Zeitschrift: Bulletin de la Société Vaudoise des Sciences Naturelles

Herausgeber: Société Vaudoise des Sciences Naturelles

Band: 55 (1923-1925)

Heft: 213

Artikel: Sur l'intégrale

Autor: Vaney, Félix

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-271280

Sur l'intégrale $I_n = \int x^n e^{x^2} dx$,

PAR

FÉLIX VANEY

1. — Dans un travail précédent [1], j'ai étudié l'intégrale :

$$I_n = \int x^n e^{ax^2 + bx} dx, \tag{1}$$

pour n entier positif et a, b nombres réels, a n'étant pas nul. Il m'a paru intéressant d'examiner spécialement le cas particulier :

$$I_n = \int x^n e^{x^2} dx,$$

où $a = 1$ et $b = 0$, en empruntant une méthode due à Hermite [2].

---

2. — En partant de l'identité, pour n entier positif,

$$\frac{d}{dx}\left[x^{n-1} e^{x^2}\right] = 2\, x^n e^{x^2} + (n - 1)\, x^{n-2} e^{x^2},$$

puis en multipliant par dx et en intégrant, il vient :

$$x^{n-1} e^{x^2} = 2 \int x^n e^{x^2} dx + (n - 1) \int x^{n-2} e^{x^2} dx,$$

qui fournit la formule de récurrence :

$$I_n = \frac{x^{n-1}}{2} e^{x^2} - \frac{n-1}{2} I_{n-2}. \tag{2}$$

Donnons successivement à n les valeurs 0, 1, 2, etc., en séparant les résultats pour n impair et n pair :

$$n = 1 : I_1 = \frac{1}{2} e^{x^2};$$

$$n = 3 : I_3 = \frac{1}{2} (x^2 - 1)\, e^{x^2};$$

$$n = 5 : I_5 = \left(\frac{x^4}{2} - x^2 + 1\right) e^{x^2};$$

[1] Bulletin des sciences naturelles, 1924.

[2] Œuvres. Tome II, p. 481. Sur l'intégrale $\int \frac{x^m dx}{\sqrt{1-x^2}}$.

$$n = 7 : \mathrm{I}_7 = 3\left(\frac{x^6}{3!} - \frac{x^4}{2!} + x^2 - 1\right) e^{x^2}.$$

$$n = 2 : \mathrm{I}_2 = \frac{x}{2} e^{x^2} - \frac{1}{2} \mathrm{I}_0 ;$$

$$n = 4 : \mathrm{I}_4 = \left(\frac{1}{2} x^3 - \frac{3}{4} x\right) e^{x^2} + \frac{3}{4} \mathrm{I}_0 ;$$

$$n = 6 : \mathrm{I}_6 = \left(\frac{1}{2} x^5 - \frac{5}{4} x^3 + \frac{3.5}{8} x\right) e^{x^2} - \frac{3.5}{8} \mathrm{I}_0 ;$$

$$n = 8 : \mathrm{I}_8 = \left(\frac{x^7}{2} - \frac{7}{4} x^5 + \frac{7.5}{8} x^3 - \frac{7.5.3}{16} x\right) e^{x^2} + \frac{3.5.7}{16} \mathrm{I}_0.$$

Il résulte de la formule de récurrence (2) que l'intégrale I_n présente deux cas bien distincts, suivant que n est impair ou pair.

Dans le cas de $n = 2p + 1$, il vient :

$$\mathrm{I}_{2p+1} = \mathrm{P}_{2p}\, e^{x^2} \tag{3}$$

où P_{2p} désigne un polynome en x de degré $2p$; le produit $e^{-x^2}\mathrm{I}_{2p+1}$ est donc entièrement rationnel.

Pour $n = 2p$, nous avons

$$\mathrm{I}_{2p} = \mathcal{P}_{2p-1}\, e^{x^2} + \mathrm{A}_p \int e^{x^2}\, dx. \tag{4}$$

où $\mathcal{P}_{2p-1}$ désigne un nouveau polynome de degré $2p - 1$ et où A_p est une constante.

