Mouvement radial dans le champ de Schwarzschild

PAR

Pierre JAVET

(Séance du 3 décembre 1941.)

---

§ 1. — Les mouvements d'une masse infiniment petite, sous l'action d'une masse sphérique isolée, sont définis par les géodésiques du ds^2 de Schwarzschild:

$$ds^2 = \left(c^2 - \frac{2\mu}{r}\right) dt^2 - \frac{dr^2}{1 - \frac{2\mu}{c^2 r}} - r^2(d\theta^2 + \cos^2\theta d\varphi^2)$$

Les quatre variables t, r, θ et φ qui y figurent ont des significations bien connues. Les deux constantes c et μ représentent, la première la vitesse de la lumière et la deuxième le coefficient de Kepler figurant dans l'expression de l'attraction newtonienne $\frac{\mu}{r^2}$. Ce coefficient μ est égal au produit fM de la constante de l'attraction universelle par la masse M du corps attirant.

Dans ce travail, nous étudions les mouvements d'une particule infiniment petite se déplaçant le long d'une droite issue du centre attirant. Ces mouvements sont définis par l'équation [1]:

$$(1) \qquad \frac{d^2r}{dt^2} = -\frac{\mu}{r^2}\left[1 - \frac{\alpha}{r} - \frac{3r\left(\frac{dr}{dt}\right)^2}{c^2(r-\alpha)}\right]$$

dans laquelle on a posé: $\alpha = \frac{2\mu}{c^2}$

[1] Voir Jean Chazy : La théorie de la relativité et la mécanique céleste, t. I, p. 102.

La constante α a les dimensions d'une longueur. Dans les applications courantes, la masse attirante est le Soleil. La longueur α vaut alors: 2,95 km. Elle est négligeable vis-à-vis des dimensions du Soleil.

Dans la présente étude — purement mathématique — nous supposons que la masse attirante se réduit à un point matériel. La singularité du ds^2 de Schwarzschild au point $r = \alpha$ ne peut donc pas être négligée.

§ 2. — Dans le but de simplifier l'équation (1), faisons le changement de variable suivant, analogue à celui employé par Sundman dans sa résolution du problème des trois corps:

$$dt = \left(\frac{r}{r-\alpha}\right)^{\frac{3}{2}} dT \tag{2}$$

L'équation différentielle du mouvement devient:

$$\frac{d^2r}{dT^2} = -\frac{\mu}{(r-\alpha)^2} \tag{3}$$

Faisons encore le changement de fonction:

$$R = r - \alpha \tag{4}$$

(2) et (3) deviennent :

$$dt = \left(\frac{R+\alpha}{R}\right)^{\frac{3}{2}} dT \tag{5}$$

$$\frac{d^2R}{dT^2} = -\frac{\mu}{R^2} \tag{6}$$

(6) est l'équation du mouvement d'un point attiré par un centre fixe suivant une force inversément proportionnelle au carré de la distance. Le mouvement décrit par les variables R et T est donc connu. En effet (6) donne immédiatement l'intégrale des forces vives:

$$\left(\frac{dR}{dT}\right)^2 = \frac{2\mu}{R} + h \tag{7}$$

où la constante des forces vives h est déterminée par:

$$h = {}_{*}v_0^2 - \frac{2\mu}{R_0} \tag{8}$$

Nous avons posé: $\quad {}_*v = \dfrac{dR}{dT}$

(7) peut alors s'écrire:

$${}_*v = \pm\sqrt{\frac{2\mu}{R} + h}$$

avec $+$ ou $-$ suivant le sens dans lequel marche le mobile.

On sait que les circonstances du mouvement (décrit par les variables R et T) sont les suivantes:

1er cas. — Le mobile étant lancé vers le centre attractif, R diminue et tend vers 0 en même temps que ${}_*v$ augmente en valeur absolue et tend vers $-\infty$.

2me cas. — Le mobile étant lancé à l'extérieur, il faut distinguer, suivant que:

1°) $h > 0$. Alors le mobile s'éloigne indéfiniment et sa vitesse tend à devenir uniforme et égale à $\sqrt{h}$

2°) $h = 0$. Le mobile s'éloigne encore indéfiniment, mais sa vitesse tend vers 0.

3°) $h < 0$. Le mobile s'éloigne d'abord, jusqu'au point $R_1 = -\dfrac{2\mu}{h}$ où il est immobile. Il revient ensuite comme dans le 1er cas.

§ 3. — Interprétons ces résultats dans le système de variables r et t.

Calculons la vitesse $v = \dfrac{dr}{dt}$ en fonction de ${}_*v = \dfrac{dR}{dT}$. On a:

$$v = \frac{dr}{dt} = \frac{dR}{dT} \cdot \frac{dT}{dt} = {}_*v \left(\frac{r-\alpha}{r}\right)^{\frac{3}{2}}$$

ce qui peut s'écrire, en utilisant (5) et (7):

$$v = \frac{\pm\sqrt{2\mu + h(r-\alpha)}\,(r-\alpha)}{r\sqrt{r}} \tag{8}$$ [1]

[1] On peut vérifier que cette valeur de $v = \dfrac{dr}{dt}$ satisfait identiquement l'équation (1).

