Zeitschrift: Bulletin de la Société Vaudoise des Sciences Naturelles
Herausgeber: Société Vaudoise des Sciences Naturelles
Band: 59 (1936-1937)
Heft: 243

Artikel: Géométrie du quadrilatère complet
Autor: Marchand, Jules
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-272478

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 11.01.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

BULL. SOC. VAUD. SC. NAT. VOL. 59, N° 243, 1937
(LAUSANNE, SUISSE)

Géométrie du quadrilatère complet

PAR

Jules MARCHAND

I. *Introduction.*

1. Les propriétés connues du quadrilatère et du quadrangle complets sont fort nombreuses. Il ne saurait y avoir un grand intérêt à en découvrir de nouvelles, mais il peut être utile, et il est certainement intéressant, de donner un moyen permettant de les grouper, de les lier entre elles, de les établir par des procédés très généraux. C'est le but de cet article.

Les points et droites remarquables d'un quadrilatère complet qui apparaissent le plus immédiatement sont en relation étroite avec la parabole inscrite ou avec le faisceau tangentiel des coniques inscrites. C'est ainsi que le *point de Miquel* du quadrilatère, c'est-à-dire le point commun aux cercles circonscrits aux quatre triangles que l'on peut former à l'aide des côtés pris trois à trois, est le foyer de la parabole inscrite; que la *droite de Simson* du quadrilatère, qui contient les pieds des perpendiculaires abaissées du point de Miquel sur les côtés, est la tangente au sommet de cette parabole; que la *droite orthocentrique* du quadrilatère, qui passe par les orthocentres des quatre triangles du quadrilatère, est la directrice de cette parabole.

La considération de la parabole inscrite permet donc d'établir les théorèmes relatifs au point de Miquel, à la droite de Simson et à la droite orthocentrique.

De même, la considération du faisceau des coniques inscrites conduit aisément au *théorème de Pappus,* sur la division harmonique d'une diagonale par les deux autres, et au théorème de Gauss qui met en évidence *la droite de Newton* du quadrilatère, c'est-à-dire le lieu des centres des coniques inscrites.

Ce même faisceau des coniques inscrites fait intervenir deux faisceaux conjugués de cercles: celui des *cercles orthoptiques*

des coniques inscrites, qui contient les cercles décrits sur les trois diagonales prises comme diamètres, et celui des *cercles harmoniquement circonscrits* aux coniques inscrites, qui contient les cercles conjugués aux quatre triangles. Les cercles du premier faisceau ont leurs centres sur la droite de Newton, ceux du second, sur la droite orthocentrique.

Ainsi les propriétés de la parabole et celles des faisceaux tangentiels de coniques nous mettent rapidement en possession des premières propriétés du quadrilatère complet.

2. Pour aller plus avant dans la théorie de cette figure, il doit sembler naturel de lui attacher des courbes de degré supérieur au second, par exemple des cubiques.

Dans la suite, on prouvera précisément qu'en considérant, dans le plan du quadrilatère complet, une certaine cubique, en relation spéciale avec la paire ombilicale, on peut établir et lier entre elles de nombreuses propriétés métriques du quadrilatère complet. Sans chercher à énoncer autant de théorèmes que possible, il suffira de mettre en évidence ceux qui apparaissent le plus immédiatement pour justifier la méthode employée. D'ailleurs, on verra facilement, et sans qu'il soit nécessaire d'en donner des exemples, que d'autres cubiques, introduites d'une manière analogue, conduiraient à d'autres propriétés, projectives ou métriques.

Enfin, et en suivant le procédé corrélatif, des courbes de 3e classe, en liaison spéciale avec les éléments d'un quadrangle complet, permettent d'élaborer une théorie du quadrangle complet; on s'en rendra compte tout aussi aisément.

II. *Quelques propriétés des cubiques en général et des stelloïdes cubiques en particulier.*

3. Rappelons rapidement quelques propriétés des cubiques dont nous ferons usage par la suite, ceci pour fixer le sens des termes que nous emploierons.

La géométrie des cubiques considère deux réseaux de coniques adjoints à une cubique.

Le premier est un réseau ponctuel formé des coniques polaires des points du plan par rapport à la cubique. C'est le *réseau des coniques polaires* de la cubique.

Le second est un réseau tangentiel formé des courbes de seconde classe harmoniquement inscrites aux coniques polaires, donc apolaires à la cubique. C'est le *réseau des coniques apolaires* de la cubique.

Une cubique étant donnée, tout point du plan possède, par rapport à cette cubique, une conique polaire bien déterminée. Pour une infinité de points, cette conique polaire est formée d'une paire de droites. Si la conique polaire d'un point A est formée de deux droites, *d et* d_1, issues d'un point A′, réciproquement, la conique polaire du point A′ est formée de deux droites, d' et d_1', issues du point A. Les paires de points tels que AA′ sont conjugués à toutes les coniques du réseau des coniques polaires; ils constituent des coniques apolaires dégénérées en deux points; leurs droites polaires mixtes par rapport à la cubique sont indéterminées.

Sur toute droite, telle que d ou d_1, faisant partie d'une conique polaire dégénérée, se trouve une de ces paires de points. Et tous ces points sont situés sur la *hessienne* de la cubique donnée. Les deux points d'une paire sont des points correspondants de la hessienne (points correspondants au sens de Mac Laurin).

