

**Zeitschrift:** Bulletin de la Société Vaudoise des Sciences Naturelles  
**Herausgeber:** Société Vaudoise des Sciences Naturelles  
**Band:** 63 (1945-1948)  
**Heft:** 264

**Artikel:** Lois de Kirchhoff et fonctions discrètes harmoniques  
**Autor:** Eckmann, B.  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-273562>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 18.04.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

## Lois de Kirchhoff et fonctions discrètes harmoniques

PAR

B. ECKMANN

(Séance du 24 janvier 1945)

Il s'agit dans ce qui suit de deux problèmes simples et élémentaires : le premier est le problème classique de la répartition du courant électrique continu dans un réseau de conducteurs, répartition qui obéit aux deux lois de Kirchhoff ; le second est un problème aux limites pour des fonctions discrètes harmoniques dans un réseau.

Ces deux problèmes sont indépendants, mais seront traités par la même *méthode* appartenant à la *topologie combinatoire des réseaux* (ou polyèdres à une dimension) et se basant en première ligne sur une *projection orthogonale* dans certains espaces vectoriels.

Cette application du formalisme de la topologie combinatoire moderne dans le cas le plus simple, celui des polyèdres à une dimension, peut être généralisée aux polyèdres à un nombre quelconque de dimensions ; on constate alors que les mêmes raisonnements et leurs généralisations naturelles conduisent à des relations qui sont fondamentales pour toute la topologie. Nous resterons toujours ici dans le cas d'une dimension ; les généralisations sont traitées ailleurs<sup>1</sup>.

Dans la première partie nous résumons les éléments de la théorie des réseaux et du formalisme nécessaire pour la suite, en nous bornant toujours à des réseaux *finis*. La seconde partie est consacrée au problème de Kirchhoff, la troisième au problème relatif à des fonctions harmoniques dans un réseau.

<sup>1</sup> B. ECKMANN : *Harmonische Funktionen und Randwertaufgaben in einem Komplex*. *Commentarii mathematici helvetici* 17 (1945), sous presse.

### Les réseaux.

1. Nous considérons un réseau<sup>1</sup> (ou « complexe à une dimension » ou « graphe »), formé par  $\beta$  sommets  $y_1, y_2, \dots, y_\beta$  et  $\alpha$  arêtes  $x_1, x_2, \dots, x_\alpha$  joignant certains couples de sommets ; nous supposons ces arêtes orientées d'une façon arbitraire mais fixe — cela veut dire que pour toute arête  $x_i$  l'un des deux sommets qu'elle joint est considéré comme origine, l'autre comme extrémité de  $x_i$ . Nous désignons par  $\eta_{ik}$  le coefficient d'incidence du sommet  $y_k$  et de l'arête  $x_i$  ; il est égal à  $+1, -1$  ou  $0$  suivant que  $y_k$  est l'extrémité de  $x_i$ , l'origine de  $x_i$  ou n'est pas du tout situé sur  $x_i$ . Ces coefficients d'incidence contiennent tout ce qui nous intéresse dans le réseau.

2. *Chaines.* Une chaîne B à 0 dimensions (ou « 0-chaîne ») dans le réseau est une forme linéaire

$$B = \sum_{k=1}^{\beta} b_k y_k$$

à coefficients réels en  $y_1, y_2, \dots, y_\beta$ , considérés ici comme des indéterminées ; on peut aussi dire que c'est une fonction  $g$  faisant correspondre à tout sommet  $y_k$  un nombre réel  $b_k = g(y_k)$ .

Une chaîne A à une dimension (ou « 1-chaîne ») est une forme linéaire

$$A = \sum_{i=1}^{\alpha} a_i x_i,$$

ou bien une fonction  $g$  des arêtes orientées qui fait correspondre à  $x_i$  le nombre réel  $a_i = g(x_i)$ .

