

**Zeitschrift:** Bulletin de la Société Vaudoise des Sciences Naturelles  
**Herausgeber:** Société Vaudoise des Sciences Naturelles  
**Band:** 55 (1923-1925)  
**Heft:** 213

**Artikel:** Sur l'intégrale  
**Autor:** Vaney, Félix  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-271280>

#### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

#### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

#### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 18.02.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

Sur l'intégrale  $I_n = \int x^n e^{x^2} dx$ ,

PAR

FÉLIX VANEY

1. — Dans un travail précédent <sup>1</sup>, j'ai étudié l'intégrale :

(1) 
$$I_n = \int x^n e^{ax^2 + bx} dx,$$

pour  $n$  entier positif et  $a, b$  nombres réels,  $a$  n'étant pas nul. Il m'a paru intéressant d'examiner spécialement le cas particulier :

$$I_n = \int x^n e^{x^2} dx,$$

où  $a = 1$  et  $b = 0$ , en empruntant une méthode due à Hermite <sup>2</sup>.2. — En partant de l'identité, pour  $n$  entier positif,

$$\frac{d}{dx} \left[ x^{n-1} e^{x^2} \right] = 2 x^n e^{x^2} + (n-1) x^{n-2} e^{x^2},$$

puis en multipliant par  $dx$  et en intégrant, il vient :

$$x^{n-1} e^{x^2} = 2 \int x^n e^{x^2} dx + (n-1) \int x^{n-2} e^{x^2} dx,$$

qui fournit la formule de récurrence :

(2) 
$$I_n = \frac{x^{n-1}}{2} e^{x^2} - \frac{n-1}{2} I_{n-2}.$$

Donnons successivement à  $n$  les valeurs 0, 1, 2, etc., en séparant les résultats pour  $n$  impair et  $n$  pair :

$$n = 1 : I_1 = \frac{1}{2} e^{x^2} ;$$

$$n = 3 : I_3 = \frac{1}{2} (x^2 - 1) e^{x^2} ;$$

$$n = 5 : I_5 = \left( \frac{x^4}{2} - x^2 + 1 \right) e^{x^2} ;$$

<sup>1</sup> Bulletin des sciences naturelles, 1924.<sup>2</sup> Œuvres. Tome II, p. 481. Sur l'intégrale  $\int \frac{x^m dx}{\sqrt{1-x^2}}$ .

$$n = 7 : I_7 = 3 \left( \frac{x^6}{3!} - \frac{x^4}{2!} + x^2 - 1 \right) e^{x^2}.$$

$$n = 2 : I_2 = \frac{x}{2} e^{x^2} - \frac{1}{2} I_0;$$

$$n = 4 : I_4 = \left( \frac{1}{2} x^3 - \frac{3}{4} x \right) e^{x^2} + \frac{3}{4} I_0;$$

$$n = 6 : I_6 = \left( \frac{1}{2} x^5 - \frac{5}{4} x^3 + \frac{3.5}{8} x \right) e^{x^2} - \frac{3.5}{8} I_0;$$

$$n = 8 : I_8 = \left( \frac{x^7}{2} - \frac{7}{4} x^5 + \frac{7.5}{8} x^3 - \frac{7.5.3}{16} x \right) e^{x^2} + \frac{3.5.7}{16} I_0.$$

Il résulte de la formule de récurrence (2) que l'intégrale  $I_n$  présente deux cas bien distincts, suivant que  $n$  est impair ou pair.

Dans le cas de  $n = 2p + 1$ , il vient :

$$(3) \quad I_{2p+1} = P_{2p} e^{x^2}$$

où  $P_{2p}$  désigne un polynome en  $x$  de degré  $2p$ ; le produit  $e^{-x^2} I_{2p+1}$  est donc entièrement rationnel.

Pour  $n = 2p$ , nous avons

$$(4) \quad I_{2p} = P_{2p-1} e^{x^2} + A_p \int e^{x^2} dx.$$

où  $P_{2p-1}$  désigne un nouveau polynome de degré  $2p - 1$  et où  $A_p$  est une constante.

