

**Zeitschrift:** Bulletin de la Société Vaudoise des Sciences Naturelles  
**Herausgeber:** Société Vaudoise des Sciences Naturelles  
**Band:** 55 (1923-1925)  
**Heft:** 213

**Artikel:** Sur l'intégral  
**Autor:** Vaney, Félix  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-271279>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 14.04.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

## Sur l'intégrale $\int x^n e^{ax^2+bx} dx$

PAR

FÉLIX VANEY

1. — Etant donnée l'intégrale

$$(1) \quad I_n = \int x^n e^{ax^2+bx} dx,$$

je me propose de trouver quelle relation <sup>1</sup> doit exister entre l'exposant  $n$ , nombre entier positif, et les coefficients  $a$  et  $b$ , nombres réels,  $a$  n'étant pas nul, pour que cette intégrale  $I_n$  soit le produit d'une fonction rationnelle par la transcendante  $e^{ax^2+bx}$ . Je montrerai ensuite quels sont les rapports étroits qui lient cette relation aux polynomes d'Hermite.

\* \* \*

2. — J'établirai d'abord une formule de réduction pour  $I_n$ .  
De l'identité

$$\frac{d}{dx} \left[ x^p e^{ax^2+bx} \right] = x^p (2ax + b) e^{ax^2+bx} + px^{p-1} e^{ax^2+bx},$$

nous tirons, après multiplication par  $dx$  et intégration,

$$x^p e^{ax^2+bx} = 2a \int x^{p+1} e^{ax^2+bx} dx + b \int x^p e^{ax^2+bx} dx + p \int x^{p-1} e^{ax^2+bx} dx,$$

relation qui fournit la formule de récurrence suivante entre trois intégrales  $I$  consécutives :

$$(2) \quad I_{p+1} = \frac{x^p}{2a} e^{ax^2+bx} - \frac{b}{2a} I_p - \frac{p}{2a} I_{p-1}.$$

Nous obtenons successivement,

pour  $p = 0$  : 
$$I_1 = \frac{1}{2a} e^{ax^2+bx} - \frac{b}{2a} I_0 ;$$

pour  $p = 1$ , après avoir substitué la valeur de  $I_1$  :

$$I_2 = \left( \frac{x}{2a} - \frac{b}{4a^2} \right) e^{ax^2+bx} + \left( \frac{b^2}{4a^2} - \frac{1}{2a} \right) I_0 ;$$

<sup>1</sup> Dingeldey a résolu un problème analogue pour  $\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{ax^2+2bx+c}}$ . (Jahresbericht der deutschen Mathematiker-Vereinigung, 1913. Bd. 22, p. 257.)

pour  $p = 2$  :

$$I_3 = \left( \frac{x^2}{2a} - \frac{bx}{4a^2} + \frac{b^2}{8a^3} - \frac{2}{4a^2} \right) e^{ax^2 + bx} - \left( \frac{b^3}{8a^3} - \frac{3b}{4a^2} \right) I_0 ;$$

pour  $p = n$ , entier positif :

$$(3) \quad I_n = (A_0 x^{n-1} + A_1 x^{n-2} + \dots + A_{n-2} x + A_{n-1}) e^{ax^2 + bx} + A_n \int e^{ax^2 + bx} dx.$$

\* \* \*

3. — De l'expression (3) de  $I_n$ , on va tirer celle de  $A_n$  sous forme de déterminant, puis la relation cherchée entre les coefficients  $a$  et  $b$  et l'exposant  $n$ .

Les coefficients  $A_i$  ( $i = 0, 1, 2, \dots, n$ ) s'obtiennent en dérivant d'abord (3) par rapport à  $x$ , puis en divisant l'équation trouvée par  $e^{ax^2 + bx}$ , il vient alors :

$$x^n = (A_0 x^{n-1} + A_1 x^{n-2} + \dots + A_{n-2} x + A_{n-1}) (2ax + b) + [A_0(n-1)x^{n-2} + A_1(n-2)x^{n-3} + \dots + A_{n-2}] + A_n.$$

Cette relation est valable quelle que soit la valeur de la variable  $x$  ; les  $(n + 1)$  coefficients  $A_0, A_1, A_2, \dots, A_n$  sont donc liés par  $(n + 1)$  équations linéaires qui les déterminent.

