

Zeitschrift: Bulletin de la Société Vaudoise des Sciences Naturelles
Herausgeber: Société Vaudoise des Sciences Naturelles
Band: 81 (1992)
Heft: 1

Artikel: Le compte est bon
Autor: Ojanguren, Manuel
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-279868>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 09.12.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

Le compte est bon

par

Manuel OJANGUREN¹

Abstract.-OJANGUREN M., 1992. The Baron² is bad. *Bull. Soc. vaud. Sc. nat.* 81:231-244.

It took three centuries to learn how to count the solutions of a system of algebraic equations. I try to explain why, using as little mathematics as possible.

Résumé.-OJANGUREN M., 1992. Le compte est bon. *Bull. Soc. vaud. Sc. nat.* 81: 231-244.

Il a fallu trois siècles pour apprendre à bien compter les solutions d'un système d'équations algébriques. Je vais essayer d'expliquer pourquoi, en utilisant aussi peu de mathématiques que possible.

EQUATION ALGÉBRIQUES

Nous avons tous appris, à l'école, à résoudre les équations de second degré

$$aX^2 + bX + c = 0$$

où $a \neq 0$, b et c sont des nombres connus et la valeur de X est ce qu'on cherche. On trouve deux, une ou aucune valeur de X qui satisfont l'équation, selon que b^2-4ac est positif, nul ou négatif. Ainsi, les équations

$$X^2 - X + 1 = 0, X^2 + 2X + 1 = 0, \text{ et } X^2 + X + 1 = 0$$

¹Institut de mathématiques, Université, CH-1015 Lausanne.

²Snoopy's rival?

ont, respectivement, deux solutions $X = 1/2 + \sqrt{5}/2$ et $X = 1/2 - \sqrt{5}/2$, une solution ($X = -1$) et aucune. On entend, ici, par «solution», un nombre «réel», c'est-à-dire exprimable par un développement décimal fini ou infini et affecté du signe positif ou négatif. Jusqu'au XVI^e siècle, personne ne s'était jamais plaint du fait que certaines équations quadratiques n'ont pas de solutions: ce n'était pas plus étonnant que l'impossibilité de construire un triangle dont les cotés mesurassent respectivement 1, 2 et 4 mètres. Mais, durant la première moitié du XVI^e siècle, les mathématiciens italiens découvrirent des formules pour résoudre les équations de degré trois et quatre et il apparut alors un phénomène étonnant. Par exemple, une solution de l'équation cubique

$$X^3 + pX + q = 0$$

est donnée par la formule

$$X = \sqrt[3]{\sqrt{(q/2)^2 + (p/3)^3} - \frac{q}{2}} - \sqrt[3]{\sqrt{(q/2)^2 + (p/3)^3} + \frac{q}{2}},$$

attribuée à Girolamo Cardano (celui du joint, bien sûr), qui l'avait probablement prise à Nicolò Tartaglia (c'est-à-dire «le bègue», un sobriquet: pour le contrôle des habitants il s'appelait Nicolò Fontana). Celui-ci prétendait l'avoir trouvée tout seul, mais il semble que la priorité revienne à Scipione dal Ferro. Mais ne divaguons pas. Que fait le mathématicien prudent quand il découvre une si belle formule, avant de l'envoyer par courrier à *Annals of Mathematics*? Il la teste sur un exemple numérique: prenons $p = -7$ et $q = 6$. En ce cas l'équation s'écrit

$$X^3 - 7X + 6 = (X - 1)(X - 2)(X + 3) = 0$$

et on voit que ses solutions sont $X = 1$, $X = 2$ et $X = -3$. Que donne la formule de Cardano? L'horreur que voici

$$X = \sqrt[3]{\sqrt{-100/27} - 3} - \sqrt[3]{\sqrt{-100/27} + 3}.$$

Et que voit-on apparaître dans la racine cubique? La racine carrée d'un nombre négatif, c'est-à-dire un nombre inexistant! Par ailleurs, si on remplace X par l'expression ci-dessus et qu'on calcule comme si ces racines avaient un sens, on constate que l'équation est satisfaite. Il faut donc avoir l'audace de penser que

$$\sqrt[3]{\sqrt{-100/27} - 3} - \sqrt[3]{\sqrt{-100/27} + 3}$$

non seulement a un sens, mais vaut, plus précisément, 1, 2 ou -3. Calculons donc sans inhibition avec les racines des nombres négatifs. En expérimentant un peu on découvre, la chance aidant, que $(3 - 2\sqrt{-3})^3 = 30\sqrt{-3} - 81$, d'où, en divisant par $27 = 3^3$,

$$\left(\frac{3 - 2\sqrt{-3}}{3}\right)^3 = \sqrt{-\frac{100}{27}} - 3.$$

On peut donc attribuer à la première racine cubique de la formule qui donne X la valeur $(3-2\sqrt{-3})/3$. De même, pour l'autre racine cubique on trouve $(-3-2\sqrt{-3})/3$, de façon que leur différence vaut

$$(3-2\sqrt{-3})/3 - (-3-2\sqrt{-3})/3 = 2.$$

Les racines carrées ont disparu et ce qui reste est bien une solution de l'équation cubique. Ce genre de calculs a, peu à peu, vaincu la méfiance des mathématiciens vis-à-vis des «nombres imaginaires» et les a induits à introduire ce qu'on appelle aujourd'hui le corps des nombres complexes: l'ensemble des $\alpha = a + ib$, où a et b sont des nombres réels et i est une abréviation pour $\sqrt{-1}$. Si b est nul le nombre α est réel et si a est nul on dit qu'il est «purement imaginaire». Il n'y a aucun doute que l'introduction des nombres complexes a été une des étapes les plus importantes du développement des mathématiques. Pourtant elle n'est due qu'à la foi dans des formules apparemment absurdes. Ce cas n'a rien d'exceptionnel: on sait bien, par exemple, qu'en prenant au sérieux certaines formules qui mélangent de façon absurde l'espace et le temps, on finit, inévitablement, par découvrir la théorie de la relativité.