La discussion qui suit doit être divisée en deux parties, suivant que le point mobile part d'une position initiale r_0 telle que r_0 est plus grand ou plus petit que α.

*I*re *partie.* $r_0 > \alpha$.

Supposons tout d'abord que le mobile soit lancé du côté du centre attractif. Sa vitesse v est alors négative et r, qui diminue, tend vers α. En même temps v tend vers zéro. De plus le temps

$$\int_{r_0}^{\alpha} dt = \int_{r_0}^{\alpha} \frac{r\sqrt{r}\,dr}{-\sqrt{2\mu + h(r-\alpha)}\,(r-\alpha)} = \infty$$

Le mobile n'atteint donc jamais le point $r = \alpha$.

Lançons maintenant le mobile vers l'extérieur. Les circonstances du mouvement sont analogues à celles rappelées au § 2, 2me cas.

Si h est positif, r croît indéfiniment et tend vers l'infini. La vitesse $v = {}_*v\left(\frac{r-\alpha}{r}\right)^{\frac{3}{2}}$ tend vers $\sqrt{h}$.

Si h est nul, r tend vers l'infini et la vitesse tend vers zéro.

Si h est négatif, r croît jusqu'à une valeur r_1 telle que $2\mu + h(r_1 - \alpha) = 0$, c'est-à-dire:

$$r_1 = \alpha - \frac{2\mu}{h}$$

Pour cette valeur, v est nul. Le mobile, qui commence par s'éloigner du centre attirant, arrive jusqu'à la distance r_1, où il est immobile, puis retombe du côté du centre, comme dans le cas précédent.

§ 4. — Ces considérations sont encore valables pour la lumière. Considérons un rayon lumineux venant de l'infini. On a alors $\sqrt{h} = c$ (c = vitesse de la lumière à l'infini). Et la vitesse de la lumière à la distance r est donnée par

$$v = \frac{-\sqrt{2\mu + c^2(r-\alpha)}\,(r-\alpha)}{r\sqrt{r}} = -c\,\frac{r-\alpha}{r}$$

en tenant compte du fait que $\alpha c^2 = 2\mu$.

Cette vitesse tend vers zéro quand r tend vers α et le temps mis par la lumière pour atteindre le point $r = \alpha$ est infini. En effet:

$$\int_{r_0}^{\alpha} dt = -\int_{r_0}^{\alpha} \frac{r\,dr}{c(r-\alpha)} = \infty$$

La lumière, comme les points matériels, n'atteint donc pas la distance $r = \alpha$ [1].

II^me^ *partie.* $r_0 < \alpha$.

§ 5. — Supposons que le mobile soit lancé vers l'extérieur. Sa vitesse, positive, vaut:

$$v = \frac{-\sqrt{2\mu + h(r-\alpha)}\,(r-\alpha)}{r\sqrt{r}}$$

r augmente et tend vers α en même temps que v diminue et tend vers zéro. Mais le mobile n'atteint pas la distance $r = \alpha$ car $\int_{r_0}^{\alpha} dt$ est encore infinie.

Avant d'étudier les circonstances du mouvement quand le point est lancé du côté du centre, calculons la constante des forces vives, h , en fonction des constantes r_0 et v_0 .

De la relation

$$\frac{dr}{d\mathrm{T}} = \frac{dr}{dt} \cdot \frac{dt}{d\mathrm{T}}$$

et en tenant compte de (4) (5) et (8), on obtient:

$$h = {}_*v_0^2 - \frac{2\mu}{\mathrm{R}_0} = \frac{v_0^2 r_0^3 - 2\mu(r_0-\alpha)^3}{(r_0-\alpha)^3} \tag{9}$$

[1] Ce résultat peut du reste être établi directement à partir du ds^2 de Schwarzschild. Pour la lumière : $ds^2 = 0$.

Posons $d\theta = d\varphi = 0$. Il reste :

$$c^2dt^2 = \frac{dr^2}{\left(1 - \frac{2\mu}{c^2 r}\right)^2} \quad \text{d'où :} \quad \frac{dr}{dt} = c\,\frac{r-\alpha}{r}$$

C'est la valeur trouvée plus haut.

Supposons maintenant que le mobile soit lancé du côté du centre attirant. Son mouvement paraît dépendre du signe de h.

Si $h < 0$ alors $h(r - \alpha) > 0$ et r, qui diminue, tend vers zéro en même temps que la vitesse tend vers $-\infty$.

Si $h = 0$ r tend vers zéro et la vitesse tend vers $-\infty$, comme dans le cas précédent.