Enfin, ces points jouissent encore de la propriété suivante: de chacun d'eux, A′ par exemple, les paires de tangentes menées aux coniques du réseau des coniques apolaires forment une involution. Les droites doubles de cette involution sont, en A′ par exemple, les droites d et d_1 qui constituent la conique polaire du point correspondant A.

Corrélativement, les paires de droites, telles que d et d_1, qui forment des coniques polaires dégénérées, enveloppent une courbe de 3e classe, la *cayleyenne* de la cubique. Ces paires de droites sont des tangentes correspondantes de la cayleyenne. Toute tangente à la cayleyenne est, à la fois, la droite de jonction de deux points correspondants de la hessienne et une des droites d'une conique polaire dégénérée en deux droites.

Toute tangente de la cayleyenne coupe les coniques du réseau des coniques polaires suivant des paires de points en involution. Les points doubles de cette involution sont deux points correspondants de la hessienne situés sur la tangente considérée.

Enfin, lorsque la conique polaire d'un point A dégénère en deux droites d et d_1, les tangentes à la cubique donnée aux points situés sur d et d_1 sont concourantes et passent par le point A.

4. La cubique qui doit jouer le rôle important dans cette étude est une *stelloïde cubique.* Elle est caractérisée par le fait que le réseau de ses coniques apolaires contient une conique dégénérée qui est l'absolue du plan euclidien. Ce réseau sera

donc déterminé par deux coniques quelconques Γ_1 et Γ_2 (non confocales) et par une troisième conique formée de la paire des points cycliques. Il est donc constitué par les confocales des coniques du faisceau qui contient Γ_1 et Γ_2. Les coniques apolaires dégénérées sont les paires de foyers associés des coniques du faisceau $(\Gamma_1 \Gamma_2)$. Et la *hessienne* de cette stelloïde cubique est le lieu de ces foyers.

Le réseau des coniques polaires de la stelloïde cubique considérée est formé des coniques harmonieusement circonscrites à Γ_1, à Γ_2 et à la paire des points cycliques. Il est donc constitué par les hyperboles équilatères harmoniquement circonscrites à Γ_1 et à Γ_2. Les coniques polaires dégénérées sont les paires de droites rectangulaires conjuguées à la fois à Γ_1 et à Γ_2. Une de ces coniques dégénérées est formée de la droite de l'infini du plan et de la droite lieu des centres des coniques du faisceau $(\Gamma_1 \Gamma_2)$. Elle est la conique polaire d'un point O où vont concourir les asymptotes de la stelloïde. De ce fait, nous nommons O, *le pseudo-centre* de la stelloïde cubique.

Notons encore que la *cayleyenne* de la stelloïde cubique est l'enveloppe des droites joignant les foyers associés des coniques du faisceau $(\Gamma_1 \Gamma_2)$. C'est donc l'enveloppe des axes des coniques de ce faisceau. C'est naturellement aussi l'enveloppe des paires de droites rectangulaires conjuguées à Γ_1 et à Γ_2 ; mais les deux axes d'une même conique du faisceau $(\Gamma_1 \Gamma_2)$ ne forment pas une de ces paires (ils ne sont pas conjugués à toutes les coniques du faisceau).

III. *Stelloïde conjuguée d'un quadrilatère complet.*

5. Considérons un quadrilatère complet, d'ailleurs quelconque; A, B, C, A′, B′ et C′ sont ses sommets et AA′, BB′ et CC′ ses diagonales [1].

Les confocales des coniques inscrites dans ce quadrilatère forment un réseau tangentiel. D'autre part, il résulte d'un théorème dû à Hermite, qu'une cubique est complètement déterminée par le réseau de ses coniques polaires. Elle est donc aussi complètement déterminée par le réseau de ses coniques apolaires. Les confocales des coniques inscrites dans le quadrilatère considéré forment donc *le réseau des coniques apolaires* d'une cubique bien déterminée. Cette cubique est une

[1] On est prié de faire les figures qui, toutes, sont très simples.

stelloïde, puisqu'une de ses coniques polaires est l'absolue, nous la nommerons la *stelloïde conjuguée du quadrilatère complet.*

Une conique inscrite et la paire des points cycliques sont deux coniques apolaires qui déterminent un faisceau entièrement formé de coniques apolaires. Ce faisceau est le faisceau des confocales de la conique inscrite considérée. Les deux paires de foyers associés de cette conique sont deux coniques dégénérées du faisceau, par conséquent deux coniques apolaires dégénérées.

Une paire de sommets opposés du quadrilatère complet, A A′ par exemple, constitue aussi une conique apolaire dégénérée.

6. *Le réseau des coniques polaires* de la stelloïde conjuguée est formé des hyperboles équilatères qui admettent le quadrilatère donné pour quadrilatère polaire (quadrilatère polaire au sens de Steiner). Ce qui revient à dire que ce réseau est formé des hyperboles équilatères qui coupent chacun des côtés du triangle diagonal suivant une paire de points conjugués harmoniques l'un de l'autre par rapport aux sommets du quadrilatère situés sur ce côté. Les coniques polaires dégénérées sont des paires de droites rectangulaires jouissant de cette propriété. Nous allons en déterminer quelques-unes :

La conique polaire d'un sommet est formée de la paire de droites rectangulaires issues du sommet opposé et conjuguées harmoniques l'une de l'autre par rapport aux deux côtés passant par ce sommet opposé. C'est la paire des *bissectrices* du quadrilatère en ce dernier sommet.