Etablissons ces relations pour le cas particulier  $n = 5$  ; la relation (3) devient :

$$I_5 = \int x^5 e^{ax^2 + bx} dx = (A_0 x^4 + A_1 x^3 + A_2 x^2 + A_3 x + A_4) e^{ax^2 + bx} + A_5 \int e^{ax^2 + bx} dx.$$

Les 6 coefficients  $A_i$  ( $i = 0, 1, 2, 3, 4, 5$ ) sont liés par les 6 relations linéaires :

$$(4) \quad \begin{cases} 1 = 2aA_0, \\ 0 = bA_0 + 2aA_1, \\ 0 = 4A_0 + bA_1 + 2aA_2, \\ 0 = 3A_1 + bA_2 + 2aA_3, \\ 0 = 2A_2 + bA_3 + 2aA_4, \\ 0 = A_3 + bA_4 + A_5, \end{cases}$$

qui fournissent le coefficient suivant  $A_5$  sous la forme du déterminant suivant :

$$(5) \quad (2a)^5 A_5 = - \begin{vmatrix} b & 2a & 0 & 0 & 0 \\ 4 & b & 2a & 0 & 0 \\ 0 & 3 & b & 2a & 0 \\ 0 & 0 & 2 & b & 2a \\ 0 & 0 & 0 & 1 & b \end{vmatrix}$$

Par analogie, il est facile d'exprimer  $A_n$  au moyen du déterminant  $D_n$ . Si  $a$  est différent de zéro, la condition pour que  $e^{-ax^2-bx} I_n$  soit entièrement rationnel est que le déterminant  $D_n$  soit nul.

En calculant  $D_n$  au moyen des mineurs de la première ligne ou de la première colonne, nous avons la relation de récurrence entre trois déterminants consécutifs

$$(6) \quad D_n = -bD_{n-1} - 2(n-1)aD_{n-2} .$$

Comme  $D_0 = 1$  et  $D_1 = -b$ , nous en tirons :

$$(7) \quad \begin{cases} D_2 = b^2 - 2a , \\ D_3 = -b^3 + 6ab . \end{cases}$$

Le déterminant  $D_{2p+1}$  s'annulant pour  $b = 0$ , nous en déduisons :

I. — Le produit  $e^{-ax^2} I_n$  est rationnel si  $n$  est un entier positif impair ; l'intégrale  $I_n$  se calcule alors immédiatement au moyen de la substitution  $ax^2 = z$ .

De plus, pour  $n$  pair,  $D_n$  contient seulement des puissances paires de  $b$ , tandis que, pour  $n$  impair,  $D_n$  n'a que des puissances impaires de  $b$  ; d'où la proposition suivante :

II. — Si le produit  $e^{-ax^2-bx} I_n$  est entièrement rationnel, celui que l'on obtient en remplaçant  $b$  par  $-b$  l'est aussi.

En outre, d'après les relations (6) et (7), le déterminant  $D_n$  pour  $n$  pair est homogène en  $b^2$  et  $a$ , tandis que, pour  $n$  impair,  $\frac{D_n}{b}$  est homogène en  $b^2$  et  $a$ . La relation  $D_n = 0$  peut donc être considérée comme une équation algébrique du  $p^{\text{ième}}$  degré si  $n = 2p$  ou si  $n = 2p + 1$ , où  $p$  est un entier positif ou nul ; l'inconnue est alors formée par le quotient  $\frac{b^2}{a}$  ou l'inverse  $\frac{a}{b^2}$ . Il s'ensuit la nouvelle proposition :

III. — Si le produit  $e^{-ax^2-bx} I_n$  est entièrement rationnel pour les valeurs particulières  $\alpha$  et  $\beta$  de  $a$  et de  $b$ , dont le rapport  $\frac{\beta^2}{\alpha} = k$ , le produit considéré reste encore rationnel pour toutes les valeurs arbitraires attribuées à  $a$  et à  $b$  donnant lieu au même rapport  $k$ . Ce nombre  $k$  est racine d'une équation algébrique du  $p^{\text{ième}}$  degré, telle que  $2p = n$  ou  $2p + 1 = n$ .