On peut aussi considérer les 0-chaines B comme *vecteurs* à  $\beta$  composantes  $b_1, b_2, \dots, b_\beta$ , et les 1-chaines A comme vecteurs à  $\alpha$  composantes  $a_1, a_2, \dots, a_\alpha$  ; si on opère avec les chaînes comme on le fait avec des formes linéaires ou des vecteurs, les 0-chaines forment un *espace vectoriel réel*  $V^0$  de rang  $\beta$ , les 1-chaines un espace vectoriel  $V^1$  de rang  $\alpha$ . Nous formerons dans ces espaces des *produits scalaires* définis comme d'habitude ; le produit scalaire de deux 1-chaines  $A = \sum a_i x_i$  et  $A' = \sum a'_i x_i$  est donné par

$$A \cdot A' = \sum_{i=1}^{\alpha} a_i a'_i. \quad (1)$$

<sup>1</sup> Pour les définitions et les propriétés élémentaires des réseaux non explicitement mentionnées dans notre texte, voir le chap. I du livre de D. KÖNIG, *Theorie der endlichen und unendlichen Graphen* (Leipzig 1936). Cet ouvrage sera désigné ici par KÖNIG.

Nous dirons aussi que ce produit représente la *valeur* de  $A$  considérée comme fonction des arêtes orientées, sur la chaîne  $A'$  considérée comme figure géométrique (domaine d'intégration). Dans l'espace  $V^0$  on a les définitions analogues.

La valeur ainsi définie d'une 1-chaîne  $A = \sum a_i x_i$  sur l'arête orientée  $x_i$  est  $a_i$ , sur  $-x_i$  elle est  $-a_i$ ; on convient d'entendre par  $-x_i$  l'autre orientation de  $x_i$ , et on peut dire que les valeurs d'une 1-chaîne changent de signe, si on change l'orientation des arêtes.

Deux chaînes de produit scalaire 0 sont dites *orthogonales*.

3. *Projection orthogonale.* Soit  $U^1$  un sous-espace linéaire — nous dirons tout court un *plan* — de rang  $\gamma$  de l'espace vectoriel  $V^1$ . D'après les éléments de la géométrie analytique des espaces vectoriels il correspond à toute chaîne  $A$  de  $V^1$  une et une seule chaîne  $A'$  de  $U^1$  telle que  $A - A'$  soit *orthogonale* au plan  $U^1$ , c. à. d. à toutes les chaînes de  $U^1$ ;  $A'$  est la *projection orthogonale* de  $A$  sur le plan  $U^1$ .

Si, dans une base vectorielle orthogonale et normée de  $V^1$  les composantes de  $A$  sont  $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \dots, \bar{a}_\alpha$ , celles de  $A'$   $\bar{a}'_1, \bar{a}'_2, \dots, \bar{a}'_\alpha$ , on peut exprimer les  $\bar{a}'_i$  en fonction des  $\bar{a}_i$  par des formes linéaires

$$\bar{a}'_i = \sum_{j=1}^{\alpha} u_{ij} \bar{a}_j, \quad i = 1, 2, \dots, \alpha,$$

avec des coefficients réels  $u_{ij}$  qui forment une matrice *symétrique*:  $u_{ij} = u_{ji}$ . En effet, c'est le cas pour une base telle que  $U^1$  y soit le plan déterminé par les  $\gamma$  premiers vecteurs de base, car on a alors

$$\begin{aligned} \bar{a}'_i &= \bar{a}_i && \text{pour } i = 1, 2, \dots, \gamma, \\ \bar{a}'_i &= 0 && \text{pour } i = \gamma + 1, \dots, \alpha; \end{aligned}$$

or cette propriété de symétrie n'est pas modifiée, si on passe d'une base orthogonale et normée à une autre.

#### 4. *Frontière et faisceau.*

Définitions. La *frontière*  $fx$  d'une arête  $x$  d'origine  $y_1$  et d'extrémité  $y_2$  est la 0-chaîne  $y_2 - y_1$ ; à l'aide des coefficients d'incidence  $\eta_{ik}$  (voir N° 1) on peut écrire de façon générale

$$fx_i = \sum_{k=1}^{\beta} \eta_{ik} y_k, \quad \text{pour } i = 1, 2, \dots, \alpha.$$

Le faisceau  $\varphi y$  d'un sommet  $y$  est la 1-chaîne formée par toutes les arêtes  $\pm x_i$  dont  $y$  est l'extrémité, c. à d.

