Zeitschrift: Bulletin de la Société Vaudoise des Sciences Naturelles
Herausgeber: Société Vaudoise des Sciences Naturelles
Band: 62 (1942-1945)
Heft: 259

Artikel: La loi forte des grands nombres et la loi du logarithme itéré
Autor: Mirimanoff, Dmitry
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-273235

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 08.01.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

BULLETIN DE LA SOCIETE VAUDOISE DES SCIENCES NATURELLES
Vol. 62 1943 No 259

La loi forte des grands nombres et la loi du logarithme itéré

PAR

Dmitry MIRIMANOFF

(Séance du 2 décembre 1942.)

Je vais chercher à expliquer comment on arrive à montrer que, dans le cas d'épreuves répétées vérifiant certaines conditions, nous pouvons nous attendre à ce que la fréquence d'un événement fortuit tende vers une limite, égale précisément à la probabilité de l'événement. C'est en cela que consiste la loi forte des grands nombres qu'on a souvent confondue avec la loi ordinaire, celle de Bernoulli, de Poisson et de Tchébycheff. Nous verrons qu'on ne doit pas la considérer comme un corollaire des théorèmes classiques, mais comme un théorème nouveau. J'essaierai de vous montrer en quoi la loi nouvelle diffère de la loi classique et pourquoi on les a si souvent confondues. Je chercherai aussi à mettre en évidence les principes sur lesquels on s'appuie pour établir la loi forte, principes qui ont permis d'aller plus loin dans cette voie et de découvrir la loi du logarithme itéré.

1. Permettez-moi de vous rappeler d'abord ce qu'on entend par loi des grands nombres, qui sous sa forme la plus simple a été établie pour la première fois par Jacques Bernoulli.

J. Bernoulli suppose qu'on effectue une suite d'épreuves comportant 2 événements contradictoires A et B de probabi-

Travail présenté au Cercle mathématique de Lausanne le 24 mai 1935. A la demande de quelques collègues, M. le professeur Mirimanoff a bien voulu consentir à cette publication, qui rendra d'éminents services à tous ceux qui désirent se mettre au courant de travaux destinés à devenir classiques, en y apportant de nombreuses simplifications et une grande clarté.
(Note de la rédaction.)

lités constantes p et q. Supposez par exemple qu'on ait une suite indéfinie d'urnes

$$U_1, U_2, \ldots U_n, \ldots$$

contenant des boules blanches et des boules noires dans une certaine proportion, la même dans chacune des urnes. On effectue n épreuves, ici n tirages, on extrait une boule de U_1, une boule de U_2, une de U_n. Supposons qu'au cours de ces n épreuves l'événement attendu (extraction d'une boule blanche) se soit réalisé m fois. Vous savez qu'on entend par écart relatif la différence

$\frac{m}{n} - p$, que j'écrirai $f(n) - p$, en désignant par $f(n)$ la fréquence observée $\frac{m}{n}$.

Voici alors comment s'énonce *le théorème de J. Bernoulli*: ε étant un nombre positif aussi petit qu'on veut, la probabilité pour que cet écart soit en valeur absolue inférieur à ε, tend vers 1, lorsque le nombre des épreuves augmente indéfiniment.

$$\lim_{n \to \infty} P(|f(n) - p| < \varepsilon) = 1$$

Il devient donc de plus en plus probable de tomber sur un écart aussi petit qu'on veut.

Comme je l'ai dit tout à l'heure, quelques mathématiciens, à commencer, si je ne me trompe, par J. Bernoulli lui-même, en ont conclu qu'on a le droit de s'attendre à ce que $f(n) - p$ tende vers 0, ou bien, ce qui revient au même, qu'il est très probable que la fréquence $f(n)$ tende vers p, lorsque le nombre des épreuves augmente indéfiniment.

