Zeitschrift: Bulletin de la Société Vaudoise des Sciences Naturelles
Herausgeber: Société Vaudoise des Sciences Naturelles
Band: 59 (1936-1937)
Heft: 243

Artikel: Maxima, minima, indicatrice
Autor: Dumas, Gustave
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-272477

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 08.01.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

BULLETIN DE LA SOCIETE VAUDOISE DES SCIENCES NATURELLES
Vol. 59 1937 No 243

Maxima, minima, indicatrice

PAR
Gustave DUMAS

Le contenu de la présente Note constituait un travail d'approche relatif à la théorie des points singuliers des surfaces algébriques; communication en fut faite à Zürich en 1934 [1]. La Note elle-même n'a pas été publiée depuis lors; il eût fallu, pour son intelligence, la faire précéder de considérations un peu complètes sur le *polyèdre analytique*. Or, le « polyèdre » ayant, depuis, acquis droit de cité, grâce aux travaux de M. Emile Cotton [2], rien n'empêche maintenant d'attirer l'attention sur les avantages qu'il présente pour la discussion de la structure d'une surface analytique au voisinage d'un point régulier, c'est-à-dire d'un point doté d'un plan tangent unique [3].

1. La surface à considérer (S),

$$F(x, y, z) = o, \tag{1}$$

le sera à l'origine O, de coordonnées

$$x = y = z = o.$$

[1] *Actes de la Soc. helv. des Sc. nat.*, Zürich 1934, p. 267.

[2] Emile Cotton. Sur l'étude des fonctions holomorphes et des fonctions algébroïdes de plusieurs variables. (Extension d'une méthode de Puiseux). *Annales scientifiques de l'Ecole normale supérieure*, 3e Série, t. 51.

[3] La littérature du sujet est abondante ; voir, par exemple :

D. Hilbert und S. Cohn-Vossen. Anschauliche Geometrie, Chap. IV, § 28, p. 161 et svtes.

Stæckel. *a)* Ueber das Modell.... *Zeitschrift für Math. u. Physik*, t. 51, 1904. *b)* Die Bedeutung des Weierstrass'schen Vorbereitungssatzes... *Stizungsber. d. Heidelberger Akad. d. Wiss.*, 1916, 1. Abhandlung.

Ludwig Scheeffer. Theorie der Maxima und Minima einer Function von zwei Variabeln. *Math. Annalen*, t. XXXV, 1890.

Francesco Severi. Sugli estremanti delle Funzioni di due variabile. *Memorie della reale Accademia d'Italia, Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.* Vol. I, Rome 1930.

A noter aussi que Felix Klein, à la page 444 de son « Anwendung der Differential und Integralrechnung auf Geometrie », Leipzig 1907, s'occupant des questions dont il s'agit dans ce travail, fait allusion aux « beaux exemples » que l'on rencontre, d'intersections de surfaces par leurs plans tangents.

Elle sera réelle et analytique en O et ce point O sera *régulier* pour elle. Son plan tangent en O, sera le plan des x, y.

2. *Classification.* Considérons, pour un instant, la surface (S) sur tout son parcours. Prenons, dans une position générale, un *point régulier* M de celle-ci.

En ce point, les dérivées partielles, premières et secondes de z, relativement à x et y, p, q, r, s, t existent.

Trois cas peuvent se présenter, en ce point M.

Ou bien :

a) $$rt - s^2 \neq o,$$

le point M est alors *elliptique* ou *hyperbolique*. C'est le cas général. Les points réguliers d'une surface sont, en général, elliptiques ou hyperboliques. Ils sont en double infinité.

Ou bien :

b) $$rt - s^2 = o,$$

sans que les trois quantités r, s, t soient nulles à la fois. On a alors un point *parabolique*. Ce cas est général aussi. Dans l'ensemble, ces points constituent les *lignes paraboliques* de la surface.

Ou bien :

c) $$r = s = t.$$

Les points qui satisfont à ces dernières conditions ne peuvent exister qu'exceptionnellement sur la surface. Ils ont leur importance. On verra, chez HILBERT, *loc. cit.*, tout l'intérêt qu'ils peuvent présenter, en Géométrie.