Une diagonale et la hauteur correspondante du triangle diagonal sont aussi deux droites satisfaisant aux conditions indiquées et qui constituent donc une conique polaire dégénérée. Enfin, une de ces coniques polaires dégénérées est formée de la droite de l'infini, qui est la droite de jonction des points cycliques, et d'une seconde droite du plan, conjuguée de la droite de l'infini par rapport aux coniques inscrites. Cette deuxième droite passe donc par le centre de chacune des coniques inscrites et en particulier par le point milieu de chacune des trois diagonales. C'est *la droite de Newton* du quadrilatère complet.

7. La droite de l'infini et la droite de Newton du quadrilatère constituent la conique polaire du *pseudo-centre* de la stelloïde conjuguée. Le point qui, sur la hessienne de la stel-

loïde, est le point correspondant du pseudo-centre, est le point à l'infini de la droite de Newton puisqu'il est le point double de sa conique polaire dégénérée. Mais ces deux points, le pseudo-centre et le point à l'infini de la droite de Newton, sont les foyers d'une conique inscrite et cette conique est la parabole inscrite puisqu'un de ses foyers est à l'infini.

Le pseudo-centre de la stelloïde conjuguée est donc le foyer de la parabole inscrite, c'est *le point de Miquel* du quadrilatère complet.

8. Nous avons vu précédemment qu'il existe une seule stelloïde conjuguée d'un quadrilatère complet donné. En revanche, une stelloïde cubique donnée est la stelloïde conjuguée d'une infinité de quadrilatères complets.

En effet, deux coniques apolaires quelconques de la stelloïde donnée ont quatre tangentes communes qui forment un quadrilatère dont la stelloïde donnée est la stelloïde conjuguée. Et ceci parce que le faisceau tangentiel déterminé par ces deux coniques est formé entièrement de coniques apolaires de la stelloïde. Le réseau de ces coniques apolaires est donc celui des confocales des coniques de ce faisceau.

Une stelloïde donnée est donc la stelloïde conjuguée d'une double infinité de quadrilatères complets. Une droite quelconque du plan en détermine un et un seul puisque les coniques d'un réseau tangentiel qui touchent une droite donnée forment un faisceau tangentiel.

Tous ces quadrilatères complets ont même point de Miquel et même droite de Newton. Nous pourrons voir qu'ils ont encore d'autres éléments communs.

IV. *Hessienne et cayleyenne de la stelloïde conjuguée.*

9. Des remarques précédentes, il résulte que la *hessienne* de la stelloïde conjuguée du quadrilatère complet est le lieu des foyers des coniques inscrites et nous pouvons montrer, bien que ce fait soit connu, qu'elle est une cubique circulaire passant par son foyer singulier. Les points de cette hessienne situés à l'infini sont en effet les points cycliques et le point à l'infini de la droite de Newton. Les points cycliques sont deux points correspondants, et le point à l'infini de la droite de Newton correspond au point de Miquel. Les tangentes aux points cycliques se coupent donc sur la courbe, au point correspon-

dant du troisième point à l'infini, c'est-à-dire au point de Miquel qui est ainsi le foyer singulier.

Nous avons vu en outre que cette hessienne passe par les six sommets du quadrilatère et par les pieds des hauteurs du triangle diagonal. Mais on sait que la hessienne d'une cubique est le lieu des points d'où les tangentes menées aux coniques apolaires sont des paires de droites en involution. Les droites doubles de cette involution étant, en chaque point de la hessienne, la paire de droites formant la conique polaire du point correspondant. Dans notre cas, cette paire est rectangulaire.

Il en résulte le théorème de Serret :

Le lieu des foyers des coniques inscrites dans un quadrilatère est aussi le lieu des points d'où les tangentes menées aux coniques inscrites sont les paires de droites correspondantes d'une involution symétrique.

En particulier,

Ce lieu des foyers est aussi le lieu des points d'où les paires de sommets opposés du quadrilatère complet sont vus suivant des paires de droites également inclinées sur deux droites rectangulaires.

10. Maintenant, nous pourrions évidemment énoncer de nombreuses propriétés métriques de la hessienne de la stelloïde conjuguée. Sans en vouloir faire une longue énumération, nous noterons seulement celles qui proviennent du fait que deux points correspondants de cette hessienne, autrement dit deux foyers associés d'une conique inscrite, sont conjugués harmoniques l'un de l'autre par rapport à la paire des bissectrices issues d'un même sommet du quadrilatère.

Deux points correspondants de cette hessienne sont inverses isogonaux par rapport aux quatre triangles que l'on peut former à l'aide de trois des côtés du quadrilatère.

Ces points correspondants sont seuls à jouir de cette propriété.

Ils sont d'ailleurs inverses isogonaux par rapport à une infinité de triangles du plan. Tous ces triangles sont ceux qui appartiennent à tous les quadrilatères dont la stelloïde conjuguée du quadrilatère donné est aussi la stelloïde conjuguée. Une droite quelconque du plan appartient à trois de ces triangles.

Enfin, si deux points sont inverses isogonaux par rapport à deux des triangles du quadrilatère complet, ils sont aussi inverses isogonaux par rapport aux deux autres. Dans ce cas, ces deux points sont en effet conjugués aux hyperboles équi-

latères conjuguées elles-mêmes à ces deux triangles. Ils sont donc conjugués à toutes les hyperboles équilatères du réseau des coniques polaires de la stelloïde.