Je ne précise pas le sens des mots que je viens d'employer: « il est très probable », « on a le droit de s'attendre », etc.... La difficulté n'est pas là. Je tiens pour le moment à vous faire remarquer qu'en raisonnant ainsi on raisonne mal. Je vais expliquer pourquoi:

Dire qu'il est très probable que les écarts $f(n) - p$ tendent vers 0 revient à dire qu'il est très probable qu'à partir d'une certaine valeur de n ils vérifient des inégalités de la forme

$$|f(n) - p| < \varepsilon_n, \; |f(n+1) - p| < \varepsilon_{n+1}, \ldots$$

ε_n, ε_{n+1} étant une suite décroissante ou, plutôt, non croissante de nombres tendant vers 0. Or le théorème de Bernoulli nous apprend qu'il est très probable, *lorsque les* ε_n *sont convenablement choisis,* que chacune de ces inégalités soit vérifiée *isolément,* mais il n'en résulte pas qu'il est probable qu'elles soient vérifiées toutes à la fois. Il s'agit ici non pas des probabilités

$$P(|f(n)-p|<\varepsilon_n)\ ,\ P(|f(n+1)-p|<\varepsilon_{n+1})\ ,\ldots,$$

mais bien de la probabilité composée

$$P(|f(n)-p|<\varepsilon_n \text{ et } |f(n+1)-p| \text{ et } \ldots) < \varepsilon_{n+1}$$

et nous savons qu'une probabilité composée $P(E_1 \text{ et } E_2 \text{ et} \ldots)$ peut très bien être petite lors même que les probabilités simples $P(E_1)$, $P(E_2)$ sont grandes. Le raisonnement est donc inexact. En raisonnant ainsi, on attribue une propriété de chacun des termes de la suite E_1, E_2, ... à la suite E_1 et E_2, ... On confond $P(E_1)$ et $P(E_2)$ ... avec $P(E_1 \text{ et } E_2 \text{ et} \ldots)$. Cette confusion est permise lorsque les événements sont certains. Car, si E_1, E_2, ... doivent se réaliser, il en est de même de la suite E_1 et E_2 et .... Mais la logique des choses fortuites n'est pas toujours celle des choses certaines.

La certitude reste entière quel que soit le nombre des événements certains, mais l'incertitude augmente et de petite peut devenir grande.

En voici un exemple banal.

Supposons qu'on ait une suite d'urnes

$$U_1,\ U_2,\ldots U_n,\ldots$$

contenant respectivement 101 boules dont 100 blanches, 102 boules dont 101 blanches, ..., $100+n$ boules dont $100+n-1$ blanches. Les probabilités de tirer une boule blanche de U_1, U_2, ... sont respectivement égales à

$$\frac{100}{101},\ \frac{101}{102},\ldots$$

Je suis donc à peu près sûr de tirer une boule blanche de la première urne; je suis encore plus sûr d'en tirer une de la seconde, etc. ....., les probabilités vont même en augmentant. Mais suis-je aussi sûr de tirer une *suite* de boules blanches? Supposons par exemple qu'on effectue 9900 tirages. La probabilité pour que toutes les 9900 boules extraites soient blanches est égale à

$$\frac{100}{101} \cdot \frac{101}{102} \cdot \frac{102}{103} \cdots \frac{9999}{10.000} = \frac{1}{100}.$$

Et la probabilité de tomber indéfiniment sur des boules blanches est égale à 0.

Le raisonnement est donc inexact. Pourtant le théorème, que quelques mathématiciens ont considéré à tort comme un corollaire de celui de Bernoulli, est exact.

On peut montrer, en effet, qu'il est toujours possible de choisir une suite décroissante de nombres ε_n tendant vers 0 et telle que

$$P(|f(n) - p| < \varepsilon_n \text{ et } |f(n+1) - p| < \varepsilon_{n+1} \text{ et } \ldots) > 1 - \delta,$$

δ étant un nombre positif aussi petit qu'on veut, pourvu que n soit suffisamment grand. Cette probabilité tend vers 1, lorsque n augmente indéfiniment.

Tel est l'énoncé précis de la *loi forte* des grands nombres, dans le cas particulier où les épreuves vérifient les conditions de Bernoulli.

2. *Démonstration de la loi forte des grands nombres.*

Sur quels principes allons-nous nous appuyer pour démontrer ce théorème? Comment allons-nous évaluer la probabilité qui figure au premier membre de notre inégalité?

Dans l'exemple banal que nous venons d'envisager, ce calcul était facile à faire, la probabilité composée étant égale au produit des probabilités simples. Mais il n'en est plus de même ici, les événements simples n'étant pas indépendants. En effet, il est plus probable par exemple de tomber sur un petit écart (petit en valeur absolue) lorsque l'écart qui précède est petit aussi, que dans le cas contraire. La probabilité de $|f(n+1) - p| < \varepsilon_{n+1}$ dépend de celle de $|f(n) - p| < \varepsilon_n$. Et quant à la règle classique qui permet de calculer la probabilité composée dans le cas d'événements dépendants, elle serait ici d'une application difficile.