Et, pour l'examen de ces différents points, on s'appuiera sur cette proposition qui va presque de soi.

La structure d'une surface au voisinage d'un point régulier est connue dès que l'on connaît celle de son intersection par le plan tangent.

Le but de l'exposé est d'ailleurs moins de reprendre de rigoureuses recherches faites déjà par d'autres, que d'introduire d'une manière simple, une généralisation utile, et nouvelle croyons-nous, de la notion d'*indicatrice* au sens de *Dupin*.

3. Partons d'un exemple et prenons, pour cela, un point de la troisième catégorie, un *Affensattel* selon HILBERT, *loc. cit.*, une *selle à trois pans*, dirons-nous.

La selle à trois pans en O, dans le cas le plus simple, correspond à une équation de la forme

$$z = (ax + by)\ (a_1x + b_1y)\ (a_2x + b_2y) = D_1D_2D_3\ ,$$

dont le second membre est le produit de trois facteurs linéaires et homogènes distincts.

Cette surface, au voisinage de O, est caractérisée par l'allure générale du système topographique donné, fig. 1.

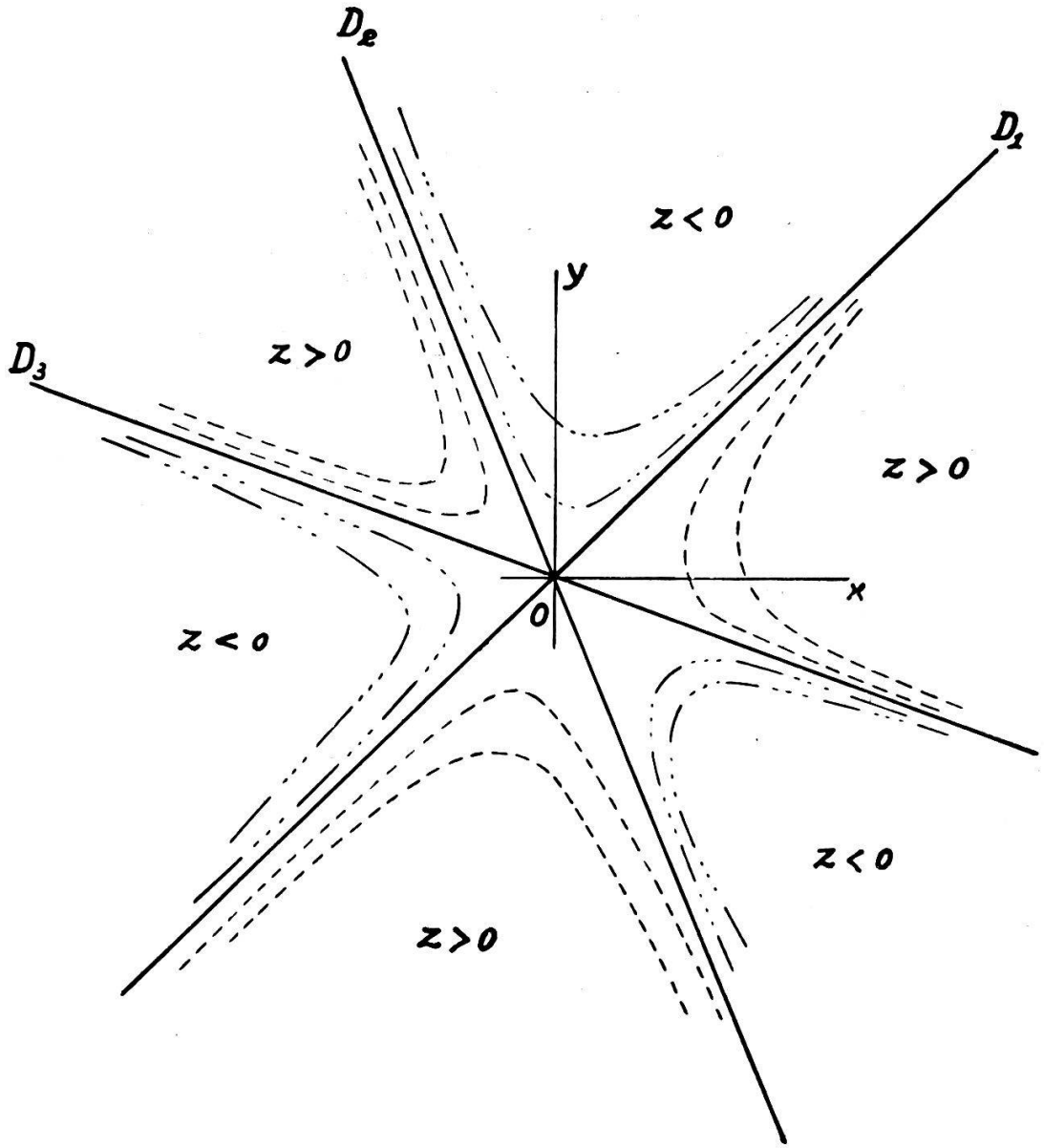

Fig. 1.

Dans le livre de HILBERT, *loc. cit.*, on trouvera, p. 169, fig. 198, représentée en perspective, la même surface au voisinage de O.

On aura de même des « selles à n pans » [4].

D'une manière générale, il y a toujours grand avantage à tenir compte, dans les problèmes d'extrema dépendant de deux variables indépendantes, de certaines intersections planes de la surface.

Après avoir coupé, par exemple, la surface

$$(2) \qquad z = x^3y^2(a - x - y)\,, \quad (a \neq o)\,,$$

par le plan $z = o$, on obtient, intuitivement pour ainsi dire, la position de l'unique maximum [5].

L'intersection d'une surface en un point O, par son plan tangent en O, peut, au voisinage de O, présenter bien des caractères.

Elle peut se réduire à n'être qu'un *point isolé*, ou compter des *branches d'ordre pair* ou *d'ordre impair de multiplicité*.

Si l'ordre est *pair*, il y a *contact* le long de la ligne; s'il est *impair*, il y a *intersection* proprement dite.