Le point de Miquel et le point à l'infini de la droite de Newton sont deux de ces points inverses de telle sorte que *si l'on joint un des sommets du quadrilatère au point de Miquel, on obtient une droite dont l'isogonale, par rapport aux deux côtés passant par ce sommet, est parallèle à la droite de Newton.*

11. Voyons maintenant quelques propriétés du quadrilatère complet qui sont les conséquences de celles de la *cayleyenne* de la stelloïde conjuguée.

Cette cayleyenne est une courbe de troisième classe que l'on peut définir comme *enveloppe des droites joignant les paires de points correspondants de la hessienne,* ou comme *l'enveloppe des paires de droites rectangulaires qui sont des coniques dégénérées du réseau des coniques polaires.*

De ces deux définitions, et en vertu de ce que nous avons vu précédemment, il résulte que cette cayleyenne touche :

les douze bissectrices des angles du quadrilatère complet,
les côtés et les hauteurs du triangle diagonal,
la droite de Newton du quadrilatère complet et
la droite de l'infini du plan.

D'ailleurs, deux points correspondants de la hessienne sont deux foyers associés d'une conique inscrite et la droite joignant ces deux points est un des axes de la conique inscrite. Donc,

la cayleyenne de la stelloïde conjuguée du quadrilatère complet est aussi l'enveloppe des axes des coniques inscrites.

En outre, nous avons remarqué que la stelloïde conjuguée du quadrilatère est encore stelloïde conjuguée d'une infinité d'autres quadrilatères complets. De telle sorte que :

la cayleyenne peut, d'une infinité de façons, être considérée comme l'enveloppe des axes des coniques d'un faisceau tangentiel.

12. Mais on sait que chacune des tangentes de la cayleyenne d'une cubique coupe les coniques polaires de la cubique suivant des paires de points en involution. Ainsi,

un axe d'une conique inscrite dans le quadrilatère coupe les hyperboles équilatères admettant ce quadrilatère pour quadrilatère polaire suivant des paires de points en involution.

Une de ces hyperboles équilatères est formée de la droite de l'infini et de la droite de Newton du quadrilatère. Le centre de l'une quelconque des involutions précédentes est donc sur la droite de Newton, c'est-à-dire au centre de la conique dont on considère un axe. Et les points doubles de cette involution sont les foyers de la conique inscrite situés sur l'axe considéré. On est donc conduit au théorème suivant :

Un axe d'une conique inscrite dans un quadrilatère complet coupe les hyperboles équilatères dont ce quadrilatère est un quadrilatère polaire en des paires de points dont le produit des distances au centre de la conique inscrite considérée est constant et égal au carré de la demi-distance focale de cette conique.

Ce théorème a de nombreux cas particuliers dont quelques-uns ont déjà été cités. Il serait fastidieux de les énumérer pour montrer seulement qu'ils sont tous compris dans la proposition précédente. Qu'il nous soit permis de remarquer pourtant que les paires de bissectrices du quadrilatère sont des hyperboles équilatères admettant le quadrilatère donné pour quadrilatère polaire; de même d'ailleurs que les trois paires de droites formées d'un côté et de la hauteur correspondante du triangle diagonal.

En outre, ces bissectrices du quadrilatère, les côtés et les hauteurs du triangle diagonal sont aussi des axes de coniques inscrites. Les involutions dont parle le théorème précédent sont donc connues, sur chacune de ces droites, par de nombreuses paires de points correspondants.

Une des tangentes de la cayleyenne mérite d'être considérée en particulier. C'est *l'axe de la parabole inscrite*. Issue du point de Miquel, elle est parallèle à la droite de Newton du quadrilatère. Les points correspondants de la hessienne situés sur cet axe, c'est-à-dire les points doubles de l'involution que nous voulons déterminer, sont le point de Miquel et le point à l'infini. Cette involution est donc formée de paires de points symétriquement placés par rapport au point de Miquel. Donc,

L'axe de la parabole inscrite au quadrilatère coupe les hyperboles équilatères dont ce quadrilatère est un quadrilatère polaire, en particulier les paires de bissectrices issues d'un même sommet, en des points symétriquement placés par rapport au point de Miquel.

V. *Cercles et droites passant par le point de Miquel.*

13. Nous avons rencontré déjà quelques propriétés métriques du quadrilatère complet. Nous allons maintenant nous occuper des cercles et des droites remarquables qui passent par le point de Miquel.

Nous avons dit que ce point est le foyer de la parabole inscrite. Et comme un cercle, circonscrit à un triangle, circonscrit lui-même à une parabole, passe par le foyer de cette parabole, le point de Miquel est commun aux quatre cercles circonscrits aux quatre triangles que l'on peut former à l'aide de trois des côtés du quadrilatère. Mais on peut déterminer d'autres cercles et aussi des droites passant par ce point.

Dans un article intitulé: *Note sur le quadrilatère* et paru en 1901 dans les « Comptes rendus de l'Association française pour l'avancement des sciences », Léon Ripert note que le point de Miquel se trouve sur douze cercles et neuf droites remarquables. Mais, lorsqu'on a trouvé ainsi des cercles et des droites soumis à certaines conditions et passant par un même point, il est assez probable qu'il existe une propriété commune à tous les cercles ou à toutes les droites passant par ce point. C'est ce que nous allons établir.