Il est possible heureusement d'aborder le problème par un côté différent. Partons du théorème classique des probabilités totales

$$P(E_1 \text{ ou } E_2) = P(E_1) + P(E_2) - P(E_1 \text{ et } E_2).$$

Comme le premier membre ne dépasse pas 1, on peut écrire

$$P(E_1 \text{ et } E_2) \geqslant P(E_1) + P(E_2) - 1.$$

De même

$$P(E_1 \text{ et } E_2 \text{ et } E_3) \geqslant P(E_1) + P(E_2) + P(E_3) - 2\,,$$

et d'une manière générale [1]

$$P(E_1 \text{ et } E_2 \ldots \text{ et } E_\nu) \geqslant P(E_1) + P(E_2) + \ldots + P(E_\nu) - (\nu - 1)\,.$$

Si maintenant on désigne par q_i la probabilité pour que E_i ne se réalise pas, comme

$$q_i = 1 - P(E_i)\,,$$

notre inégalité devient

$$P(E_1 \text{ et } E_2 \text{ et} \ldots \text{ et } E_\nu) \geqslant 1 - \sum_{i=1}^{\nu} q_i\,.$$

Supposons que le nombre ν des événements augmente indéfiniment. La probabilité composée étant une fonction décroissante ou plutôt non croissante de ν, elle va tendre vers une limite déterminée qui est par définition la probabilité de la suite E_1 et E_2 et . . . . Nous pourrons donc écrire

$$P(E_1 \text{ et } E_2 \text{ et} \ldots) \geqslant 1 - \sum_{i=1}^{\infty} q_i\,.$$

En appliquant cette inégalité au problème qui nous occupe, il vient

$$P(|f(n) - p| < \varepsilon_n \text{ et } |f(n+1) - p| < \varepsilon_{n+1} \text{ et} \ldots) \geqslant 1 - \sum_{i=n}^{\infty} q_i\,,$$

où

$$q_i = P(|f(i) - p| \geqslant \varepsilon_i).$$

Pour établir la loi forte, il suffit donc de montrer que la série $\sum_{i=1}^{\infty} q_i$ converge; car si elle converge, la somme $\sum_{i=n}^{\infty} q_i$ peut être rendue aussi petite qu'on veut, par exemple $< \delta$, en prenant n suffisamment grand et alors

$$P(|f(n) - p| < \varepsilon_n \text{ et } |f(n+1) - p| < \varepsilon_{n+1} \text{ et} \ldots) > 1 - \delta\,.$$

Cette probabilité tend vers 1, lorsque n augmente indéfiniment.

Il nous reste donc à montrer qu'en choisissant convenablement les ε_i, la série $\sum q_i$ converge.

[1] Inégalité de Boole. (An investigation of the laws of thought, London, Macmillan and C°, 1854. ch. XIX, p. 307).

Nous nous appuierons pour cela sur une inégalité importante de Bienaymé-Tchébycheff généralisée que je tiens à vous rappeler.

Inégalité de Bienaymé-Tchébycheff (généralisée). Soit x une variable aléatoire, $\varphi(x)$ une fonction paire de x, non négative et croissante ou plutôt non décroissante pour $x > 0$.

Si alors a est un nombre positif, on a

$$P(|x| \geqslant a) \leqslant \frac{E(\varphi(x))}{\varphi(a)} .$$

où $E(\varphi(x))$ désigne l'espérance mathématique (valeur moyenne) de $\varphi(x)$. La démonstration est immédiate. En effet $E(\varphi(x)) = \Sigma\, \varphi(x) p(x)$, étendue à toutes les valeurs possibles de x, mais cette somme est

$$\geqslant \varphi(a) \sum_{|x| \geqslant a} p(x) = \varphi(a) P(|x| \geqslant a)$$

d'où

$$P(|x| \geqslant a) \leqslant \frac{E(\varphi(x))}{\varphi(a)} .$$

Posons $\varphi(x) = x^{2k}$, où k est un nombre entier positif. En faisant $k = 1$, on déduit immédiatement de l'inégalité correspondante les théorèmes classiques de Bernoulli, de Poisson et de Tchébycheff, c'est-à-dire la loi ordinaire des grands nombres.