Revenons un instant à l'équation quadratique. Si on s'autorise l'emploi des nombres complexes, toute équation de second degré a une ou deux solutions. Par exemple, l'équation $X^2 + X + 1 = 0$ est satisfaite par $X = (-1+i\sqrt{3})/2$ et par $X = (-1-i\sqrt{3})/2$. Mais il y a mieux: *toute équation à coefficients réels ou complexes a au moins une solution complexe*. Ce résultat, qu'on appelait autrefois «le théorème fondamental de l'algèbre», montre que pour étudier les solutions des équations algébriques il convient de se limiter d'abord aux solutions complexes des équations à coefficients complexes, quitte à fignoler, dans un deuxième temps, sur les solutions réelles ou rationnelles, etc.

Essayons maintenant de voir pourquoi une équation de degré 2 n'a, parfois, qu'une seule solution. Si on examine l'équation $X^2 = c$, on constate qu'elle a deux solutions réelles si c est positif, deux solutions imaginaires si c est négatif, et une solution nulle si c vaut zéro. Si on attribue à c des valeurs qui tendent vers zéro, on voit que les solutions font de même et que la solution $X = 0$ est la limite de deux solutions distinctes qui tendent vers zéro. On est bien tenté de dire qu'il s'agit d'une solution «double» et d'affirmer qu'une équation quadratique a toujours «deux» solutions, même si parfois elles sont «confondues». Tout ceci est un peu vague mais peut s'exprimer de façon précise, dans le cas d'une équation

$$f(X) = a_0 X^n + a_1 X^{n-1} + \dots + a_{n-1} X + a_n = 0$$

de degré n quelconque, de la façon que voici.

Soit α_1 une solution. On voit facilement que le polynôme $f(X)$ est divisible par $X - \alpha_1$, c'est-à-dire qu'il s'écrit sous la forme

$$f(X) = (X - \alpha_1)g(X),$$

où $g(X)$ est un polynôme de degré $n-1$. Si $g(\alpha_1) \neq 0$, on dit que α_1 est une solution «simple» de l'équation $f(X) = 0$, ou encore que sa «multiplicité»

vaut 1. Si $g(\alpha_1) = 0$, on divise $g(X)$ par $X - \alpha_1$ et on itère le procédé jusqu'à obtenir une factorisation

$$f(X) = (X - \alpha_1)^{m_1} f_2(X),$$

où $f_2(X)$ est un polynôme de degré $n-m_1$ qui ne s'annule pas en α_1 , c'est-à-dire qui n'est pas divisible par $X - \alpha_1$. On dit alors que la multiplicité de la solution α_1 vaut m_1 . On procède ensuite avec $f_2(X)$ de la même façon et on continue jusqu'à obtenir une factorisation

$$f(X) = (X - \alpha_1)^{m_1} (X - \alpha_2)^{m_2} \dots (X - \alpha_r)^{m_r} a_0.$$

Les nombres complexes $\alpha_1, \dots, \alpha_r$, sont les solutions de l'équation $f(X) = 0$ et les entiers m_1, \dots, m_r leurs multiplicités respectives. Pour bien faire, il faut encore s'assurer que ces entiers ne dépendent que de $f(X)$ et non pas du procédé de factorisation: c'est un exercice facile. Ceci fait, on voit bien que *la somme de toutes les multiplicités est égale au degré n du polynôme f(X)*. Autrement dit, *une équation de degré n a exactement n solutions complexes, si on les compte avec leur multiplicité*.

VARIATION DES COEFFICIENTS

Pendant la séance générale du 18 juillet 1845, les membres de la SVSN écoutèrent –distraitemment, j'imagine – les observations de M. le professeur J. Gay sur les équations de la forme $aX^2 + bX + c = 0$. Il s'agissait, plus précisément, d'étudier le comportement de ses solutions quand on fait tendre a vers 0. Considérons donc une équation de degré n

$$f(X) = a_0 X^n + a_1 X^{n-1} + \dots + a_{n-1} X + a_n = 0.$$

On peut démontrer que, *tant que le coefficient a_0 reste différent de 0*, c'est-à-dire, *tant que l'équation reste effectivement de degré n*, l'ensemble de ses solutions est une fonction continue de ses coefficients. Ceci signifie que si on remplace les coefficients de $f(X)$ par des b_0, \dots, b_n assez proches des a_0, \dots, a_n , chaque solution de $b_0 X^n + \dots + b_n = 0$ se trouvera à une distance aussi petite que l'on veut d'une solution de $a_0 X^n + \dots + a_n = 0$. Dans le cas des équations quadratiques ce résultat est évident car les solutions sont données par la formule

$$X = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

dont le membre de droite est une fonction continue de a, b, c , tant que a se tient à l'écart de zéro. Remarquons encore que si on compte les solutions naïvement, c'est-à-dire sans faire attention à leur multiplicité, une variation arbitrairement petite des coefficients peut changer leur nombre, comme quand on passe de $X^2 = 0$ à $X^2 + c = 0$. En général, une petite variation des coefficients d'une équation de degré n fait «exploser» chaque solution de multiplicité m en une agglomération de m solutions, de multiplicité totale m .