Le point de Miquel est pour nous le pseudo-centre de la stelloïde conjuguée du quadrilatère; c'est le point dont la conique polaire est dégénérée en deux droites, l'une d'elles étant la droite de l'infini. Les coniques polaires des points de la droite de l'infini, par rapport à la stelloïde conjuguée, forment donc un faisceau d'hyperboles équilatères ayant toutes le point de Miquel pour centre.

Considérons une droite quelconque du plan. Les coniques polaires des points de cette droite, par rapport à la stelloïde conjuguée, forment un faisceau d'hyperboles équilatères et le lieu des centres des hyperboles équilatères de ce faisceau est un cercle.

Mais le point à l'infini de cette droite a une conique polaire dont le centre est le point de Miquel. Le cercle dont nous venons de parler passe donc par le point de Miquel.

Et l'on peut construire autant de ces cercles que de droites dans le plan; c'est-à-dire une double infinité. Le théorème général qui introduirait tous les cercles passant par le point de Miquel est le suivant :

Deux hyperboles équilatères, dont le quadrilatère donné est un quadrilatère polaire, se coupent en quatre points qui

sont les sommets et l'orthocentre d'un triangle. Le cercle des neuf points de ce triangle passe par le point de Miquel.

Et l'on aurait en particulier les neuf cercles dont parle Ripert et qui satisfont à la condition fixée par le théorème précédent. Ce sont :

les quatre cercles circonscrits aux quatre triangles du quadrilatère,

le cercle des neuf points du triangle diagonal,

trois cercles dont chacun est le lieu des centres des hyperboles équilatères d'un faisceau déterminé par deux coniques dégénérées et formées des paires de bissectrices issues de deux sommets opposés,

enfin, un cercle passant par les centres des quatre cercles circonscrits aux quatre triangles du quadrilatère.

14. Ce dernier cercle est connu sous le nom de *cercle de Miquel.* Ripert note qu'il passe par 25 points remarquables. En réalité, on peut ici encore donner une propriété de chacun des points de ce cercle: Tout point du cercle de Miquel est le centre de la conique polaire d'un point de la droite orthocentrique par rapport à la stelloïde conjuguée. Et les vingt-cinq points de Ripert pourraient être caractérisés comme cas particuliers des points satisfaisant à cette condition. Nous établirons dans le paragraphe suivant la correspondance que je viens de citer entre les points de la droite orthocentrique et ceux du cercle de Miquel.

15. Examinons maintenant dans quels cas les cercles passant par le point de Miquel dégénèrent. Nous obtiendrons encore des théorèmes généraux caractérisant les droites passant par le point de Miquel.

La conique polaire du point de Miquel lui-même est formée de la droite de l'infini et de la droite de Newton. Les coniques polaires des points d'une droite passant par le point de Miquel forment un faisceau auquel appartient la conique dégénérée précédente. Elles ont donc en commun deux points à l'infini et deux points situés sur la droite de Newton. Le lieu de leurs centres est une droite. C'est le côté du triangle diagonal du quadrangle complet des quatre points communs à ces coniques qui est opposé au point diagonal de ce quadrangle situé à l'infini. Cette droite passe par le point de Miquel et par le point milieu du segment déterminé par une de ces coniques polaires sur la droite de Newton. Donc,

la droite obtenue en joignant le centre d'une hyperbole équilatère, dont le quadrilatère donné est un quadrilatère polaire, au point milieu du segment qu'elle détermine sur la droite de Newton passe par le point de Miquel.

En particulier,

les deux bissectrices issues d'un même sommet du quadrilatère et la droite de Newton forment un triangle rectangle. La médiane issue du sommet de l'angle droit de ce triangle rectangle passe par le point de Miquel.

Il en est encore de même de la médiane issue du sommet de l'angle droit d'un triangle rectangle formé par la droite de Newton, une diagonale et la hauteur correspondante du triangle diagonal.

VI. *Une transformation du second ordre.*

16. Nous nous sommes efforcés jusqu'ici de tirer parti de la stelloïde et des réseaux de ses coniques polaires et apolaires. On a pu remarquer que l'on atteint par ces procédés spécialement les propriétés du quadrilatère qui ressortent de la considération de ses bissectrices.

Nous allons introduire maintenant une certaine transformation du second ordre intimement liée à la stelloïde et au quadrilatère et qui va nous conduire à de nouvelles propriétés métriques.

A cet effet, considérons les coniques polaires des points à l'infini par rapport à la stelloïde. Elles forment, nous l'avons déjà vu, un faisceau d'hyperboles équilatères concentriques, leur centre commun étant le point de Miquel. Ce faisceau est déterminé par les coniques polaires de chacun des points cycliques I et J : la conique polaire de I étant formée de deux droites issues du point J, et celle de J de deux droites issues de I et imaginaires conjuguées des précédentes. Ces deux paires de droites se coupent en deux points réels R et S et deux points imaginaires conjugués R′ et S′ ; O, le point milieu du segment R S, ou du segment R′ S′, est le pseudocentre de la stelloïde et le point de Miquel du quadrilatère. Et les deux droites réelles rectangulaires R S et R′ S′ constituent la troisième conique polaire dégénérée du faisceau.