Et, dans bien des cas, il arrive qu'immédiatement ou presque immédiatement, on ait des conditions suffisantes fixant ces particularités.

4. Le polyèdre analytique.

Ce polyèdre conduit, de suite pour ainsi dire, à de pareilles conditions. On le construit d'une manière facile à caractériser.

Le terme général, à coefficient numérique différent de zéro, $A_{\alpha\beta\gamma}$, de $F(x,y,z)$, étant

$$A_{\alpha\beta\gamma}x^\alpha y^\beta z^\gamma$$

on prendra un trièdre de référence $\Omega\alpha$, $\Omega\beta$, $\Omega\gamma$ et, rapporté à ce trièdre, le point de coordonnées α, β, γ.

[4] H. SCHILT a introduit « les selles à n pans » dans des recherches relatives aux surfaces isométriques non déformables l'une sur l'autre par continuité. *Actes de la Soc. helv. des sc. nat.*, Soleure 1937, p. 244. ou aussi *L'Enseignement mathématique*, t. XXXVI, p. 109.

[5] *Exercices de Frenet*, n° 204.

Ce point à cotes entières, ce *nœud,* dirons-nous, que, le cas échéant, on représentera également par la lettre $A_{\alpha\beta\gamma}$, sera le point ou *nœud représentatif* du terme considéré.

On construit de la sorte, ou, tout au moins, on suppose, construits de la sorte, tous les nœuds représentatifs des termes effectifs de $F(x,y,z)$ et, procédant d'une façon analogue à celle dont on procède lorsqu'il s'agit d'aboutir à un polygone de Newton, on obtient finalement une surface polyèdrale ouverte. Cette surface polyèdrale à faces planes, constitue pour O le polyèdre analytique de la surface (S) analytique en O, correspondant à (1).

Prenons, pour fixer les idées, un exemple particulier et, pour cela, considérons tout d'abord l'expression

$$u = z + \Phi(x, y),$$

avec

$$(3) \qquad \Phi(x, y) = Bx^{26} + ax^{21}y^2 + Dx^{16}y^4 + bx^{13}y^7 + cx^{10}y^{10} + dx^7y^{13} + Hx^4y^{16},$$

où les coefficients B, D, H sont, chacun, différents de zéro, les coefficients a, b, c, d, en revanche, nuls éventuellement.