Que se passe-t-il quand, dans l'équation $aX^2 + bX + c = 0$, on pose $a = 0$? La réponse est très simple: si $b \neq 0$, on obtient une équation de degré 1, qui n'a qu'une solution. Si $b = 0$, soit il n'y a plus de solutions, soit il n'y a plus d'équation, comme dans l'histoire de Nasruddin et du chat³: laissons ce cas de côté, pour le moment, et supposons $b \neq 0$. Si on procède de façon moins brutale et qu'on fait tendre doucement a vers zéro, on constate que la solution

$$X = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-4ac}{2a(\sqrt{b^2 - 4ac} + b)} = \frac{-2c}{\sqrt{b^2 - 4ac} + b}$$

tend vers $-c/b$, qui n'est rien d'autre que la solution de l'équation $bX + c = 0$. La solution

$$X = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a},$$

par contre, tend vers l'infini. On a donc l'impression que, pour faire en sorte que la continuité des solutions (ou du moins de leur nombre) ne soit pas violée quand a tend vers zéro, il faut introduire des solutions fictives «à l'infini». On peut le faire d'une façon tout à fait rigoureuse, et qui conduit à une grande simplification de toutes ces questions. Remplaçons X par X/T dans l'équation originale et multiplions-la par T^2 . Nous obtenons

$$aX^2 + bXT + cT^2 = 0$$

Toute paire (X, T) de nombres complexes qui satisfait cette équation nous fournit, si $T \neq 0$, une solution de l'équation originale, à savoir X/T . Il est clair que deux paires proportionnelles fournissent la même solution. Ainsi la solution

$$X = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a},$$

s'obtient de la paire $(-b - \sqrt{b^2 - 4ac}, 2a)$ qui, quand a tend vers zéro, tend vers la paire $(-2b, 0)$. La solution «à l'infini» correspond donc à la paire $(-2b, 0)$, ou à toute autre paire qui lui soit proportionnelle, par exemple $(1, 0)$. On organise les paires (X, T) en un objet mathématique, appelé «droite projective complexe», de la façon suivante. Tout d'abord, on rejette la paire $(0, 0)$ et on se limite aux paires où X et T ne sont pas nuls en même temps. Ensuite, on identifie entre elles les paires proportionnelles: après tout, ce sont les quotients X/T qui nous intéressent. Enfin, pour des raisons qui apparaîtront plus tard, on appelle «point», et on le note $[X, T]$ l'ensemble des paires proportionnelles à (X, T) . Les points $[X, T]$ avec $T \neq 0$ correspondent aux nombres complexes et on les appelle aussi «points à distance finie». Le point $[1, 0]$ est appelé «point à

³Interrogée par son mari au sujet d'une livre de viande achetée la veille, la femme de Nasruddin prétendit que le chat l'avait mangée. Nasruddin pesa le chat: tout juste une livre! «Si ceci est le chat», dit-il, «où est la viande? Et si c'est la viande, où est le chat?»

l'infini»: il correspondrait à un nombre $1/0$, si cela avait un sens. On peut maintenant déclarer qu'une équation quadratique est une équation homogène à deux variables

$$aX^2 + bXT + cT^2 = 0,$$

où les coefficients a, b, c ne sont pas tous nuls. Les solutions de l'équation sont les points $[X, T]$ qui la satisfont. Si $a \neq 0$ ces points sont à distance finie, mais si, par exemple, $a = 0$ et $b \neq 0$, l'équation est satisfaite par le point $[c, -b]$ qui correspond au nombre $-c/b$ et par le point à l'infini $[1, 0]$. La situation est maintenant parfaitement symétrique en X et T : si $a = b = 0$ et donc $c \neq 0$, l'équation a comme solution le point à l'infini avec multiplicité 2.

De façon générale, une équation de degré n est une équation homogène en X et T

$$F(X, T) = a_0X^n + a_1X^{n-1}T + \dots + a_{n-1}XT^{n-1} + a_nT^n = 0,$$

à coefficients non tous nuls. Ses solutions sont des points de la droite projective et le point à l'infini est une solution de multiplicité m si et seulement si les m premiers coefficients de l'équation sont nuls et le suivant ne l'est pas. Une telle équation a toujours exactement n solutions si on les compte avec leur multiplicité et si on tient compte des solutions à l'infini.

Pour exprimer la continuité des racines il faut dire ce qu'on entend par «un point $[X, T]$ près du point $[A, B]$ ». C'est clair si $B \neq 0$: T doit être $\neq 0$ et X/T près de A/B . Si $[A, B] = [1, 0]$, on déclare que $[X, T]$ est d'autant plus près de $[A, B]$ que X/T est plus grand. Ceci correspond bien à l'intuition qu'on a du point à l'infini et permet de démontrer que *les n solutions (bien comptées) d'une équation de degré n sont des fonctions continues des coefficients de l'équation*.