Le faisceau que nous envisageons de ces hyperboles équilatères détermine une transformation du second ordre, où sont définis comme correspondants deux points conjugués par rapport à toutes les hyperboles équilatères du faisceau. Les points

R , S , R′ et S′ sont donc les points doubles de cette transformation. Par rapport à la stelloïde, toute paire de points correspondants est telle que sa droite polaire mixte est la droite de l'infini. *Le point correspondant d'un point donné est ainsi le centre de la conique polaire de ce dernier par rapport à la stelloïde.* Cette relation est évidemment réciproque.

Les points doubles de la transformation sont les quatre pôles de la droite de l'infini par rapport à la stelloïde. Nous nommerons les points R et S , qui sont réels, *les points doubles du quadrilatère complet.*

17. La transformation du second ordre définie par un faisceau d'hyperboles équilatères concentriques est bien connue. Elle équivaut à une inversion suivie d'une symétrie. Le cercle d'inversion est le cercle décrit sur R S comme diamètre et l'axe de symétrie est la droite R S .

Deux points correspondants sont donc placés de telle façon que le produit de leurs distances au point O soit constant, et que les droites les joignant au point O soient symétriques l'une de l'autre par rapport à la droite R S .

Mais deux points correspondants sont aussi tels que chacun d'eux est le centre de la conique polaire de l'autre, et ce fait permet de déterminer un grand nombre de paires de points correspondants. En particulier, toute conique apolaire dégénérée est formée de deux points correspondants de notre transformation. Deux foyers associés d'une conique inscrite forment donc une de ces paires, de même que deux sommets opposés du quadrilatère. Donc,

le produit des distances du point de Miquel à deux foyers associés d'une conique inscrite, ou plus particulièrement à deux sommets opposés du quadrilatère, est constant et égal au carré de la demi-distance des points doubles du quadrilatère.

18. La transformation du second ordre dont nous nous occupons transforme une droite quelconque du plan en un cercle passant par le point de Miquel et une droite passant par ce point en une autre droite passant aussi par ce point. Voyons quels sont les cercles transformés de quelques droites remarquables.

Un côté du quadrilatère se transforme dans le cercle circonscrit au triangle formé par les trois autres côtés, puisque chaque sommet se transforme dans son opposé. Le pied de la perpendiculaire abaissée du point de Miquel sur un côté a

alors pour correspondant le point du cercle transformé qui est diamétralement opposé au point de Miquel. Donc,

le carré de la demi-distance des points doubles du quadrilatère est aussi égal au produit de la distance du point de Miquel à un côté, par le diamètre du cercle circonscrit au triangle des trois autres côtés.

Mais les pieds des quatre perpendiculaires abaissées du point de Miquel sur les côtés sont situés sur la droite de Simson. Les points diamétralement opposés au point de Miquel, sur chacun des quatre cercles circonscrits aux triangles du quadrilatère, sont sur un cercle, transformé de la droite de Simson. Donc,

les cercles circonscrits aux quatre triangles du quadrilatère sont coupés diamétralement par un même cercle et les quatre diamètres sont issus du point de Miquel.

Nous avons affirmé, au n° *14*, que le lieu des centres des coniques polaires des points de la droite orthocentrique est le cercle de Miquel du quadrilatère. A ce moment-là, il paraissait assez difficile de le prouver; maintenant, le démonstration est immédiate.

Donnons, en effet, à la droite de Simson, une homothétie, en prenant le point de Miquel pour centre et $1/2$ pour rapport d'homothétie. Nous obtiendrons la droite orthocentrique. On pourra donc passer du cercle transformé de la droite de Simson au cercle transformé de la droite orthocentrique par une nouvelle homothétie ayant, comme la précédente, son centre au point de Miquel, mais un rapport inverse de celui de la précédente.

Cette nouvelle homothétie, dont le rapport est 2, fait correspondre au point diamétralement opposé au point de Miquel le centre de chacun des cercles circonscrits aux quatre triangles du quadrilatère. *Ces quatre centres sont donc sur un cercle (le cercle de Miquel), transformé de la droite orthocentrique dans la transformation du second ordre.*

19. Nous pourrions encore chercher les cercles transformés de nombreuses autres droites remarquables dans le plan du quadrilatère, puis établir les liaisons entre eux. Sans vouloir épuiser complètement cette question, remarquons pourtant que les cercles transformés de deux droites se coupent sous un angle égal à celui de ces deux droites, puisque la transformation considérée se compose d'une inversion et d'une symétrie qui, l'une et l'autre conservent les angles.

Deux côtés du quadrilatère, se coupant en un sommet A, par exemple, sont ainsi transformés en deux cercles circonscrits à deux triangles du quadrilatère; ces deux triangles ont en commun le sommet A′ et les deux côtés passant par ce sommet. Il résulte alors de ce qui précède que *l'angle des côtés en* A *est égal à l'angle des cercles en* A′. Ce qui est un théorème connu.

20. Dans la transformation envisagée, le triangle fondamental, c'est-à-dire le triangle polaire commun aux coniques du faisceau qui détermine la transformation, a pour sommet le point de Miquel O et les points cycliques du plan I et J. Et l'on peut démontrer aisément que, dans toute transformation du second ordre, une conique passant par deux des sommets du triangle fondamental et par deux des points doubles se transforme en elle-même.

Dans notre cas, nous aurons, se transformant en elles-mêmes, les coniques passant par les points cycliques et par les points doubles R et S et celles qui passent par les points cycliques et par les points doubles R′ et S′.