Au terme z, correspondra dans le polyèdre, le nœud dédésigné par A.

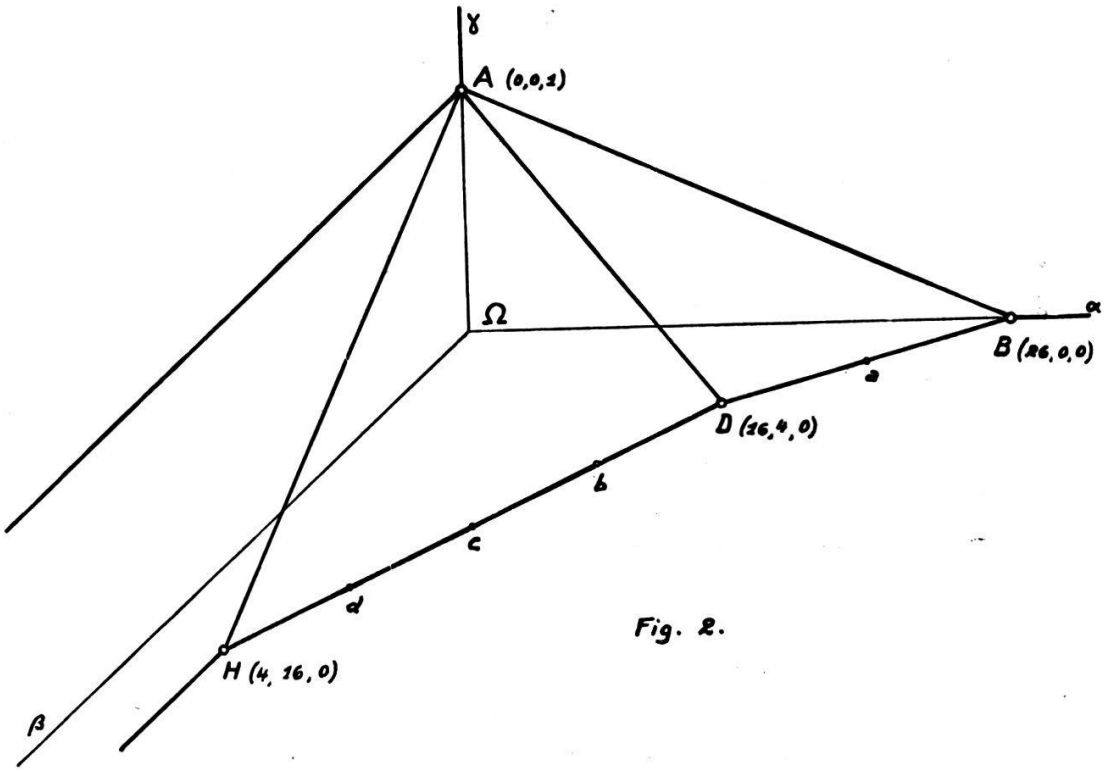

Fig. 2.

Cela étant, le polyèdre $\mathcal{P}$ de u, sera celui que donne fig. 2, chaque terme de u donnant lieu à un nœud représentatif qui appartient en fait à $\mathcal{P}$.

Supposons, ensuite, un ensemble de termes

$$\sum M_{\alpha\beta\gamma} x^\alpha y^\beta z^\gamma$$

dont tous les nœuds représentatifs soient situés à l'intérieur de $\mathcal{P}$ ou sur son contour, sans toutefois se confondre avec aucun nœud représentatif d'un terme quelconque de u. L'intérieur de $\mathcal{P}$ est défini par opposition à l'origine Ω, laquelle, par définition, est à l'extérieur de $\mathcal{P}$.