Je cherche à déterminer les polynomes  $P_{2p}$  et  $P_{2p-1}$  ainsi que quelques-unes de leurs propriétés.

---

3. — Dans le cas de  $n$  impair, l'intégrale  $I_{2p+1}$  se calcule facilement par la substitution  $x^2 = z$  et au moyen du procédé de l'intégration par parties ; il vient :

$$(5) \quad I_{2p+1} = \frac{p!}{2} \left[ \frac{x^{2p}}{p!} - \frac{x^{2p-2}}{(p-1)!} + \dots + (-1)^{p-1} \frac{x^2}{1!} + (-1)^p \right] e^{x^2}.$$

Afin de mieux mettre en évidence la nature de ce polynome  $P_{2p}$ , je puis poser pour obtenir  $P_{2p}$  :

$$(6) \quad \int_0^x x^{2p+1} e^{x^2} dx = P_{2p} e^{x^2} - C,$$

où  $C$  est une constante ; on en déduit :

$$P_{2p} = C e^{-x^2} + e^{-x^2} \int_0^x x^{2p+1} e^{x^2} dx.$$

Or, si l'on développe chacun des deux termes de cette somme

suivant les puissances ascendantes de la variable, le premier terme donnera la série infinie suivante :

$$(7) \quad Ce^{-x^2} = C \left( 1 - \frac{x^2}{1!} + \frac{x^4}{2!} - \frac{x^6}{3!} + \dots + (-1)^p \frac{x^{2p}}{p!} + \dots \right);$$

quant au second terme, il donnera aussi une série infinie, mais qui commence par  $x^{2p} + 2$ . Comme  $P_{2p}$  est un polynôme de degré  $2p$ , il en résulte que l'effet du second terme doit être de détruire tous les termes de la série  $Ce^{-x^2}$ , venant après la puissance  $x^{2p}$ ; on en déduit la proposition suivante :

I. — Dans la relation (3), le polynôme  $P_{2p}$  de degré  $2p$  est formé, à un facteur constant près, des premiers termes du développement de  $e^{-x^2}$ , jusqu'au terme en  $x^{2p}$ , suivant les puissances ascendantes de la variable.

La constante  $C$  se détermine par comparaison des développements (5) et (7); il vient :

$$C = (-1)^p \frac{p!}{2}.$$

Remplaçons maintenant dans la formule de récurrence (2)  $n$  par  $2p + 1$ , puis écrivons pour  $I$  son expression (3), nous obtenons ainsi la formule de récurrence entre deux polynômes consécutifs :

$$(8) \quad P_{2p} + p P_{2p-2} = \frac{x^{2p}}{2}.$$

En outre, si nous dérivons deux fois de suite l'équation (6), ce qui donne :

$$x^{2p+1} = \frac{d P_{2p}}{dx} + 2x P_{2p},$$

et

$$(2p+1)x^{2p} = \frac{d^2 P_{2p}}{dx^2} + 2 P_{2p} + 2x \frac{d P_{2p}}{dx};$$

puis si nous éliminons le terme indépendant de  $P_{2p}$  et de ses dérivées, nous trouvons l'équation différentielle linéaire du second ordre sans second membre :

$$(9) \quad x \frac{d^2 P}{dx^2} + (2x^2 - 2p - 1) \frac{d P}{dx} - 4px P = 0.$$

Or cette équation est aussi vérifiée en posant  $P = e^{-x^2}$ ; d'où la conclusion :

II. — Si l'on partage d'une manière quelconque le développement ordonné suivant les puissances croissantes de  $x$  de la série  $e^{-x^2}$ ,

les deux parties satisfont à la même équation différentielle du second ordre.

4. — Pour  $n$  pair, j'établis la formule de récurrence entre deux polynomes  $\mathcal{P}$  de la relation (4), puis je détermine le coefficient  $A_p$ .