$$\varphi y_k = \sum_{i=1}^{\alpha} \eta_{ik} x_i, \quad \text{pour } k = 1, 2, \dots, \beta.$$

La frontière d'une 1-chaîne  $A = \sum a_i x_i$  et le faisceau d'une 0-chaîne  $B = \sum b_k y_k$  sont définis par

$$fA = \sum_{i=1}^{\alpha} a_i f x_i = \sum_{k=1}^{\beta} \left( \sum_{i=1}^{\alpha} \eta_{ik} a_i \right) y_k,$$

$$\varphi B = \sum_{k=1}^{\beta} b_k \varphi y_k = \sum_{i=1}^{\alpha} \left( \sum_{k=1}^{\beta} \eta_{ik} b_k \right) x_i.$$

Les frontières de toutes les 1-chaînes forment un sous-espace linéaire (un plan)  $F^0$  dans  $V^0$ , les faisceaux de toutes les 0-chaînes un plan  $F^1$  dans  $V^1$ .

Une 1-chaîne  $A$  dont la frontière est nulle est appelée un *cycle*, une 0-chaîne  $B$  dont le faisceau est nul un *cocycle*. Les cycles forment un plan  $C^1$  dans  $V^1$ , les cocycles un plan  $C^0$  dans  $V^0$ .

5. Pour une arête  $x_i$  et un sommet  $y_k$  quelconques on a

$$\varphi y_k \cdot x_i = \sum_{j=1}^{\alpha} \eta_{jk} x_j \cdot x_i = \eta_{ik},$$

et

$$y_k \cdot f x_i = \sum_{j=1}^{\beta} \eta_{ij} y_j \cdot y_k = \eta_{ik},$$

donc

$$\varphi y_k \cdot x_i = y_k \cdot f x_i$$

et pour toute 1-chaîne  $A$  et 0-chaîne  $B$

$$\varphi B \cdot A = B \cdot fA. \quad (2)$$

De cette formule importante on tire facilement les conclusions suivantes : Pour qu'une 1-chaîne  $A$  soit un cycle, il faut et il suffit qu'elle soit orthogonale à tous les faisceaux, et pour qu'une 0-chaîne  $B$  soit un cocycle, il faut et il suffit qu'elle soit orthogonale à toutes les frontières. En effet : Si  $fA = 0$ ,  $\varphi B \cdot A = 0$  pour toute chaîne  $B$  ; et si  $\varphi B \cdot A = 0$  pour toute

chaîne B, alors  $B \cdot fA = 0$  pour toute chaîne B, donc  $fA = 0$ . La seconde partie de la proposition se démontre de la même façon.

En d'autres termes :  $C^1$  est l'ensemble des chaînes de  $V^1$  orthogonales à  $F^1$ . Mais une telle relation est toujours symétrique ;  $F^1$  est donc l'ensemble des chaînes de  $V^1$  orthogonales à  $C^1$ . Nous dirons que  $C^1$  et  $F^1$  sont *deux plans orthogonaux et complémentaires* dans  $V^1$ . —  $C^0$  et  $F^0$  sont de la même façon deux plans orthogonaux et complémentaires dans  $V^0$ .

## 6. Remarques sur les cycles et les cocycles.

Considérons un *polygone fermé* simple dans le réseau, parcouru une fois dans un sens déterminé ; nous lui associons la chaîne

$$P = \sum_{i=1}^{\alpha} p_i x_i,$$

où  $p_i = 0$  pour les arêtes n'appartenant pas au polygone et  $p_i = +1$  ou  $-1$  pour les arêtes du polygone suivant que le sens de parcours du polygone coïncide ou non avec l'orientation de  $x_i$ . Alors on voit facilement que P est un cycle, et on sait<sup>1</sup> que tout cycle est une combinaison linéaire à coefficients réels de chaînes P de ce type associées à des polygones.