Je cherche à déterminer les polynomes P_{2p} et $\mathcal{P}_{2p-1}$ ainsi que quelques-unes de leurs propriétés.

---

3. — Dans le cas de n impair, l'intégrale I_{2p+1} se calcule facilement par la substitution $x^2 = z$ et au moyen du procédé de l'intégration par parties ; il vient :

$$\mathrm{I}_{2p+1} = \frac{p!}{2}\left[\frac{x^{2p}}{p!} - \frac{x^{2p-2}}{(p-1)!} + \ldots.. + (-1)^{p-1}\frac{x^2}{1!} + (-1)^p\right] e^{x^2}. \tag{5}$$

Afin de mieux mettre en évidence la nature de ce polynome P_{2p}, je puis poser pour obtenir P_{2p} :

$$\int_0^x x^{2p+1} e^{x^2}\, dx = \mathrm{P}_{2p}\, e^{x^2} - \mathrm{C}, \tag{6}$$

où C est une constante ; on en déduit :

$$\mathrm{P}_{2p} = \mathrm{C}e^{-x^2} + e^{-x^2}\int_0^x x^{2p+1} e^{x^2}\, dx.$$

Or, si l'on développe chacun des deux termes de cette somme suivant les puissances ascendantes de la variable, le premier terme donnera la série infinie suivante :

$$(7) \quad Ce^{-x^2} = C\left(1 - \frac{x^2}{1!} + \frac{x^4}{2!} - \frac{x^6}{3!} + \ldots + (-1)^p \frac{x^{2p}}{p!} + \ldots\right);$$

quant au second terme, il donnera aussi une série infinie, mais qui commence par x^{2p+2}. Comme P_{2p} est un polynome de degré $2p$, il en résulte que l'effet du second terme doit être de détruire tous les termes de la série Ce^{-x^2}, venant après la puissance x^{2p} ; on en déduit la proposition suivante :

I. — Dans la relation (3), le polynome P_{2p} de degré $2p$ est formé, à un facteur constant près, des premiers termes du développement de e^{-x^2}, jusqu'au terme en x^{2p}, suivant les puissances ascendantes de la variable.

La constante C se détermine par comparaison des développements (5) et (7) ; il vient :

$$C = (-1)^p \frac{p!}{2}.$$

Remplaçons maintenant dans la formule de récurrence (2) n par $2p + 1$, puis écrivons pour I son expression (3), nous obtenons ainsi la formule de récurrence entre deux polynomes consécutifs :

$$(8) \qquad P_{2p} + p\,P_{2p-2} = \frac{x^{2p}}{2}.$$

En outre, si nous dérivons deux fois de suite l'équation (6), ce qui donne :

$$x^{2p+1} = \frac{d\,P_{2p}}{dx} + 2x\,P_{2p},$$

et

$$(2p + 1)\,x^{2p} = \frac{d^2 P_{2p}}{dx^2} + 2\,P_{2p} + 2\,x\frac{d\,P_{2p}}{dx};$$

puis si nous éliminons le terme indépendant de P_{2p} et de ses dérivées, nous trouvons l'équation différentielle linéaire du second ordre sans second membre :

$$(9) \qquad x\frac{d^2 P}{dx^2} + (2\,x^2 - 2p - 1)\frac{d\,P}{dx} - 4\,px\,P = 0.$$

Or cette équation est aussi vérifiée en posant $P = e^{-x^2}$; d'où la conclusion :

II. — Si l'on partage d'une manière quelconque le développement ordonné suivant les puissances croissantes de x de la série e^{-x^2}, les deux parties satisfont à la même équation différentielle du second ordre.

---

4. — Pour n pair, j'établis la formule de récurrence entre deux polynomes $\mathcal{P}$ de la relation (4), puis je détermine le coefficient A_p.