Pour cela, faisons dans (2)  $n = 2p$  et portons l'expression (4) dans cette nouvelle relation, il vient :

$$\mathcal{P}_{2p-1} e^{x^2} + A_p I_0 = \frac{x^{2p-1}}{2} e^{x^2} - \frac{2p-1}{2} [\mathcal{P}_{2p-3} e^{x^2} + A_{p-1} I_0].$$

En identifiant les coefficients de  $e^{x^2}$ , nous avons la formule de récurrence entre deux polynomes  $P$  consécutifs :

$$(10) \quad \mathcal{P}_{2p-1} + \frac{2p-1}{2} \mathcal{P}_{2p-3} = \frac{x^{2p-1}}{2},$$

et en comparant les coefficients de  $I_0$ , nous trouvons entre deux constantes  $A$  la relation suivante :

$$(11) \quad A_p = -\frac{2p-1}{2} A_{p-1}.$$

Posons  $A_0 = 1$  ; nous aurons successivement :

$$A_1 = -\frac{1}{2}; \quad A_2 = -\frac{3}{2} A_1, \text{ etc.}$$

$$(12) \quad \text{et } A_p = (-1)^p \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{5}{2} \cdots \frac{2p-1}{2} = (-1)^p \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2p-1)}{2^p}.$$

Pour déterminer le polynome  $\mathcal{P}_{2p-1}$ , je tire de la relation (4) :

$$(13) \quad \mathcal{P}_{2p-1} = -A_p e^{-x^2} \int e^{x^2} dx + e^{-x^2} \int x^{2p} e^{x^2} dx$$

et, opérant comme dans le cas de  $n$  impair, j'obtiens la conclusion :

III. — Dans la relation (4), le polynome  $\mathcal{P}_{2p-1}$  est formé, à un facteur constant près, des premiers termes du développement de la fonction transcendante  $e^{-x^2} \int e^{x^2} dx$ , jusqu'au terme en  $x^{2p-1}$ , suivant les puissances ascendantes de la variable.

Or ce développement s'obtient immédiatement au moyen de l'équation différentielle :

$$(14) \quad \frac{dy}{dx} + 2xy = 1,$$

qui est vérifiée par la fonction  $y = e^{-x^2} \int_0^x e^{x^2} dx$ .

Posons :

$$y = u_0 x + u_1 x^3 + \dots + u_p x^{2p+1} + \dots,$$

nous trouvons facilement :

$$u_0 = 1 \quad \text{et} \quad (2p+1) u_p + 2 u_{p-1} = 0;$$

ce qui fournit :

$$u_p = (-1)^p \frac{2^p}{3.5\dots(2p+1)}$$

et, par suite, le développement suivant :

(15)

$$e^{-x^2} \int_0^x e^{x^2} dx = x - \frac{2}{3} x^3 + \frac{2^2}{3.5} x^5 - \dots + (-1)^p \frac{2^p}{3.5\dots(2p+1)} x^{2p+1} + \dots$$

Portons dans (13) le développement (15) ainsi que la valeur de  $A_p$  donnée dans (12), nous obtenons l'expression générale du polynôme  $\mathcal{P}$  :

$$(16) \quad \mathcal{P}_{2p-1} = (-1)^{p+1} \frac{1.3.5\dots(2p-1)}{2^p} \left[ x - \frac{2}{3} x^3 + \frac{2^2}{3.5} x^5 - \dots + (-1)^{p-1} \frac{2^{p-1}}{3.5\dots(2p+1)} x^{2p-1} \right].$$

qui satisfait à l'équation différentielle du second ordre avec second membre :

$$(17) \quad x \frac{d^2 \mathcal{P}}{dx^2} + 2(x^2 - p) \frac{d \mathcal{P}}{dx} - 2(2p-1)x\mathcal{P} = (-1)^p \frac{1.3.5\dots(2p-1)2p}{2^p}.$$

Lausanne, août 1923.