$\mathcal{P}$, dans ces conditions, sera encore le polyèdre analytique de

$$(4) \qquad F(x,y,z) = u + \sum M_{\alpha\beta\gamma} x^\alpha y^\beta z^\gamma .$$

A remarquer que, dans F, l'on est toujours en droit de supposer le coefficient numérique du terme en z seul, égal à $+1$, car ce coefficient, lorsque le point O est régulier, est toujours différent de zéro, alors que l'équation $F = o$ est seule en cause.

Appelons, en outre, *partie principale* du polyèdre, la partie que constituent les deux faces ABD et ADH. Cette partie principale est bien déterminée dans chaque cas particulier, ici, par les sommets A, B, D, H, effectifs puisque dans u, A, B, D, H représentent respectivement des quantités, toutes, différentes de zéro.

Dans le cas que nous étudions, la construction du polyèdre sera toujours rapide. Celui-ci, en effet, est déterminé dès que l'on connaît sa trace sur le plan des $\Omega\alpha$, $\Omega\beta$, c'est-à-dire le polygone de Newton en O de l'expression $F(x,y,o)$, sans que dans celui-ci les côtés extrêmes soient confondus nécessairement avec les axes $\Omega\alpha$ et $\Omega\beta$.

5. *Indicatrice.*

Etant donnée la surface (S), d'équation

$$(1) \qquad F(x,y,z) = o, \qquad (S)$$

et son polyèdre $\mathcal{P}$ en O, son indicatrice en O sera, par définition, la surface (J) d'équation

$$(5) \qquad z + \Phi(x,y) = o\,. \qquad (J)$$

Le premier membre de cette dernière équation que nous utilisons aussi pour définir d'une manière générale Φ, est formé par l'ensemble des termes de F, dont les nœuds représentatifs appartiennent à la partie principale de $\mathcal{P}$.

Comme plus haut, l'on admet, supposition sans importance et faite seulement pour la facilité de l'exposé, que le coefficient du terme en z, dans F, est égal à un.

La surface (J) est en O, n° 6, *osculatrice,* du second ordre au moins, à (S). Elle correspond au paraboloïde que l'on fait d'habitude intervenir, lorsque le point O étant elliptique ou hyperbolique, on veut être renseigné sur la structure de (S) en O.

Mais, la surface (J) qui, le cas échéant, peut se confondre avec le paraboloïde, donne souvent, d'une manière plus complète, la structure de (S).

Soit, par exemple, l'équation

$$(6) \qquad z = xy - x^3 - y^3\,,$$

le polyèdre en O correspondant s'obtient immédiatement. Sa partie principale a deux faces.

Les termes se rattachant à ces deux faces, conduisent respectivement aux deux équations

$$z = x(y - x^2) \quad \text{et} \quad z = y(x - y^2)\,.$$

Par ces dernières, on est beaucoup mieux renseigné, qu'après avoir constaté, par l'examen pur et simple de (6), que O est un point hyperbolique et la surface remplaçable, au voisinage de O, par le paraboloïde $z = xy$.

Ces questions dépassent les limites de ce travail; on verra plus loin cependant, au n° 10, avec plus de précision, l'avantage que présente l'introduction de la surface (J), quand le point est parabolique.

6. Par application du *théorème préliminaire de Weierstrass,* détachons maintenant de $F(x, y, z)$, le facteur qui, égalé à zéro, représente (S) au voisinage de O.

On a, comme on le sait,

$$(7) \qquad F(x, y, z) = [z + g(x, y)]\,E(x, y, z)\,,$$

$g(x, y)$ étant série entière en x, y, nulle pour $x = y = o$, et

$E(x, y, z)$ série entière en x, y, z, différente de zéro pour $x = y = z = o$.

La décomposition en facteurs (7) n'est possible que d'une seule façon.

D'autre part, on a :

$$E(o, o, o) = 1 , \tag{8}$$

le coefficient de z dans F, étant égal à 1.

Si, donc, on construit le polyèdre en O, de la surface

$$z + g(x, y) = o , \tag{9}$$

la partie principale de celui-ci sera identique à la partie principale du polyèdre de (S) en O. Ceci, à cause de (7) et (8) et de la façon dont se constitue le polyèdre résultant du produit de deux facteurs, les polyèdres de chacun de ces deux facteurs étant connus.