Mais on ne saurait en déduire la loi forte, l'inégalité étant trop grossière.

Mais faisons $k = 2$.

L'inégalité de Tchébycheff s'écrit

$$P(|x| \geqslant a) \leqslant \frac{E(x^4)}{a^4}$$

et, en l'appliquant à la probabilité q_i

$$q_i = P(|f(i) - p| \geqslant \varepsilon_i) \leqslant \frac{E(f(i) - p)^4}{\varepsilon_i^4}$$

Or, il est facile de calculer l'espérance mathématique de la 4e puissance de l'écart et l'on établit sans peine que

$$E(f(i) - p)^4 < \frac{1}{i^2}$$

d'où

$$q_i < \frac{1}{\varepsilon_i^4 i^2}.$$

Choisissons maintenant la suite ε_i.

Posons $\varepsilon_i^4 = \frac{1}{i^\alpha}$, où α est un nombre positif inférieur à 1,

$$0 < \alpha < 1.$$

La suite ε_i ainsi choisie est une suite décroissante tendant vers 0, lorsque i augmente indéfiniment et l'on a alors

$$\sum_{i=n}^{\infty} q_i < \frac{1}{n^{2-\alpha}} + \frac{1}{(n+1)^{2-\alpha}} + \ldots;$$

comme $2-\alpha > 1$, la série converge et la loi forte est établie.

3. *La loi du logarithme itéré.*

La démonstration que je viens d'esquisser ne diffère pas essentiellement de celle de CANTELLI[1], à qui l'on attribue la découverte de la loi forte.

Je tiens pourtant à faire remarquer que dans *certains cas particuliers* et par des méthodes très différentes, la loi forte avait déjà été établie avant lui par Borel (1909), Hausdorff (1913), Hardy et Littlewood (1914)[2].

Cela ne diminue pas le mérite de CANTELLI, qui du reste ne s'est pas borné au cas des épreuves répétées vérifiant les conditions de Bernoulli. Ses hypothèses sont beaucoup plus larges.

Je crois utile cependant de vous donner une idée des principes sur lesquels se sont appuyés les mathématiciens que je viens de nommer, principes qui ont permis à Hausdorff et à Hardy et Littlewood de préciser la loi forte et d'ouvrir la voie aux recherches récentes de Khintchine et de Kolmogoroff.

Voici par exemple comment Hausdorff, à l'aide d'une méthode due à M. Borel, établit la loi forte dans le cas parti-

[1] P. CANTELLI : Sulla probab. come limite della frequenza, *Rend. d. R. Acc. dei Lincei* (5), t. 26, 1917.

[2] BOREL, *Rend. Palermo*, t. 27 (1909), p. 247. — HAUSDORFF, Grundzüge der Mengenlehre (1913) p. 419-422. — HARDY AND LITTLEWOOD, *Acta mathem.*, t. 37, p. 155-190.

culièrement simple où la probabilité p de l'événement attendu est égale à $1/2$ (jeu de pile ou face). Supposons qu'on marque 1 lorsqu'on amène pile, 0 dans le cas contraire. On obtient de cette manière une suite d'unités et de zéros. Ecrivons cette suite à la droite de la virgule, par exemple

$$0{,}10100011\ldots$$

A chaque suite possible correspond une fraction qui, dans le système de numération de base 2, définit un point et un seul du segment (0,1)

L'ensemble de ces suites ou plutôt de ces points a pour mesure l'unité.

Or, envisageons les suites le long desquelles la fréquence $\frac{m}{n}$ (m étant le nombre des unités figurant parmi les n premières décimales) tend vers la probabilité $p = 1/2$.

On peut montrer que la mesure de l'ensemble des points correspondants est encore égale à l'unité. Donc la probabilité de tomber sur une suite de cette sorte est égale à 1, tandis que la probabilité de tomber sur une suite contraire est nulle. Nous devons donc nous attendre à ce que $\frac{m}{n}$ tende vers $1/2$ et la loi forte est établie.