Si $h > 0$ r diminue jusqu'à une valeur r_1 telle que

$$-h(r_1 - \alpha) = 2\mu \qquad \text{d'où l'on tire:}$$

$$r_1 = \alpha - \frac{2\mu}{h}$$

En ce point r_1 la vitesse s'annulerait, et le mobile n'atteindrait pas le centre attirant. Mais cela suppose que $r_1 > 0$, c'est-à-dire

$$\alpha - \frac{2\mu}{h} > 0 \quad \text{et comme} \quad \alpha = \frac{2\mu}{c^2}$$

cette condition devient $h > c^2$.

Montrons que cette dernière inégalité ne peut être satisfaite.

En utilisant (9) la condition $h > c^2$ devient:

$$\frac{v_0^2 r_0^3 - 2\mu(r_0 - \alpha)^3}{(r_0 - \alpha)^3} > c^2 \qquad \text{ou:}$$

$$v_0^2 < c^2 \, \frac{(r_0 - \alpha)^3 (1 + \alpha)}{r_0^3} \tag{10}$$

Or, $r_0 - \alpha$ étant négatif, le deuxième membre de (10) l'est aussi. La condition en question est donc impossible, et par conséquent le mobile atteint le centre attirant, avec une vitesse infinie, comme dans les cas où $h \leqslant 0$.

Ces conclusions sont étonnantes, la considération — purement mathématique, il est vrai — de vitesses tendant vers l'infini étant totalement étrangère aux idées relativistes. Il est curieux que cette notion de vitesse infinie soit incluse dans le ds^2 de Schwarzschild.

§ 6. — Les considérations précédentes montrent que l'intérieur de la sphère de rayon $r = \alpha$ est un domaine entièrement séparé de l'extérieur, aucun signal ne pouvant franchir la « barrière » $r = \alpha$, soit en venant de l'extérieur, soit en venant de l'intérieur.

Or
$$\alpha = \frac{2\mu}{c^2} = \frac{2f\mathrm{M}}{c^2}$$

Considérons alors un corps attirant sphérique de rayon U et de masse spécifique ρ.

On a alors[1]
$$\mathrm{M} = \frac{4}{3}\pi \mathrm{U}^3\rho$$
d'où:
$$\alpha = \frac{8\pi f\mathrm{U}^3\rho}{3c^2}$$

α est proportionnel à U^3. Par conséquent si U croît, il arrivera un moment où $\alpha = \mathrm{U}$. Cela arrivera pour une valeur de U donnée par
$$\mathrm{U} = \frac{8\pi f\mathrm{U}^3\rho}{3c^2}$$
d'où l'on tire
$$\mathrm{U} = \frac{c\sqrt{3}}{\sqrt{8\pi f\rho}}$$

Une masse sphérique de densité uniforme ρ et d'un rayon égal à $\frac{c\sqrt{3}}{\sqrt{8\pi f\rho}}$ forme donc un domaine entièrement isolé, sans communication possible avec l'extérieur; un tel domaine constitue, pour ses habitants, un univers. Et nous aboutissons ainsi à la conception d'un univers fini, de rayon $\mathrm{U} = \frac{c\sqrt{3}}{\sqrt{8\pi f\rho}}$

Or on sait que c'est à la même conclusion que conduit la théorie de la relativité généralisée, appliquée du point de vue ultra-macroscopique. Cette théorie établit en effet la formule bien connue:

$$\mathrm{R} = \frac{8\pi f\rho}{c^2}$$
où R = courbure totale de l'univers.

[1] Ceci suppose que la géométrie valable ici est la géométrie euclidienne à 3 dimensions. D'autres hypothèses (espace à 4 dimensions, euclidien ou non) conduisent à des résultats presque identiques à ceux que nous donnons dans ce paragraphe.

Mais la courbure totale, dans un espace sphérique par exemple, vaut

$$R = \frac{6}{U^2}$$

U étant le rayon de l'Univers. Par conséquent

$$\frac{6}{U^2} = \frac{8\pi f \rho}{c^2}$$

d'où l'on tire :

$$U = \frac{c\sqrt{3}}{\sqrt{4\pi f \rho}}$$

C'est, au facteur $\sqrt{2}$ près, la valeur du rayon de l'Univers trouvée plus haut.

Jean Chazy, dans une remarque sur le signe des coefficients du ds^2 de Schwarzschild [1], ne partage pas notre façon de voir dans ce dernier paragraphe. Mais nous croyons que ses objections ne sont pas entièrement fondées quand les considérations précédentes sont appliquées — comme nous le faisons ici — à l'Univers entier. D'autres phénomènes peuvent en effet entrer en considération, tel par exemple l'instabilité de la gravitation, dont Jeans a montré l'importance.

De toute manière, il nous a paru intéressant de signaler que le ds^2 de Schwarzschild pouvait conduire à la notion d'un univers fini, le rayon de cet univers calculé à partir du ds^2 étant en accord avec les valeurs fournies par des méthodes bien différentes.

[1] Jean Chazy : ouvrage cité, t. II, p. 122.