Un *cocycle*  $B = \sum b_k y_k$  est caractérisé par la propriété que sa valeur est 0 sur toute frontière  $fx_i = y_{k_1} - y_{k_2}$  du réseau, donc que  $b_{k_1} = b_{k_2}$  ; il a la même valeur en deux sommets *voisins* (c. à. d. joints par une arête), et il a donc également la même valeur en deux sommets qui peuvent être joints par un *chemin*<sup>2</sup> (un polygone ouvert ou une « suite d'arêtes » dans le réseau). Si dans un réseau tout couple de sommets peut être joint par un chemin, on dit que le réseau est *connexe*<sup>2</sup> ; alors la valeur d'un cocycle est la même en tous les sommets du réseau (B est une « constante »). Si le réseau n'est pas connexe, il peut être décomposé en un nombre fini de *composants*<sup>2</sup> connexes ; *les cocycles sont les 0-chaînes de valeur constante dans chaque composant du réseau.*

Pour qu'une 0-chaîne B soit une frontière  $B = fA$ , il faut et il suffit qu'elle soit orthogonale à tous les cocycles. Soit  $B_0$  un cocycle de valeur 1 en tout sommet d'un certain composant du réseau, 0 dans les autres ; B.  $B_0$  est la somme des coefficients de B dans ce composant, et elle doit être nulle. Si réci-

<sup>1</sup> Voir KÖNIG, p. 123, théorème 1.

<sup>2</sup> Voir KÖNIG, chap. I.

proquement la somme des coefficients d'une 0-chaîne B est nulle dans chaque composant du réseau, B est orthogonale au plan  $C^0$  des cocycles, donc une frontière. *Pour qu'une 0-chaîne B soit une frontière, il faut et il suffit que la somme de ses coefficients soit nulle dans chaque composant du réseau.*

### 7. Chaîne de frontière donnée.

Soit B une 0-chaîne vérifiant la condition que nous venons d'énoncer, et soit E une 1-chaîne arbitraire. Alors *il existe toujours une et une seule chaîne S de frontière B et telle que  $E-S$  soit orthogonale à tous les cycles.*

Démonstration. Soit A une chaîne de frontière B, et soient A' et E' les projections orthogonales de A et E dans le plan  $C^1$  des cycles. Alors

$$S = E' + A - A'$$

a les propriétés exigées. En effet

$$fS = fE' + fA - fA' = fA = B$$

et 
$$E - S = (E - E') - (A - A')$$

est orthogonale à  $C^1$ . Soit  $S_1$  une seconde solution vérifiant les deux conditions ; alors

$$f(S - S_1) = fS - fS_1 = 0$$

et 
$$S - S_1 = (E - S_1) - (E - S),$$

c. à. d.  $S - S_1$  est un cycle orthogonal au plan  $C^1$  de tous les cycles, donc  $S - S_1 = 0$  : la solution S est unique.

## Répartition du courant électrique dans un réseau de conducteurs.

8. *Lois de Kirchhoff.* Le courant électrique en régime permanent dans un réseau de conducteurs obéit aux deux lois suivantes : 1° En tout point de ramification du réseau la somme des courants qui affluent vers ce point est nulle. 2° Le long de tout circuit fermé dans le réseau la somme des forces électromotrices est égale à la somme des chutes ohmiques du potentiel.

Si les forces électromotrices et les résistances des conducteurs sont données, il existe toujours une et une seule répartition du courant dans le réseau vérifiant ces deux lois ; en d'au-

tres termes : ces conditions sont toujours compatibles et suffisent pour déterminer les intensités du courant.

Ce théorème important, énoncé déjà par Kirchhoff sans démonstration complète, a été démontré pour la première fois en 1923 par H. Weyl<sup>1</sup>. Les remarques que nous venons de faire sur les réseaux nous permettent de donner une démonstration très simple de ce théorème, pas très différente d'ailleurs de celle donnée par Weyl, et d'y ajouter quelques propriétés de la répartition du courant.