Pour cela, faisons dans (2) $n = 2p$ et portons l'expression (4) dans cette nouvelle relation, il vient :

$$\mathcal{P}_{2p-1}\, e^{x^2} + A_p\, I_0 = \frac{x^{2p-1}}{2}\, e^{x^2} - \frac{2p-1}{2}\left[\mathcal{P}_{2p-3}\, e^{x^2} + A_{p-1}\, I_0\right].$$

En identifiant les coefficients de e^{x^2}, nous avons la formule de récurrence entre deux polynomes P consécutifs :

$$(10) \qquad \mathcal{P}_{2p-1} + \frac{2p-1}{2}\,\mathcal{P}_{2p-3} = \frac{x^{2p-1}}{2},$$

et en comparant les coefficients de I_0, nous trouvons entre deux constantes A la relation suivante :

$$(11) \qquad A_p = -\frac{2p-1}{2}\, A_{p-1}.$$

Posons $A_0 = 1$; nous aurons successivement :

$$A_1 = -\frac{1}{2}\ ;\ A_2 = -\frac{3}{2}\, A_1,\ \text{etc.}$$

$$(12) \quad \text{et} \quad A_p = (-1)^p\, \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{5}{2}\cdots\frac{2p-1}{2} = (-1)^p\, \frac{1.3.5...(2p-1)}{2^p}.$$

Pour déterminer le polynome $\mathcal{P}_{2p-1}$, je tire de la relation (4) :

$$(13) \qquad \mathcal{P}_{2p-1} = -A_p\, e^{-x^2}\int e^{x^2}\, dx + e^{-x^2}\int x^{2p}\, e^{x^2}\, dx$$

et, opérant comme dans le cas de n impair, j'obtiens la conclusion :

III. — Dans la relation (4), le polynome $\mathcal{P}_{2p-1}$ est formé, à un facteur constant près, des premiers termes du développement de la fonction transcendante $e^{-x^2}\int e^{x^2}\, dx$, jusqu'au terme en x^{2p-1}, suivant les puissances ascendantes de la variable.

Or ce développement s'obtient immédiatement au moyen de l'équation différentielle :

$$(14) \qquad \frac{dy}{dx} + 2\, xy = 1,$$

qui est vérifiée par la fonction $y = e^{-x^2}\int_0^x e^{x^2}\, dx.$

Posons :

$$y = u_0 x + u_1 x^3 + \ldots\ldots \qquad + u_p x^{2p+1} + \ldots,$$

nous trouvons facilement :

$$u_0 = 1 \qquad \text{et} \qquad (2p+1)\, u_p + 2\, u_{p-1} = 0\,;$$

ce qui fournit :

$$u_p = (-1)^p \frac{2^p}{3.5\ldots..(2p+1)}$$

et, par suite, le développement suivant :

(15)

$$e^{-x^2}\int_0^x e^{x^2}dx = x - \frac{2}{3}x^3 + \frac{2^2}{3{,}5}x^5 - \ldots. + (-1)^p \frac{2^p}{3.5\ldots(2p+1}x^{2p+1} + \ldots$$

Portons dans (13) le développement (15) ainsi que la valeur de A_p donnée dans (12), nous obtenons l'expression générale du polynome $\mathcal{P}$:

(16) $$\mathcal{P}_{2p-1} = (-1)^{p+1}\frac{1.3.5\ldots.(2p-1)}{2^p}\left[x - \frac{2}{3}x^3 + \frac{2^2}{3.5}x^5 - \ldots.. + (-1)^{p-1}\frac{2^{p-1}}{3.5\ldots(2p+1)}x^{2p-1}\right].$$

qui satisfait à l'équation différentielle du second ordre avec second membre :

(17) $$x\frac{d^2\mathcal{P}}{dx^2} + 2(x^2 - p)\frac{d\mathcal{P}}{dx} - 2(2p-1)x\mathcal{P} = (-1)^p\frac{1.3.5\ldots(2p-1)2p}{2^p}.$$

Lausanne, août 1923.