COURBES ALGÉBRIQUESS

Nous allons maintenant examiner les systèmes d'équations. Le cas le plus simple est celui de deux équations à deux inconnues. Considérons, à titre d'exemple, le système

$$\begin{cases} f(X, Y) = X^3 + Y^3 - 3XY = 0 \\ g(X, Y) = aX + bY + c = 0. \end{cases}$$

Avant de faire des calculs il convient de représenter les deux équations par les courbes qu'elles définissent. La première est l'équation de la feuille de Descartes et la deuxième celle d'une droite.

N'oublions pas que les dessins représentent les points réels des courbes, mais que celles-ci ont aussi des points complexes imaginaires. On constate, en expérimentant un peu, que si on choisit a, b et c au hasard le système a trois solutions. Prenons par exemple $g(X, Y) = Y - pX - q$ et remplaçons Y par $pX + q$ dans $f(X, Y)$. Nous obtenons l'équation qui donne les abscisses des points d'intersection de la courbe avec la droite:

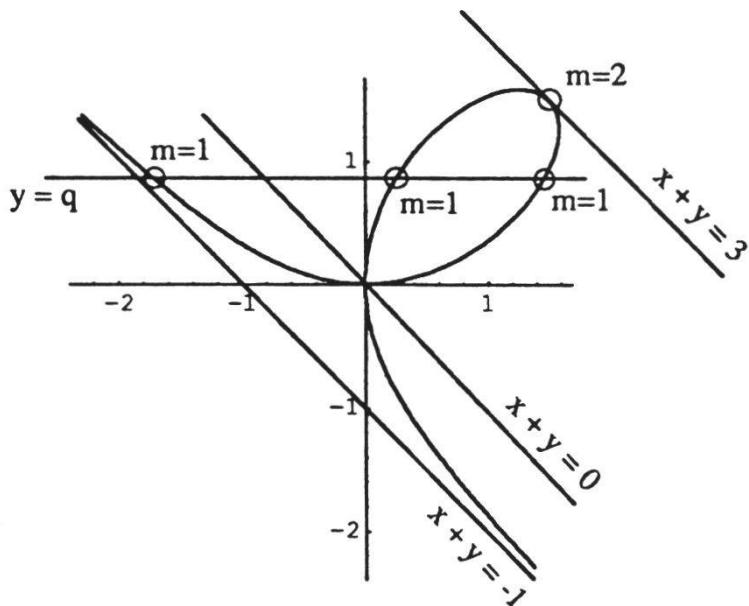


Figure 1.—Multiplicité des intersections de la feuille de Descartes avec quelques droites.

$$X^3 + (pX + q)^3 - 3X(pX + q) = (1 + p^3)X^3 + 3p(pq - 1)X^2 + 3q(pq - 1)X + q^3 = 0.$$

Si, par exemple, on choisit $p = 0$ et qu'on fait varier q , on obtient l'équation

$$X^3 - 3qX + q^3 = 0,$$

qui donne les points d'intersection de la courbe avec une droite horizontale. Il y en a trois distinctes sauf si $q = 0$ ou $q^3 = 4$. Pour $q = 0$ il n'y a qu'une intersection, mais comme l'équation devient, en ce cas, $X^3 = 0$, il semble raisonnable de dire qu'il s'agit d'une intersection triple. Ceci est en accord avec le fait que, pour q petit et positif, la droite $Y = q$ a trois intersections distinctes avec la courbe, qui tendent vers l'origine quand q tend vers zéro. De même, si on choisit $p = -1$, on trouve que les abscisses des points d'intersection sont données par l'équation

$$3(q+1)X^2 + 3q(q+1)X + q^3 = 0,$$

qui n'est de degré deux que si $q \neq -1$. L'abaissement du degré indique qu'une des trois intersections a disparu à l'infini. Les deux qui restent deviennent une seule, double, quand q devient nul ou quand $q = 3$. Dans le premier cas, la droite coupe la courbe dans son «point double», dans le deuxième, elle est tangente à la courbe. Si q vaut -1 , l'équation devient $-1 = 0$, ce qui indique que les solutions ont toutes disparu à l'infini. Ces exemples montrent que pour bien compter le nombre d'intersections de deux courbes il faut, comme dans le cas des équations à une inconnue, attribuer à chaque intersection une multiplicité et tenir compte des solutions «à l'infini». Cette dernière condition

est facilement satisfaite: on remplace X et Y par X/T et Y/T , puis on multiplie les équations du système par les plus petites puissances de T qui en font disparaître les dénominateurs. Le système à résoudre devient alors, dans le cas de notre exemple,

$$\begin{cases} F(X, Y, T) = X^3 + Y^3 - 3XYT = 0 \\ G(X, Y, T) = aX + bY + cT = 0. \end{cases}$$