9. Soit  $R$  un réseau (abstrait) représentant le réseau de conducteurs ; les arêtes  $x_i$  de  $R$  correspondent aux conducteurs (p. ex. à des fils métalliques), les sommets  $y_k$  aux points de ramification<sup>2</sup>. Soit  $r_i > 0$  la résistance ohmique de  $x_i$ , et  $e_i$  la force électromotrice introduite sur  $x_i$  mesurée dans le sens de  $x_i$ , et soit  $s_i$  l'intensité du courant sur  $x_i$ , prise avec le signe + si la direction du courant est celle de  $x_i$ , avec le signe — dans l'autre cas. A la répartition du courant nous faisons correspondre la chaîne

$$S = \sum_{i=1}^{\alpha} s_i x_i,$$

aux forces électromotrices la chaîne

$$E = \sum_{i=1}^{\alpha} e_i x_i$$

avec  $e'_i = \frac{e_i}{r_i}$  (se présentant mieux aux calculs que  $\Sigma e_i x_i$ ).

Alors la première loi de Kirchhoff exprime que la valeur de  $S$  est nulle sur tout faisceau  $\varphi y_k$  du réseau, c. à d. que  $S$  est un cycle. Pour formuler la seconde, considérons une chaîne  $P = \Sigma p_i x_i$  associée à un polygone fermé simple (n° 6) ;  $\Sigma p_i s_i r_i$  est la somme des chutes ohmiques du potentiel,  $\Sigma p_i e_i$  la somme des forces électromotrices sur le polygone, les deux mesurées dans le sens de parcours du polygone, et il faut qu'on ait

<sup>1</sup> H. WEYL : *Repartición de corriente en una red conductora*, Revista matemática Hispano-Americana 5 (1923), p. 153-164.

<sup>2</sup> Naturellement il n'est pas exclu qu'en un sommet il n'y ait que deux arêtes ; les sommets du réseau peuvent être des points auxiliaires qui subdivisent un conducteur en plusieurs arêtes.

$$\sum_{i=1}^{\alpha} p_i e_i = \sum_{i=1}^{\alpha} p_i s_i r_i$$

ou

$$\sum_{i=1}^{\alpha} r_i p_i (e_i - s_i) = 0. \quad (3)$$

Il est indiqué de modifier ici légèrement la définition (1) du produit scalaire et de poser pour  $A = \sum a_i r_i$ ,  $A' = \sum a'_i x_i$

$$A \circ A' = \sum_{i=1}^{\alpha} r_i a_i a'_i : \quad (4)$$

pour ce produit scalaire toutes les propriétés relatives à la projection orthogonale (n° 3) subsistent, parce que les  $r_i$  sont positifs et en conséquence la forme quadratique  $A \circ A$  est définie positive<sup>1</sup>. Avec cette convention (3) peut s'écrire

$$P \circ (E - S) = 0 ;$$

la seconde loi de Kirchhoff exige donc que  $E - S$  soit orthogonale<sup>1</sup> à tout polygone  $P$  et, puisque tout cycle est une combinaison linéaire de polygones  $P$ , à tout cycle du réseau.

Le problème qui consiste à déterminer le courant  $S$  par les deux lois de Kirchhoff s'énonce donc ainsi :

*Etant donnée la chaîne  $E$  des forces électromotrices, on cherche un cycle  $S$  tel que  $E - S$  soit orthogonal au plan  $C^1$  des cycles.*

Ce problème possède toujours une et une seule solution :  $S$  est la projection orthogonale de  $E$  sur le plan  $C$  des cycles. Le théorème de Kirchhoff est ainsi démontré.

10. Choisissons une base  $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_\alpha$  de l'espace vectoriel  $V^1$ , orthogonale et normée par rapport au produit scalaire (4), en posant

$$\bar{x}_i = \frac{x_i}{\sqrt{r_i}}, \quad i = 1, 2, \dots, \alpha,$$

et soient  $\bar{s}_i$  et  $\bar{e}_i$  les composantes de  $S$  et de  $E$  dans cette base :

<sup>1</sup> Aux n°s 9-11 «orthogonal» signifie toujours orthogonal par rapport au produit scalaire  $\circ$  défini par (4).

$$\bar{s}_i = \sqrt{r_i} s_i,$$

$$\bar{e}_i = \sqrt{r_i} e_i = \frac{e_i}{\sqrt{r_i}}.$$

Alors les  $\bar{s}_i$  s'expriment en fonction des  $\bar{e}_i$  par des formes

$$\bar{s}_i = \sum_{j=1}^{\alpha} u_{ij} \bar{e}_j, \quad i = 1, 2, \dots, \alpha.$$

avec  $u_{ij} = u_{ji}$  ; d'où

$$\sqrt{r_i} s_i = \sum_{j=1}^{\alpha} u_{ij} \frac{e_j}{\sqrt{r_j}},$$

$$s_i = \sum_{j=1}^{\alpha} \frac{u_{ij}}{\sqrt{r_i r_j}} e_j = \sum_{j=1}^{\alpha} v_{ij} e_j, \quad i = 1, 2, \dots, \alpha.$$

où les  $v_{ij}$  forment une matrice symétrique.

