. 201.

THUREAU-DANGIN F., 1938. Textes mathématiques babyloniens. Brill, Leyde. xl+243 p.
 WOEPCKE F., 1851. L'Algèbre d'Omar Alkhayyâmî. Duprat, Paris. xix+128+52 p.
 [Réimpression dans: F. Woepcke, «Etudes sur les mathématiques arabo-islamiques», Institut für Gesch. d. arab.-islam. Wissenschaften, Francfort s. M., 1986. 2 vol.].

BIBLIOGRAPHIE GÉNÉRALE

- CANTOR M., 1901-1913. Vorlesungen über Geschichte der Mathematik. Teubner, Leipzig. 4 vol. [Réimpression: Teubner, Stuttgart, 1965].
- HEATH TH., 1921. A history of Greek mathematics. Clarendon Press, Oxford. 2 vol. [Réimpression: Dover, New York, 1981].
- JUSCHKEWITSCH A., 1964. Geschichte der Mathematik im Mittelalter. Teubner, Leipzig. viii+454 p.
- SCHOLZ E. *et al.*, 1990. Geschichte der Algebra. Wissenschaftsverlag, Mannheim. 506 p.
- TROPFKE J. *et al.*, 1980. Geschichte der Elementarmathematik. De Gruyter, Berlin. xiii+742 p., 4^e édition.
- VOGEL K., 1959. Vorgriechische Mathematik II: Die Mathematik der Babylonier. H. Schrödel & F. Schöningh, Hannover & Paderborn. 94 p.

Manuscrit reçu le 7 septembre 1992