Les points seront représentés par des triplets (X, Y, T) avec X, Y et T non tous nuls, étant entendu que des triplets proportionnels représentent le même point. Les points «à l'infini» seront ceux où $T = 0$. Les points usuels, «à distance finie», seront donc aussi décrits par les coordonnées cartésiennes habituelles $(X/T, Y/T)$. Ceci n'est guère plus difficile que dans le cas d'une équation à une inconnue. La définition de la multiplicité d'intersection doit être de nature «locale»: elle ne doit dépendre que des morceaux des deux courbes contenus dans un petit voisinage du point d'intersection qu'on considère. On peut la formuler de nombreuses façons, la plus simple (pour les mathématiciens) étant celle-ci: quitte à permuter entre eux X, Y, T , on peut supposer que le point en question est à distance finie. Les deux courbes sont décrites, près de ce point (et même assez loin, mais peu importe), par deux équations, $f(X, Y) = 0$ et $g(X, Y) = 0$. Quitte à faire une translation, on peut supposer que le point d'intersection est l'origine des axes de coordonnées. La multiplicité d'intersection en ce point est alors égale à la dimension du quotient $A/(f, g)$, où A est l'anneau des fonctions rationnelles en X et Y qui restent finies à l'origine. Le nombre d'intersections de deux courbes (en supposant, bien entendu, qu'elles n'aient pas toute une courbe en commun) est alors, par définition, la somme des multiplicités d'intersections de tous les points (même à l'infini) où elles s'intersectent. C'est l'analogue du nombre des solutions d'une équation en X . *Ce nombre d'intersections est égal au produit des degrés des équations qui définissent les deux courbes:* c'est ce qu'on appelle le «théorème de Bézout». En réalité Bézout ne s'était pas occupé de multiplicités et avait démontré que le nombre «naïf» d'intersections (c'est-à-dire toutes comptées avec multiplicité 1) ne dépasse pas le produit des degrés.

La définition de multiplicité d'intersection et le théorème de Bézout s'étendent facilement au cas de n équations à n inconnues, pour autant que le nombre de solutions soit fini. Plus précisément, définissons l'espace projectif à n dimensions comme l'ensemble des «points» $[a_0, \dots, a_n]$, où les a_i ne sont pas tous nuls et deux points sont égaux si leurs coordonnées sont proportionnelles. Alors, si F_1, \dots, F_n sont des polynômes en X_0, \dots, X_n , homogènes de degré d_1, \dots, d_n , tels que le système $F_1 = \dots = F_n = 0$ n'a qu'un nombre fini de solutions, ce nombre vaut $d_1 \cdots d_n$ si chaque solution est comptée avec sa multiplicité.

Les difficultés commencent quand on veut définir la multiplicité d'intersection de deux variétés algébriques quelconques. Elles sont dues au fait que la plupart des variétés algébriques ne sont pas définies par le «bon nombre» d'équations. On pourrait croire, par exemple, qu'une courbe de l'espace à trois dimensions est toujours définie par deux équations et que, de façon générale, une variété de dimension d de l'espace à n dimensions est toujours définie par $n - d$ équations. Il n'en est rien: la détermination du nombre d'équations nécessaires pour définir une courbe ou une variété donnée est un problème difficile, sur lequel on a fait récemment plusieurs progrès,

mais dont la solution générale n'est pas en vue. Ces difficultés sont l'objet du prochain paragraphe.

UNE POLÉMIQUE

Pensons à une sphère coupée par un plan le long d'un cercle, comme dans la figure. L'intersection est un cercle et en aucun de ses points le plan et la sphère ne sont tangents l'un à l'autre: l'expérience faite avec les courbes nous induit à affirmer que le cercle est une intersection «simple» ou «de multiplicité égale à 1» du plan avec la sphère.

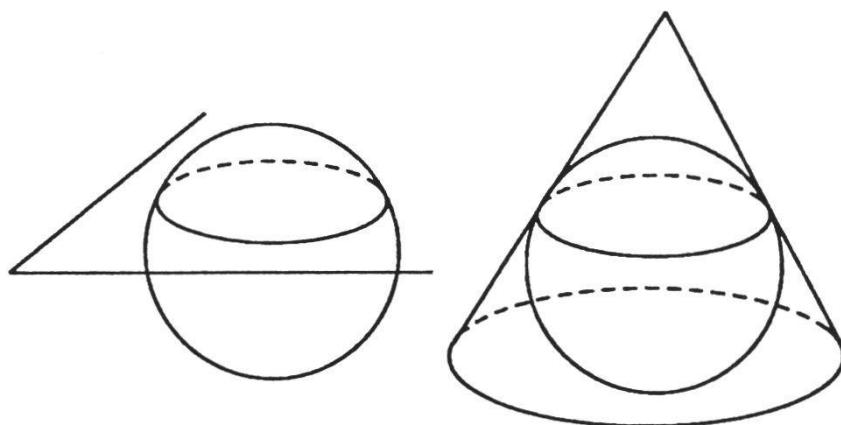


Figure 2.—Intersection d'une sphère avec un plan et un cône tangent.

Regardons maintenant l'intersection de la sphère avec un cône tangent. Il s'agit encore d'un cercle mais, cette fois, si nous baissions un peu le cône nous voyons que le cercle d'intersection se dédouble: il est donc la limite de deux cercles et nous sommes tentés de lui attribuer une multiplicité égale à 2. Ceci serait, de plus, compatible avec la généralisation du théorème de Bézout à laquelle s'attendent ceux qui croient à l'harmonie de l'univers: la sphère est de degré 2 et le plan est de degré 1, donc leur intersection devrait avoir degré $1 \cdot 2 = 2$, ce qui est bien le cas du cercle. Dans le cas du cône, l'intersection devrait avoir degré $2 \cdot 2 = 4$, et comme le cercle est de degré 2, si on le compte deux fois on obtient bien ce qu'on veut. Ici les difficultés auxquelles je faisais allusion ne se présentent pas, car les courbes et les surfaces qui interviennent sont définies par le bon nombre d'équations, à savoir deux et une respectivement. Voici maintenant un cas plus compliqué. Il s'agit d'une courbe de l'espace projectif de dimension trois, étudiée par K. Th. Vahlen (et appelée la quintique de Vahlen). Elle admet une représentation paramétrique en s et t :

$$\begin{cases} X_0 = s^2 t (s - t)(s - \alpha t), \\ X_1 = st^2 (s - t)(s - \alpha t), \\ X_2 = a_0 s^5 + a_1 s^4 t + a_2 s^3 t^2 + a_3 s^2 t^3 + a_4 s t^4 + a_5 t^5, \\ X_3 = b_0 s^5 + b_1 s^4 t + b_2 s^3 t^2 + b_3 s^2 t^3 + b_4 s t^4 + b_5 t^5, \end{cases}$$

où les nombres a_i , b_i et α satisfont quelques conditions sur lesquelles je ne m'étendrai pas, qui assurent que la courbe ne se trouve pas sur une quadrique.