Ce sont donc deux faisceaux de cercles réels. Chacun d'eux contient les cercles orthogonaux aux cercles de l'autre faisceau. L'un de ces faisceaux a les points doubles du quadrilatère, R et S, pour points fondamentaux, l'autre a ces points pour points limites.

Et si un point se trouve sur un cercle se transformant en lui-même, son correspondant dans la transformation y est aussi. Donc,

les deux points de toute paire de points correspondants de la transformation se trouvent, à la fois, sur un cercle du premier et sur un cercle du second faisceau.

Il en est, en particulier, ainsi de deux foyers associés d'une conique inscrite et des paires de sommets opposés du quadrilatère complet.

De plus, une transformation du second ordre conserve les rapports anharmoniques sur deux coniques qui se transforment l'une dans l'autre. Et, par conséquent, sur une conique qui se transforme en elle-même, deux points correspondants sont conjugués harmoniques l'un de l'autre par rapport aux points doubles situés sur cette conique. Nous pouvons donc énoncer le théorème général,

deux foyers associés d'une conique inscrite (en particulier, deux sommets opposés du quadrilatère) et la paire des

points doubles sont sur un cercle. Et, sur ce cercle, les points doubles sont conjugués harmoniques de la paire de foyers associés considérés.

21. Les deux faisceaux de cercles dont nous venons de nous occuper, ou plutôt certains cercles de ces faisceaux ont déjà été rencontrés par Steiner.

En 1827, dans les *Annales de Gergonne,* Steiner a énoncé une dizaine de théorèmes relatifs au quadrilatère complet, sans en donner d'ailleurs la démonstration. A ce moment, les seules propositions connues sur ce sujet étaient le théorème de Desargues, le théorème de Pappus sur la division harmonique d'une diagonale par les deux autres et le théorème de Gauss sur la droite qui joint les points milieux des trois diagonales.

En particulier, Steiner a énoncé les propositions suivantes:

« Pour chacun des quatre triangles du quadrilatère complet il y a un cercle inscrit et trois cercles exinscrits, ce qui fait en tout seize cercles dont les centres sont quatre à quatre sur une circonférence, de manière à donner naissance à huit nouveaux cercles.

Ces huit nouveaux cercles se partagent en deux groupes, tels que chacun des quatre cercles de l'un de ces groupes coupe orthogonalement tous les cercles de l'autre groupe; on en conclut que les centres des cercles des deux groupes sont sur deux droites perpendiculaires l'une à l'autre.

Enfin, ces deux dernières droites se coupent au point 0 mentionné précédemment. » [1]

Ces deux faisceaux de cercles de Steiner sont précisément les deux faisceaux de cercles qui se transforment en eux-mêmes dans la transformation du second ordre dont il vient d'être question.

En outre, cette transformation permet de caractériser géométriquement tout cercle de chacun des deux faisceaux. C'est ce que nous allons faire, entre autres choses, dans le paragraphe suivant.

Nous ne démontrerons pas ici les théorèmes de Steiner que nous venons de citer. Les démonstrations que l'on a données autrefois ne faisaient intervenir que des propositions de la géométrie élémentaire, ce qui les rendait fort longues et confuses.

[1] Le point 0 est le point commun aux quatre cercles circonscrits aux quatre triangles du quadrilatère.

Dans un article paru en décembre 1927 dans les *Nouvelles Annales de Mathématiques,* nous avons montré que ces théorèmes de Steiner pouvaient aussi se déduire, assez facilement, de la considération de la stelloïde et de certaines autres cubiques apparentées.

22. Avant de clore ce paragraphe, nous allons encore démontrer une propriété des points doubles du quadrilatère. Nous savons que ces points R et S sont déterminés de telle façon que les deux droites I R et I S forment la conique polaire de J, par rapport à la stelloïde, et les deux droites J R et J S celle du point I.

Les deux droites I R et I S, de même que les droites J R et J S sont donc conjuguées à chacune des coniques apolaires, c'est-à-dire à toute conique inscrite dans le quadrilatère. Menons de I les tangentes I F et I F′ et de J les tangentes J F et J F′ à une de ces coniques inscrites (F, F′, G et G′ sont les quatre foyers de cette conique). Les droites I F et I F′ sont conjuguées harmoniques l'une de l'autre par rapport aux droites I R et I S, de même J F et J F′ sont conjuguées harmoniques l'une de l'autre par rapport aux droites J R et J S.

Il en résulte que toutes les coniques passant par les quatre points F, F′, G et G′ sont harmoniquement circonscrites aux coniques tangentes aux quatre droites I R, I S, J R et J S. En particulier, la paire de droites F F′, G G′, qui est la paire d'axes de la conique incrite considérée, est conjuguée à la paire de points R S. Donc,

les axes d'une conique inscrite sont conjugués harmoniques l'un de l'autre par rapport à la paire des points doubles du quadrilatère.

(Ce théorème n'est pas un cas particulier de ceux que nous avons rencontrés précédemment; les points doubles ne sont pas situés sur la hessienne et les axes d'une conique inscrite ne sont pas tangentes correspondantes de la cayleyenne.)

VII. *Les autopoloconiques de la stelloïde et les cercles de Steiner.*

23. Nous avons annoncé, au n° *21*, que les cercles de Steiner, en particulier, et plus généralement tous les cercles de leurs deux faisceaux seraient caractérisés par une propriété géométrique simple. Nous y parviendrons en introduisant la notion d'autopoloconique de la stelloïde.