On a donc par là, d'une manière nette, la vérification de la propriété d'osculation de (J) et de (S), en O, signalée au n° 5, puisque (9) est en fait l'équation de (S) au voisinage de O.

D'un autre côté, l'équation

$$g(x, y) = o , \tag{10}$$

équivalente, en général pour le voisinage de O seulement, à l'équation

$$F(x, y, o) = o , \tag{11}$$

représente, pour le voisinage de O, l'intersection de (S) avec son plan tangent.

Chacune de ces équations (10) et (11) possédera donc en O et d'après ce qui précède, même polygone de Newton, polygone correspondant d'ailleurs aux différents termes de Φ.

C'est donc par la discussion de Φ, qu'en certains cas, l'on pourra reconnaître, si, en O, il y a ou non extremum pour (S).

Ce dernier résultat aurait pu s'obtenir, d'ailleurs, sans intervention du polyèdre. La chose est manifeste; la considération seule des polygones aurait suffi. Le polyèdre, toutefois, fait mieux ressortir ce qu'est l'indicatrice généralisée.

7. Maxima et minima.

Soit

$$\Phi(x, y) = x^p y^q \Psi(x, y) \ , \quad p \geqslant o \ , \ q \geqslant o \ ;$$

à cause de la signification même de Φ relativement au polygone, $F(x, y, o)$ se trouvera divisible par x^p et y^q, de sorte que les droites

$$x = o \ , \ y = o$$

confondues, chacune p et q fois, appartiennent à l'intersection en O de (S) avec son plan tangent.

Si, donc, les exposants p et q sont tous deux pairs, ou tous deux nuls, ou l'un nul et l'autre pair, les facteurs p et q resteront sans influence sur l'existence éventuelle d'un extremum.

Si, au contraire, un seulement de ces deux exposants p ou q est impair, (S) étant, pour le moins, coupée en O, par une droite de multiplicité impaire, il ne pourra y avoir d'extremum en O.

Ce cas écarté, la discussion portera sur $\Psi(x, y)$ ou, plus exactement, sur les polynômes qui se déduisent de Ψ, relativement aux côtés du polygone auquel Ψ appartient.

Ces polynômes se décomposent finalement, à un facteur numérique près, en un produit d'expressions de la forme

$$(12) \qquad (y^q + ax^p)^\lambda = r^\lambda ,$$

dans lesquelles a représente une quantité réelle ou complexe, p et q deux entiers sans diviseur commun, positifs et pouvant se réduire tous deux à l'unité.

Ces quantités p et q sont en relation avec les inclinaisons respectives des divers côtés du polygone; λ est un entier positif, égal ou supérieur à un, déterminé également par ces côtés.

Comme Ψ est réel, ceux des facteurs qui seront complexes seront toujours deux à deux conjugués.

Rien n'exclut que l'intersection de (S) en O par le plan tangent ait des parties indépendantes et multiples; cela ne modifie en rien ce qui va suivre.

Cela étant, des paraboles généralisées

$$(13) \qquad r = y^q + ax^p = o ,$$

qui, parfois, sont de simples droites, on peut, dans certains cas, tirer des conséquences relatives à l'allure générale de la courbe d'intersection.

C'est ainsi que le point O est isolé, si toutes les paraboles (13) sont imaginaires, que la courbe d'intersection comporte certainement une branche réelle si, la parabole $r = o$ étant réelle, l'exposant λ correspondant est impair, qu'en revanche, l'on ne peut se prononcer si, la parabole $r = o$ étant réelle, l'exposant correspondant λ est pair.

Tout ceci, comme conséquence de la façon dont, par le calcul, on passe des paraboles (13) aux diverses branches que la courbe d'intersection peut présenter en O.

On en déduit aussitôt la *conclusion* suivante :

1° si toutes les paraboles, sans exception, sont imaginaires, *il y a extremum* ;

2° si, une seule d'entre elles étant réelle, est multiple d'ordre impair, *il ne peut y avoir extremum*;

3° si, toutes celles de ces paraboles qui sont réelles, le sont avec un ordre pair de multiplicité, *il y a doute.*

On remarquera l'analogie complète de ce dernier énoncé avec l'énoncé parallèle relatif à l'indicatrice de Dupin, l'énoncé relatif à l'indicatrice de Dupin, se rattachant lui-même à une circonstance très particulière du cas qui se présente ici.