C'est à l'aide de considérations analogues que Hausdorff en 1913 et Hardy et Littlewood en 1914 ont réussi à préciser la loi forte. Permettez-moi de vous dire quelques mots de ces recherches[1]. Je vous rappelle que dans la loi classique des grands nombres, aussi bien que dans la loi forte, on envisage l'écart relatif $f(n) - p = \frac{m}{n} - p$. Cet écart s'obtient en divisant l'écart absolu $m - np$ par n,

$$f(n) - p = \frac{m - np}{n}.$$

[1] On trouvera une analyse remarquable de quelques-unes de ces recherches dans l'excellent ouvrage de M. M. Fréchet « Recherches théoriques modernes sur la théorie des probabilités » (Traité du Calcul des Probabilités et de ses Applications par E. Borel, tome I, fascicule III, 1937).

Nous pouvons donc dire, en désignant par $\psi(n)$ une fonction de n, que le rapport

$$\frac{m-np}{\psi(n)}$$

tend vers 0 ou que la loi forte est vérifiée lorsque $\psi(n)=n$. Elle l'est à fortiori pour les $\psi(n)$ dont l'ordre de grandeur est supérieur à celui de n, par exemple pour $\psi(n)=n^2$, $nlgn$, ... etc.

Mais cette condition est-elle nécessaire ?

Qu'arrive-t-il lorsque l'ordre de grandeur de $\psi(n)$ est inférieur à celui de n, par exemple pour $\psi(n)=n^{3/4}$, $\sqrt{nlgn}$, ...? La limite de $\frac{m-np}{\psi(n)}$ peut-elle encore être nulle ? Peut-on abaisser l'ordre de grandeur de $\psi(n)$ au-dessous de celui de n, sans que la loi forte cesse d'être vérifiée, et dans quelle mesure?

C'est l'étude de ce problème délicat et difficile qui a conduit à la découverte de la loi du logarithme itéré.

Le premier pas dans cette voie a été fait, si je ne me trompe, par Hausdorff. En 1913, Hausdorff a réussi à montrer que la probabilité de $\lim \frac{m-np}{n^k}=0$ est encore égale à l'unité, si $k=1/2+\varepsilon$, ε étant un nombre positif aussi petit qu'on veut, et cela non seulement dans le cas de $p=1/2$ (jeu de pile ou face), mais dans un cas plus général.

Je ferai remarquer à ce propos que le théorème de Hausdorff a été retrouvé en 1921 par M. Pólya[1], qui à cette époque ne connaissait pas encore les travaux que j'ai cités tout à l'heure. Du reste, d'après M. Pôlya, la loi forte avait été découverte d'autre part, dans un cas particulier il est vrai, par M. Pierre Cérésole.

Mais ne pourrait-on pas aller plus loin dans cette voie en abaissant encore davantage l'ordre de grandeur de $\psi(n)$?

Un résultat extrêmement important a été obtenu à cet égard par Hardy et Littlewood en 1914. A l'aide de considérations analogues à celles que je viens d'exposer, ces mathématiciens ont réussi à montrer qu'en posant $\psi(n)=\sqrt{nlgn}$, le rapport $\frac{m-np}{\psi(n)}=\frac{m-np}{\sqrt{nlgn}}$ est borné,

[1] Pôlya « Eine Ergänzung zu dem Bernoullischen Satz der Wahrscheinlichkeitsr. » *(Nachr. v. der k. Ges. der Wiss. zu Göttingen, Math-Phys. Klasse, 1921).*

ce qu'on peut écrire

$$m - np = O(\sqrt{nlgn})$$

ou plutôt que la probabilité pour qu'il le soit est égale à l'unité. La loi forte est donc vraie pour toute fonction $\psi(n)$ dont l'ordre de grandeur est supérieur à celui de $\sqrt{nlgn}$.

Mais est-elle vraie pour $\sqrt{nlgn}$?

La limite de $\dfrac{m-np}{\sqrt{nlgn}}$ est-elle nulle?

Est-il permis de remplacer O par o dans la relation de Hardy et Littlewood ou, ce qui revient au même, la $\overline{\lim}\ \dfrac{|m-np|}{\sqrt{nlgn}}$ est-elle égale à 0? (probab. correspondante = 1)

La réponse est affirmative.

Dans un mémoire publié en 1923, Khintchine[1] a montré, en effet, que le rapport

$$\frac{m-np}{\sqrt{nlglgn}}$$

est encore borné ou plutôt que la probabilité correspondante est égale à l'unité.

La fonction $\sqrt{nlglgn}$ croissant moins rapidement que $\sqrt{nlgn}$, il en résulte que la lim. sup. de Hardy et Littlewood est nulle et que dans leur relation il est permis de remplacer O par o.