Or, VAHLEN (1891) prétendait que sa courbe n'était pas intersection de moins de quatre surfaces. Autrement dit, choisissez comme vous voulez trois surfaces qui passent par cette courbe: leur intersection contiendra la courbe et au moins un autre point extérieur à la courbe. Cette affirmation a fait partie des choses «bien connues» jusqu'à la publication d'un article de O. PERRON (1942), où l'auteur montrait qu'il existe bien trois surfaces dont l'intersection est exactement la courbe de Vahlen, pas un point de plus, pas un de moins. Perron commente: «*Somit ist die seit 50 Jahren als erledigt geltende Frage, ob es Raumkurven gibt, die nicht als Durchschnitt von weniger als vier Flächen darstellbar sind, heute plötzlich wieder offen*».

Mais tout le monde n'est pas d'accord. L'année suivante, F. SEVERI (1943) –le pape de la géométrie algébrique italienne– publie un long article sur la question, qui commence par ce beau morceau:

«*Daß ein Analytiker im Range von Herrn O. Perron sich mit den Elementen der algebraischen Geometrie beschäftigt, scheint mir eine sehr erfreuliche Tatsache zu sein, weil er jene von einem ganz anderen Gesichtspunkt aus sieht als wir, die wir täglich damit zu tun haben*». En français: «*Occuez-vous de votre analyse et laissez la géométrie algébrique à ceux qui s'y connaissent!*». Dans cet article, il explique à Perron que l'intersection de ses trois surfaces est bien la courbe de Vahlen, mais que l'intersection est de multiplicité supérieure à 1, comme dans l'exemple de la sphère et du cône tangent cité plus haut. Après avoir déclaré que «*Die algebraische Geometrie ist ganz auf dem Vielfachheitsbegriff der Lösungen aufgebaut*», il montre comment on calcule la multiplicité d'une intersection de variétés algébriques, et vers la fin de son article il balance négligemment l'information que «*Die Aufgabe, eine notwendige und hinreichende Bedingung dafür zu suchen, daß eine irreduzible und singularitätenfreie Raumkurve der vollständige Schnitt von drei Flächen sei, [...] ist meinen Schülern im Institut für Hohe Mathematik in Rom gestellt worden*». «*Give it to Gillot*», comme disait l'autre (BECKETT 1961, page 13, note 4).

La réponse de PERRON (1943) paraît dans la «*Mathematische Zeitschrift*». Dans cet article très détaillé il montre, par des exemples élémentaires, que «*das von Herrn Severi angegebene auf der Kroneckerschen Eliminationsmethode beruhende Rezept zur Bestimmung der Vielfachheit schon im Falle endlich vieler Lösungen nicht brauchbar ist, indem es mit dem Bézoutschen Satz im Widerspruch steht*».

Il n'y a pas de doute que les objections de Perron sont tout à fait pertinentes. Le cas de la quintique de Vahlen n'a pas beaucoup d'importance en soi, mais il montre que la notion de multiplicité est loin d'être claire, même dans les cas les plus simples. Selon Perron cette notion n'existe pas, car personne n'en avait donné une définition exacte. Selon Severi, au contraire, cette notion était tellement claire que personne n'avait voulu perdre son temps à la formaliser. Et Perron se moque de lui quand il affirme qu'en 40 ans d'activité il en a toujours tenu compte: «*es sieht daher fast so aus, als wäre ich der erste, der diesen Begriff nicht kennt*».

Puisque la logique, les calculs, le bon sens, l'histoire et les sentiments du public sont contre Severi, nous devons voir s'il n'avait pas quand même un peu raison.

DES CONIQUES

Une conique du plan projectif est décrite par une équation quadratique homogène

$$F(X, Y, Z) = aX^2 + bY^2 + cZ^2 + 2dXY + 2eXZ + 2fYZ = 0.$$

Puisque deux équations proportionnelles définissent la même conique, il convient de penser à la liste des coefficients de F comme à un point $[a, b, c, d, e, f]$ de l'espace projectif à cinq dimensions. On peut donc s'attendre à toujours trouver au moins une conique satisfaisant cinq conditions indépendantes, mais pas six ou plus.