Reste encore, en présence d'un extremum, à distinguer si, maximum ou minimum, il y a. Cette discrimination facile se fera, d'une manière ou d'une autre, par une section appropriée de la surface, si l'on veut.

8. Exemples.

a)
$$z + x^{26} + x^{16}y^4 + x^4y^{16} + hz^5 + kxyz + lx^5y^{16} = o\,.$$

où h, k, l sont des coefficients numériques quelconques, mais réels.

Le polyèdre en O est donné, fig. 2 ; on a

$$\Phi = x^{26} + x^{16}y^4 + x^4y^{16} = x^4\,(y^{16} + x^{12}y^4 + x^{22})\,,$$

de sorte que

$$\Phi = x^4\Psi ,$$

avec

$$\Psi = y^{16} + x^{12}y^4 + x^{22} .$$

Le facteur x^4, entrant dans Φ, est sans influence sur la discussion.

En correspondance avec les côtés internes du polygone, on a, d'autre part,

$$y^4 + x^{10} = o \quad \text{et} \quad y^{12} + x^{12} = o .$$

Ces deux lignes sont imaginaires, chacune.

On est donc certain, sans qu'il soit nécessaire d'utiliser les expressions introduites sous (13) dans lesquelles p et q sont sans diviseur commun, qu'en O, il y a extremum.

Il s'agit d'un *maximum,* puisque la section par le plan $y = o$, par exemple, donne la courbe

$$z + x^{26} + hz^5 = o ,$$

dont l'allure en O est celle de la parabole

$$z + x^{26} = o .$$

b) $$z = x^3y^2 (a - x - y) , \quad a \neq o .$$

Voir (2), n° 3.

$$\Phi = x^3y^2 .$$

Pas d'extremum en O, à cause de la présence du facteur x^3.

c) $$z = (y - x^2)^2 + y^4 - x^6 .$$

$$\Phi = (y - x^2)^2 .$$

Cas douteux. Il n'y a pas, comme SCHEEFFER [6] auquel l'exemple est emprunté, le faisait remarquer, d'extremum en O, puisque, le long de la parabole, $y = x^2, z$, au voisinage de O, devient négatif.

9. Soit l'équation

(14) $$z = \Phi (x, y) + \sum M_{\alpha\beta\gamma} x^\alpha y^\beta z^\gamma$$

[6] SCHEEFFER, *loc. cit.*, p. 575.

avec

$$\Phi = y^2 - (p+q)\, yx^2 + pqx^4 ,$$

et où les termes compris sous le signe de sommation $\sum$, relativement au polyèdre en O que caractérise Φ, sont de même nature que ceux de l'ensemble analogue considéré sous (4).

Comme on a

$$\Phi = (y - px^2)(y - qx^2)$$

et que les deux paraboles que représente ainsi l'équation $\Phi = o$, sont réelles, la surface (14) n'a pas d'extremum en O, lorsque les quantités réelles p et q sont distinctes.

Si $p = q$, il y a doute.

Si l'on a plus spécialement p et q positifs avec $p \neq q$, on a, en O, avec (14), l'exemple du type de singularité considérée par PEANO [7], exemple qui a fait époque.

Chaque section plane par Oz, présente un minimum en O, alors que la surface elle-même n'en présente pas.

On a maintenant de nombreux exemples de faits analogues. La surface de HEDRICK [8], non analytique en O, vaut, à ce propos, la peine d'être signalée.

10. Nous ferons ici, par le moyen de la surface indicatrice (J), telle qu'elle a été définie au n° 5, l'étude d'une surface au voisinage de O, O étant parabolique.