Dans la solution explicite  $s_i = \sum v_{ij} e_j$  du problème de Kirchhoff les coefficients  $v_{ij}$  forment une matrice symétrique. Cela signifie : Si la force électromotrice est 1 en  $x_j$  et 0 ailleurs, on a en  $x_i$  la même intensité de courant qu'on aurait en  $x_j$ , si la force électromotrice était 1 en  $x_i$  et 0 ailleurs.

11. *Une généralisation.* Supposons qu'on ait introduit aux points de ramification  $y_k$  du réseau  $R$ , par des conducteurs n'appartenant pas à  $R$ , des courants d'intensités données  $b_k$ , et qu'on cherche toujours la répartition du courant dans  $R$  vérifiant les lois de Kirchhoff. Alors la condition énoncée par la seconde loi n'est pas modifiée ; mais la condition imposée par la première au courant  $S$  dans le réseau  $R$  prend la forme suivante : En tout sommet  $y_k$ , la valeur <sup>1</sup> de  $S$  sur le faisceau  $\varphi y_k$  augmentée de  $b_k$  doit être nulle :

$$S \cdot \varphi y_k + b_k = 0 \quad \text{pour } k = 1, 2, \dots, \beta.$$

D'après la formule (2), cela signifie que

$$fS \cdot y_k = -b_k \quad \text{pour } k = 1, 2, \dots, \beta,$$

<sup>1</sup> Ici il s'agit du produit scalaire ordinaire défini par (1) et désigné par  $A \cdot A'$ .

ou  $fS = -B$ ,

si on désigne par  $B$  la 0-chaîne  $\sum b_k y_k$  donnée.

*E et B étant données, on cherche donc ici une chaîne S de frontière donnée  $-B$  telle que  $E - S$  soit orthogonale à tous les cycles du réseau.*

Cela n'est possible (n° 6) que lorsque la somme des coefficients de  $B$  est nulle dans chaque composant du réseau, c. à. d. que le courant total introduit dans chaque composant est nul. Mais si c'est le cas, il existe, d'après le résultat du n° 7, toujours *une et une seule solution S*, et le théorème de Kirchhoff reste valable.

### Fonctions harmoniques.

12. Nous considérons une 0-chaîne  $B = \sum b_k y_k$  dans un réseau  $R$  comme *fonction g des sommets* faisant correspondre au sommet  $y_k$  le nombre réel  $g(y_k) = b_k$ . Une telle fonction sera dite *harmonique* en un sommet  $y_k$ , si sa valeur en  $y_k$  est égale à la moyenne arithmétique des valeurs aux sommets voisins de  $y_k$ ; par sommet voisin de  $y_k$  on entend tout sommet qui est joint à  $y_k$  par une arête du réseau. (Evidemment il s'agit dans cette définition d'une analogie avec une propriété bien connue des fonctions harmoniques continues.)

Pour les fonctions harmoniques dans le réseau  $R$  nous posons le problème aux limites suivant :

P) *On donne les valeurs d'une fonction g en certains sommets du réseau — désignons l'ensemble de ces sommets par L — ; on cherche à déterminer les valeurs de g aux autres sommets de R — soit M leur ensemble — de telle façon qu'en tout sommet de M la fonction g soit harmonique.*

Exemple : Soit  $R$  une partie finie du réseau quadratique du plan ; on donne les valeurs d'une fonction sur le bord et on les cherche à l'intérieur de telle façon que la fonction y soit harmonique.

Nous démontrerons que le problème général P) admet toujours une solution, et que cette solution est *unique* lorsque l'ensemble  $L$  où on donne les valeurs de la fonction contient au moins un point de chaque composant du réseau, et seulement en ce cas.