Mais alors la même question se pose encore ici:

La $\overline{\lim}$ de $\dfrac{|m-np|}{\sqrt{nlglgn}}$ est-elle aussi égale à 0?

Cette fois-ci la réponse est négative.

En 1924, Khintchine[2] a non seulement réussi à montrer que cette limite est supérieure à 0, il en a encore trouvé la valeur exacte.

Il a montré que

$$\overline{\lim}\ \frac{|m-np|}{\sqrt{nlglgn}} = \sqrt{2pq}\,, \text{ (probabilité correspondante} = 1)$$

ce qu'on peut écrire aussi

$$\overline{\lim}\ \frac{|m-np|}{\sqrt{2pqnlglgn}} = 1\,.$$

[1] KHINTCHINE, *Math. Zeitschr.*, t. 18 (1923), p. 109.
[2] KHINTCHINE, *Fund. math.*, t. 6 (1924), p. 9-20.

Il en résulte que la loi forte n'est pas vraie pour $\sqrt{nlglgn}$, mais qu'elle est vérifiée pour les $\psi(n)$ dont l'ordre de grandeur est supérieur à celui de $\sqrt{nlglgn}$.

Vous voyez donc qu'avant Khintchine on n'avait réussi à formuler que des conditions suffisantes pour que la loi forte soit vérifiée.

Le théorème de Khintchine fournit la condition nécessaire et suffisante. Vraie pour les fonctions $\psi(n)$ dont l'ordre de grandeur dépasse celui de $\sqrt{nlglgn}$, la loi forte n'est pas vérifiée pour $\sqrt{nlglgn}$ et à fortiori pour les fonctions dont l'ordre de grandeur est inférieur à celui de $\sqrt{nlglgn}$.

Pour que la loi forte soit vérifiée, il faut donc et il suffit que l'ordre de grandeur de $\psi(n)$ soit supérieur à celui de $\sqrt{nlglgn}$ [1].

On voit en même temps, et c'est là un résultat extrêmement curieux, que l'ordre de grandeur de $m - np$ est comparable à celui de $\sqrt{nlglgn}$.

C'est en cela que consiste la loi du logarithme itéré.

Deux ans après (en 1926), M. Khintchine montrait que son théorème était encore vrai dans le cas de Poisson. Mais c'est Kolmogoroff qui réussit à l'étendre au cas général de Tchébycheff.

Ici le passage des cas de Bernoulli et de Poisson au cas de Tchébycheff est analogue à celui qu'on fait en établissant la loi classique des grands nombres.

On associe, avec Tchébycheff, à chacune des épreuves une variable aléatoire, x_1 à la première épreuve, x_2 à la seconde, etc.

Le rôle du nombre m de réalisations est joué alors par la somme

$$s_n = x_1 + x_2 + \ldots + x_n$$

qui se réduit à m, lorsqu'on suppose que chacune des variables ne prend que deux valeurs 1 et 0 : 1 lorsque l'événement attendu se produit, 0 dans le cas contraire.

Ici l'écart absolu est

$$s_n - \mathrm{E}(s_n)$$

et l'écart relatif

$$\frac{s_n - \mathrm{E}(s_n)}{n}$$

[1] Ce résultat a été retrouvé par M. P. Levy en 1931 (*Giorn. del istituto ital. degli attuari*, II, 1931, p. 3.)

On arrive alors à démontrer la loi forte et la loi du logarithme itéré en faisant certaines hypothèses sur les variables aléatoires x_i.

Le plus simple est de supposer que l'ensemble des x est borné, en d'autres termes qu'il existe un nombre μ tel que

$$|x_i| < \mu, \text{ quel que soit } i.$$

On peut alors, par un changement de variables, ramener l'étude du cas général à celui où $E(x_i) = 0$ pour tout i, donc $E(s_n) = 0$, et où les espérances mathématiques des carrés des variables sont toutes égales à 1 ;

$$E(x_i^2) = 1$$

Alors la loi du logarithme itéré s'énonce de la manière suivante : La probabilité de la relation

$$\overline{\lim} \frac{|s_n|}{\sqrt{2n \lg \lg n}} = 1$$

est égale à l'unité.

Cet énoncé peut encore être précisé, mais je crois inutile d'insister davantage sur ce point.