Considérons, pour cela, la surface (S) qui répond à l'équation

$$(15) \quad 8a^2 \mathrm{R} z = (2ax + y^2)^2 + \sum \mathrm{M}_{\alpha\beta\gamma} x^\alpha y^\beta z^\gamma , \qquad a > o , \mathrm{R} > o .$$

dans le second membre de laquelle les termes sous $\sum$ satisfont encore aux mêmes conditions que précédemment.

La surface indicatrice (J) de (S) en O, a par suite, pour équation

$$(16) \qquad 8a^2 \mathrm{R} z = (2ax + y^2)^2 .$$

Le point O est ainsi parabolique pour (S) et pour (J), le rayon de courbure principal non infini étant égal à R.

[7] GENOCCHI-PEANO. Calcolo differenziale, Torino, Bocca, 1884, p. XXIX.

[8] A peculiar example in minima of surfaces. *Annals of mathematics*, Second Series, Vol. 8, 1906-07.

C'est le rayon de la section par le plan $y = o$, section qui, dans ce plan des xz, a, d'après (16), *sensiblement* au voisinage de O, pour équation

$$(17) \qquad 2Rz = x^2 .$$

L'intersection de (S) en O, par le plan tangent $z = o$, sera d'autre part et toujours d'après (16), *sensiblement* au voisinage de O, la parabole comptée deux fois :

$$(18) \qquad (2ax + y^2)^2 = o .$$

La forme de (S) en O, est ainsi caractérisée, pour autant que cela se peut, par les deux sections (17) et (18) de (J), sans que toutefois l'on puisse dire, le premier membre de (18) étant un carré parfait, si (S) en O, traverse ou non son plan tangent.

A vrai dire, l'équation (15), suivant ce que seront les termes sous $\sum$, sera celle d'un tore, d'un tore dont l'axe de symétrie, parallèle à Oz, sera situé à la distance a du centre du cercle générateur, lequel sera de rayon R.

Le point O sera un point du parallèle inférieur, l'axe Ox, tangent au méridien et dirigé vers l'extérieur, l'axe Oy, tangent au parallèle.

Dans ces conditions, en O, le méridien répondra à l'équation

$$x^2 + z^2 - 2Rz = o ,$$

le parallèle à l'équation

$$x^2 + y^2 + 2ax = o .$$

Par comparaison de ces deux dernières équations avec (17) et (18), on voit que l'approximation obtenue par le moyen de la surface indicatrice (J) est meilleure que celle dont généralement, on se contente en pareil cas.

11. Nombreux sont les travaux échelonnés depuis Peano jusqu'à aujourd'hui, concernant l'immense variété de points réguliers qui viennent d'être considérés. La liste du début, incomplète d'ailleurs, en fait foi.

Staeckel, *loc. cit.*, *a*), a fait construire un modèle relatif à l'un d'eux. En géométrie, les surfaces minima ont fait ap-

paraître ces sortes de points réguliers. Pas plus que des points d'inflexion sur une courbe plane, on ne peut en faire abstraction.

Par le polyèdre et la surface indicatrice qui s'y rattache, on domine, en une certaine mesure, tous les points réguliers. Le polyèdre fournit, de leurs voisinages, l'approximation première la plus naturelle.

Son usage, à cause de cela, s'étend bien au delà des applications qui viennent d'en être faites.

SALMON, en 1848 déjà, rapprochait l'un de l'autre, le point parabolique d'une surface et le point d'inflexion d'une courbe plane, en montrant que le plan tangent au premier devait être compté pour double. Pareilles évaluations, dans les innombrables cas particuliers qui se rencontrent, peuvent être nécessaires. L'introduction du polyèdre, souvent, les facilitera.

D'une manière générale, le polyèdre aplanit l'étude des transformés de n'importe quel point régulier ou singulier. Mais, ceci suppose la connaissance, maintenant rigoureusement établie, de ces derniers, par le moyen du polyèdre.

On peut se demander également si, par son moyen, il ne serait pas possible de constituer, pour les extrema des fonctions de trois ou d'un plus grand nombre de variables indépendantes, des critères de quelque portée.

En un mot, il semble que, par le concours du polyèdre, on soit à même de parvenir à d'intéressants résultats.

Lausanne, le 18 janvier 1937.