Il se peut que la conique dégénère en deux droites ou en une droite double: c'est le cas si et seulement si les coefficients de F satisfont la condition

$$abc + 2def = af^2 + be^2 + cd^2.$$

Deux coniques d'équation $F = 0$ et $\Phi = 0$ déterminent un pinceau de coniques d'équation $F + t\Phi = 0$, pour chaque valeur de t ou, mieux, pour chaque point t de la droite projective. Si les coefficients de Φ sont α, \dots, φ , les valeurs de t pour lesquelles la conique $F + t\Phi = 0$ est dégénérée sont les solutions de l'équation cubique en t

$$\Delta_0 t^3 + \Delta_1 t^2 + \Delta_2 t + \Delta_3 = 0$$

qu'on obtient de celle écrite ci-dessus en y remplaçant les coefficients de a à f respectivement par $a + t\alpha, \dots, f + t\varphi$. Les coefficients Δ_i sont des formes cubiques en α, \dots, φ . Cette équation a, en général, trois solutions distinctes, qui donnent les trois paires de droites passant par les quatre points d'intersection des deux coniques $F = 0$ et $\Phi = 0$, comme dans la figure de gauche ci-dessous.

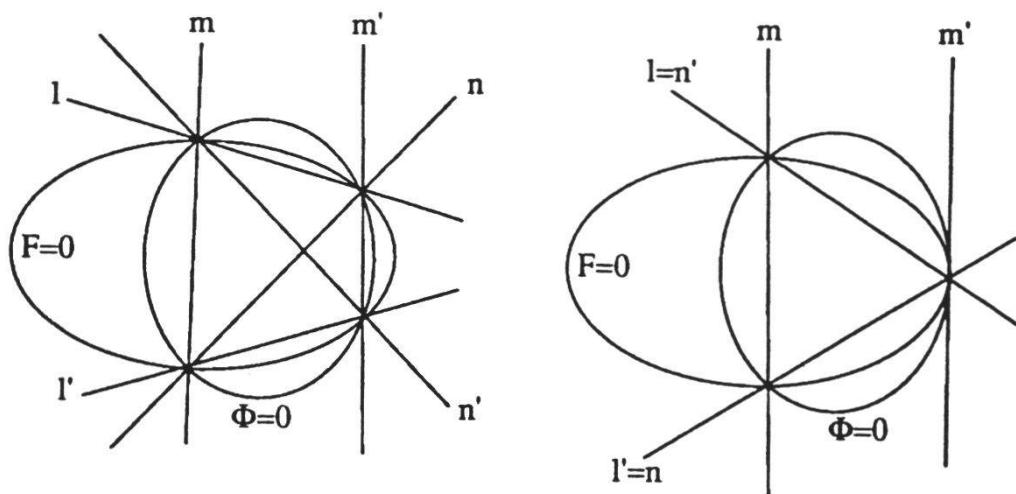


Figure 3.—Coniques dégénérées dans le pinceau déterminé par deux coniques: transverses à gauche, tangentes à droite.

Si les deux coniques sont tangentes en un point, deux de ces paires vont se fondre en une seule, comme dans la figure de droite, et l'équation en t aura une solution double.

Cette condition s'exprime algébriquement, à l'aide des coefficients de l'équation en t , par la condition

$$27\Delta_0^2\Delta_3^2 + 4\Delta_1^3\Delta_3 + 4\Delta_0\Delta_2^3 = 18\Delta_0\Delta_1\Delta_2\Delta_3 + \Delta_1^2\Delta_2^2.$$

Si on remplace les Δ_i par leurs expressions en fonction des coefficients de F et de Φ , on obtient une équation bihomogène de degré 6 en a, \dots, f et en α, \dots, φ . Si maintenant on fixe cinq coniques d'équation $\Phi_1 = 0, \dots, \Phi_5 = 0$, la condition pour que la conique d'équation $F = 0$ soit tangente à chacune des $\Phi_i = 0$ s'exprime par un système de cinq équations homogènes de degré 6

$$H_1(a, \dots, f) = 0, \dots, H_5(a, \dots, f) = 0.$$

On pourrait penser, en appliquant sans scrupules le théorème de Bézout, qu'un tel système a, en général, $6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 = 7776$ solutions, et qu'il y ait donc 7776 coniques tangentes à cinq coniques données. C'est ce qu'avait cru J. STEINER (1848), une des nos gloires nationales⁴, qui dit: «*Durch eine gewisse geometrische Betrachtung glaube ich nun gefunden zu haben: Daß fünf beliebige gegebene Kegelschnitte im Allgemeinen (und höchstens) von 7776 andern Kegelschinten K berührt werden.*» Ce qui prouve que même les grands mathématiciens se trompent grossièrement. S'il avait examiné un exemple du même genre, mais beaucoup plus simple, il aurait vu tout de suite que son raisonnement n'était pas étanche. En effet, la condition pour que la conique $F = 0$ soit tangente à une droite s'exprime par une équation homogène de degré 2 en a, \dots, f . Il faudrait donc s'attendre à ce que le nombre de coniques tangentes à cinq droites fût $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 32$, alors que tout le monde sait qu'il n'y en a qu'une!

La faute est très simple. Dans les deux cas, toute conique dégénérée en une droite double est «tangente» à toute droite ou à toute conique du plan ou même à toute courbe du plan, car ses intersections avec elle ont toutes une multiplicité au moins égale à deux. Le système

$$H_1(a, \dots, f) = 0, \dots, H_5(a, \dots, f) = 0$$

a donc une infinité de solutions qui correspondent à des droites doubles et (en général) un nombre fini m de solutions qui correspondent à de vraies coniques. On voit que le problème à résoudre est très subtil: il faut écarter une infinité de mauvaises solutions et compter celles qui restent. (N'y a-t-il pas comme un petit parfum de physique dans cette opération?). Chasles, en 1864, trouva que m vaut 3264. Cette valeur est correcte, même si les méthodes employées pour la trouver ne sont pas au-dessus de tout soupçon.