On définit, par rapport à une courbe du troisième ordre, la poloconique d'une conique quelconque (c) de la manière suivante :

On considère celles des coniques polaires qui sont harmoniquement inscrites à (c) (ou qui, en d'autres termes, considérées comme courbes de deuxième classe sont apolaires à la courbe de deuxième ordre (c)) : les pôles de ces coniques polaires sont sur une nouvelle courbe du second ordre (c') qu'on nomme la poloconique de (c). La relation ainsi définie est réciproque.

Lorsque (c) et (c') sont confondues, on a une conique unique dite autopoloconique de la cubique.

Voici une propriété qui résulte immédiatement de la définition précédente.

Soit P un point d'intersection de la conique donnée (c) et de la hessienne de la cubique. P est le point double de la conique polaire d'un autre point P′ de la hessienne. Cette polaire, considérée comme courbe de seconde classe, est réduite à un point double situé en P. Comme courbe de seconde classe elle est donc apolaire à la conique (c) et son pôle P′ se trouve sur la conique (c'), poloconique de (c). Or P et P′ sont deux points correspondants de la hessienne.

Donc, les correspondants sur la hessienne des six points d'intersection de la hessienne et d'une conique (c) sont sur la poloconique (c') de cette dernière.

Il est maintenant aisé de voir que les cercles de Steiner, ainsi que tous les cercles de leurs deux faisceaux, sont des autopoloconiques de la stelloïde. Ils satisfont tout aussi évidemment à la définition même des autopoloconiques qu'à la propriété que nous venons d'énoncer.

En effet, soit (c) un de ces cercles. Nous avons vu que le centre de l'hyperbole équilatère, conique polaire d'un point quelconque de ce cercle, est aussi sur le cercle. Cette hyperbole équilatère est donc harmoniquement inscrite au cercle (c).

D'autre part, nous avons aussi montré que lorsque le cercle (c) contient l'un des points d'une conique apolaire dégénérée, il contient aussi l'autre. Le cercle (c) ne peut donc couper la hessienne de la stelloïde qu'en trois paires de points correspondants, il coïncide donc avec sa poloconique. Il possède, en effet, la propriété des autopoloconiques que nous avons énoncée.

24. Les cercles de ces deux faisceaux ne sont pas les seules autopoloconiques de la stelloïde. On sait qu'une cubique pos-

sède deux réseaux d'autopoloconiques, que chacun de ces réseaux, considéré comme réseau de coniques polaires détermine une nouvelle cubique, et que ces trois cubiques possèdent la même cayleyenne.

Pour déterminer les autopoloconiques de la stelloïde que nous ne possédons pas encore il suffirait de remplacer la paire absolue I J par une autre conique apolaire dégénérée; c'est-à-dire de remplacer le faisceau des coniques polaires de la droite de l'infini, qui nous a conduit à notre transformation du second ordre, par celui des coniques polaires d'une autre tangente, d'ailleurs quelconque, de la cayleyenne.

Remarquons en outre que les trois cubiques qui ont la même cayleyenne sont entre elles en relations parfaitement symétriques. Si donc on remplaçait la stelloïde par l'une des deux autres cubiques, toutes les considérations que nous avons faites précédemment pourraient être répétées, *mutatis mutandis*.

Toutes les propriétés auxquelles nous arriverions ne seraient pas également intéressantes parce que la paire I J des points cycliques n'y jouerait pas un rôle aussi essentiel. Mais il en est quelques-unes qui mériteraient de retenir notre attention et qu'on peut désigner d'emblée.

En effet, les bissectrices du quadrilatère, en leur qualité de tangentes à la cayleyenne, appartiendraient à des coniques polaires dégénérées. Il est vrai que ce ne serait plus deux bissectrices issues d'un même sommet qui formeraient une conique polaire, mais deux bissectrices issues de deux sommets opposés. Ainsi donc, par exemple, les nouvelles paires de bissectrices que l'on formerait seraient encore coupées par une tangente quelconque de la cayleyenne suivant des paires de points en involution, etc., etc.

VIII.

La fin du paragraphe précédent fait voir que la stelloïde conjuguée n'est pas la seule cubique qui permette d'établir des propriétés métriques du quadrilatère complet.

Mais, plus généralement, si nous disons qu'une cubique est conjuguée au quadrilatère complet lorsque le réseau de ses coniques apolaires contient le faisceau des coniques inscrites, une cubique conjuguée est déterminée par une nouvelle conique apolaire arbitrairement choisie. Et, en faisant judicieusement ce dernier choix, on sera conduit à de nouvelles propriétés projectives ou métriques.

Par exemple, les cubiques conjuguées et apolaires à une paire de points situés à l'infini dans des directions rectangulaires fourniront de nouvelles propriétés métriques du quadrilatère complet.

Enfin, la géométrie du quadrangle complet pourra être édifiée par la méthode corrélative. On dira qu'une courbe de troisième classe est conjuguée au quadrangle complet si elle est apolaire à toutes les coniques circonscrites au quadrangle. Une courbe de troisième classe conjuguée est alors déterminée par une nouvelle conique apolaire arbitrairement choisie.

Si, pour citer un exemple, cette nouvelle conique apolaire est dégénérée et contient la droite de l'infini, ou même si elle est formée d'une droite double à l'infini, on sera conduit à de nombreuses propriétés métriques.