13. Soient dans le réseau  $y_2, y_3, \dots, y_l$  les voisins du sommet  $y_1$  ; la fonction  $g$  ou la chaîne  $B = \sum b_k y_k$  est harmonique en  $y_1$ , lorsque

$$b_1 = \frac{b_2 + b_3 + \dots + b_l}{l - 1},$$

ou bien

$$b_2 - b_1 + b_3 - b_1 + \dots + b_l - b_1 = 0.$$

Remarquons que la frontière du faisceau de  $y_1$  est

$$f_{\varphi} y_1 = y_2 - y_1 + y_3 - y_1 + \dots + y_l - y_1$$

et que  $B \cdot f_{\varphi} y_1 = b_2 - b_1 + b_3 - b_1 + \dots + b_l - b_1$ .

Dire qu'une chaîne  $B$  est harmonique en un point revient donc à dire que sa valeur sur la frontière du faisceau de ce point est nulle.

On peut donc formuler le problème P) de la façon suivante : Les valeurs d'une chaîne  $B$  sont données aux sommets de  $L$  et cherchées aux sommets de  $M$  de telle façon que pour tout sommet  $y_k$  de  $M$

$$B \cdot f_{\varphi} y_k = 0.$$

D'après la formule (2) cela équivaut à

$$\varphi B \cdot \varphi y_k = 0.$$

Décomposons encore  $B$  en une somme

$$B = B_L + B_M$$

d'une chaîne  $B_L$  de  $L$  et d'une chaîne  $B_M$  de  $M$  (cela veut dire que dans  $B_L$  les coefficients des sommets de  $M$  sont tous 0 et dans  $B_M$  ceux de  $L$ ).  $B_L$  est donnée,  $B_M$  est cherchée.

14. Démontrons d'abord, que P) possède toujours une solution  $B$  (ou  $B_M$ ). On cherche  $B_M$  telle que

$$\varphi (B_L + B_M) \cdot \varphi y_k = 0 \quad (5)$$

pour tout sommet  $y_k$  de  $M$ . Considérons dans l'espace vectoriel  $V^1$  le plan  $F^1$  formé par tous les faisceaux ; il contient le plan  $F_M^1$  de *tous les faisceaux des chaînes de  $M$* . (5) exprime que  $\varphi B_L + \varphi B_M$  doit être orthogonal à  $F_M^1$  :  $\varphi B_L$  étant donné, on cherche une chaîne  $\varphi B_M$  de  $F_M^1$  telle que  $\varphi B_L + \varphi B_M$  soit orthogonale à  $F_M^1$  :  $\varphi B_M$  est la *projection orthogonale de  $-\varphi B_L$  sur le plan  $F_M^1$* , projection qui existe toujours et qui est

bien déterminée. Puisque cette projection appartient à  $F_M^1$ , elle est effectivement le faisceau d'une chaîne  $B_M$ , qui est une solution du problème.

15. Comme nous venons de voir,  $B_M$  n'est en général pas déterminée d'une façon univoque par P), mais seulement  $\varphi B_M$ . Pour que  $B_M$  aussi soit bien déterminée, il faut et il suffit que

$$\varphi B_M = \varphi B'_M$$

entraîne

$$B_M = B'_M,$$

c. à. d., si on pose  $B_M - B'_M = D_M$ , que  $\varphi D_M = 0$  entraîne  $D_M = 0$ .

Pour que le problème P) n'ait qu'une seule solution B, il faut donc et il suffit que *la seule chaîne  $D_M$  de  $M$  qui est un cocycle du réseau soit  $D_M = 0$* . En d'autres termes qu'une 0-chaîne D répondant aux deux conditions suivantes a) et b) soit nécessairement nulle :

- a) les coefficients de D sont 0 pour les sommets de L ;
- b) la valeur de D est constante dans chaque composant du réseau (d'après n° 6).

Or cela signifie tout simplement que *L contient au moins un sommet de chaque composant du réseau*, et l'affirmation énoncée au n° 12 sur le problème aux limites P) est démontrée.

---