⁴Né en 1796 à Utzenstorf (Berne), il apprit à lire à 14 ans, émigra en Allemagne en 1818, devint membre de l'Académie des Sciences de Berlin et professeur à l'Université de Berlin en 1834; il mourut en 1863 à Berne, où il était rentré l'année précédente.

Malgré le manque de rigueur dans leur traitement, les problèmes de ce type conduisirent à l'élaboration d'une technique de calcul qui avait le mérite de fonctionner, sans pourtant que l'on comprenne pourquoi. Au bout de quelques décennies, plusieurs mathématiciens dominaient si bien ces problèmes d'énumération qu'on aurait pu croire que leur résolution reposait sur une théorie solide. A titre d'exemple, je dirai que Schubert, à qui on doit, en grande partie, le développement de cette technique, affirma, dans un traité systématique sur ces questions (SCHUBERT 1879), que le nombre de cubiques gauches tangentes à douze quadriques données vaut 5819539783680, ni plus, ni moins. Ce n'est certainement pas en étudiant quelques exemples numériques qu'on trouve un nombre pareil, mais il est bien vrai que la foi dans la méthode provenait du fait qu'elle fournissait les bonne réponses dans tous les cas simples qu'on savait traiter par d'autres moyens. Severi pouvait donc croire qu'un petit effort aurait suffi pour élaborer une théorie formelle de la multiplicité d'intersection. Pour être juste, il faut quand même mentionner que Hilbert, dans la liste de problèmes qu'il avait proposés comme sujets de recherches pour les mathématiciens du XX^e siècle au congrès de Paris de 1900, avait mentionné l'édification d'une théorie rigoureuse du calcul de Schubert (HILBERT 1900). Mais aucun autre mathématicien n'a jamais eu la vision prophétique des mathématiques qu'en avait Hilbert.

Les premiers pas dans l'élaboration rigoureuse d'une telle théorie furent entrepris par plusieurs mathématiciens entre 1945 et 1955. Citons Weil, Severi, van der Waerden, Chevalley, Samuel, Zariski. Un point de vue plus général sera introduit par Serre et Grothendieck quelques années plus tard. Mais une théorie assez puissante pour justifier de façon irréfutable les résultats à la Schubert ne fut achevée que vers 1977, grâce surtout aux recherches de Fulton et MacPherson (FULTON 1984).

En particulier, la première démonstration rigoureuse du résultat de Schubert sur les 5819539783680 cubiques date de 1985. Une fois de plus, la technique a précédé les fondements théoriques: dans toutes les sciences, mathématiques comprises, on bâtit les gratte-ciel en commençant par le cinquantième étage⁵. Il va de soi que la portée de la théorie moderne de l'intersection va bien au-delà des problèmes étudiés dans le traité de Schubert: elle est un des outils indispensables pour résoudre des problèmes de géométrie algébrique moderne et, convenablement généralisée, elle joue un rôle essentiel en théorie des nombres, c'est-à-dire dans les recherches sur les solutions entières de systèmes d'équations à coefficients entiers: les applications en théorie des nombres sont, pour une technique mathématique, une marque de qualité.

«Et la quintique de Vahlen ?» –j'entend rugir la foule. Eh bien! en tenant compte des multiplicités, elle n'est pas intersection de moins de quatre surfaces: l'énoncé précis et la démonstration de ce résultat se trouvent dans le livre de Fulton déjà cité. Une démonstration plus simple vient de paraître dans un article de STÜCKRAD (1992). Vahlen, sans savoir de quoi il parlait, avait vu juste.

⁵Il serait temps de se demander pourquoi, dans l'enseignement, on veut à tout prix commencer par les «bases».

BIBLIOGRAPHIE

- BECKETT S., 1961. Poems in English. London, Calder & Boyars.
- CHASLES M., 1864. Détermination du nombre de sections coniques qui doivent toucher cinq courbes d'ordre quelconques, ou satisfaire à diverses autres conditions. *C. R. Acad. Sci. Paris* 58: 222-226.
- FULTON W., 1984. Intersection Theory. Springer-Verlag, Berlin.
- HILBERT D., 1900. Mathematische Probleme. *Göttinger Nachrichten*: 253-297.
- PERRON O., 1942. Über das Vahlensche Beispiel zu einem Satz von Kronecker. *Math. Z.* 47: 318-324.
- PERRON O. 1943/44. Studien über den Vielfachheitsbegriff und den Bézoutschen Satz. *Math. Z.* 49: 654-680.
- SCHUBERT H., 1879. Kalkül der abzählenden Geometrie. Verlag Teubner, Leipzig.
- SEVERI F., 1943. Über die Darstellung algebraischer Mannigfaltigkeiten als Durchschnitt von Formen. *Abh. a. d. mathem. Seminar der Hamburgischen Universität* 15: 97-119.
- STEINER J., 1848. Elementare Lösung einer geometrischen Aufgabe, und über einige damit in Beziehung stehende Eigenschaften der Kegelschnitte. *J. reine und angew. Math.* 37: 161-192.
- STÜCKRAD J., 1992. On quasi-complete intersections. *Arch. Math.* 58: 529-538.
- VAHLEN K. Th., 1881. Bemerkung zur vollständigen Darstellung algebraischer Raumcurven. *J. reine und angew. Math.* 108: 346-347.

Manuscrit reçu le 1 juin 1992