4. — Examinons maintenant quelles sont les propriétés de ces équations du  $p^{\text{ième}}$  degré et en particulier si toutes leurs racines sont réelles.

Des déterminants  $D_n$ , on déduit facilement les polynômes d'Hermite <sup>1</sup> qui proviennent du développement suivant les puissances croissantes de  $h$  de la fonction  $e^{-h^2 + 2hz}$ ; le coefficient de  $\frac{h^m}{m!}$  dans ce développement est le polynôme d'Hermite du  $m^{\text{ième}}$  degré que l'on désigne ordinairement par  $U_m(z)$  et qui a pour expression :

$$(8) \quad (-1)^m U_m(z) = (2z)^m - \frac{m(m-1)}{1!} (2z)^{m-2} + \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{2!} (2z)^{m-4} - \dots$$

Le polynôme  $U_m(z)$  ne contient que des puissances paires ou impaires de  $z$  suivant que  $m$  est pair ou impair. Trois polynômes consécutifs sont liés par la formule de récurrence

$$(9) \quad U_m(z) = -2z U_{m-1}(z) - 2(m-1) U_{m-2}(z),$$

qui est analogue à la relation (6).

Afin de préciser l'analogie entre (6) et (9), nous distinguerons deux cas :

*Premier cas.* — Pour  $n = 2p$ , la relation (6) devient :

$$(10) \quad D_{2p} = -b D_{2p-1} - 2(2p-1) a D_{2p-2}.$$

Les déterminants  $D_{2p}$  et  $D_{2p-2}$  peuvent être considérés comme des polynômes homogènes en  $b^2$  et  $a$  dont les degrés respectifs sont  $p$  et  $p-1$ , tandis que  $D_{2p-1}$  est le produit par  $b$  d'un polynôme homogène en  $b^2$  et  $a$  de degré  $p-1$ .

Après division par  $a^p$  et au moyen de la substitution  $\frac{b^2}{a} = 4z^2$ , la relation (10) montre que  $D_{2p}$  se transforme en un polynôme d'Hermite de degré  $2p$ .

En effet,  $D_2 = b^2 - 2a$  devient  $U_2(z) = 4z^2 - 2$ ,

$D_3 = b(b^2 - 6a)$  devient  $U_3(z) = -2z(4z^2 - 6)$

et  $D_4 = -b D_3 - 2 \cdot 3a D_2 = -b^2(b^2 - 6a) - 2 \cdot 3a(b^2 - 2a)$

devient  $U_4(z) = 4z^2(4z^2 - 6) - 6(4z^2 - 2) = 16z^4 - 48z^2 + 12$ .

*Deuxième cas.* — Pour  $n = 2p + 1$ , la relation (6) s'écrit :

$$(11) \quad D_{2p+1} = -b D_{2p} - 4pa D_{2p-1}.$$

<sup>1</sup> Oeuvres. Tome II, p. 294.

Les déterminants  $D_{2p+1}$  et  $D_{2p-1}$  contenant chacun  $b$  comme facteur, la relation de récurrence, après division par  $b$ , devient homogène et de degré  $p$  en  $b^2$  et  $a$ . Divisons alors par  $a^p$  et posons  $\frac{b^2}{a} = 4z^2$ , la relation (11), ainsi modifiée, donne l'expression du polynome  $\frac{U_{2p+1}(z)}{2z}$ .

Nous pouvons donc énoncer la proposition suivante :

IV. — La condition  $D_n = 0$ , nécessaire et suffisante, pour que le produit  $e^{-ax^2-bx} I_n$  soit rationnel, peut être considérée, si  $a$  et  $b$  ne sont pas nuls, comme une équation dont l'inconnue est  $\frac{b^2}{a} = 4z^2$ . Si  $n$  est pair, cette équation est identique à  $U_n(z) = 0$ , et pour  $n$  impair,  $D_n$  devient  $\frac{U_n(z)}{2z}$ .

On sait d'ailleurs que  $U_m(z) = 0$  est une équation du  $m^{\text{ième}}$  degré ayant  $m$  racines réelles, différentes et opposées, comprises entre  $-\infty$  et  $+\infty$  ; pour  $m$  impair, une des racines est nulle.

Le rapport  $\frac{b^2}{a} = 4z^2$  étant essentiellement positif, le produit  $e^{-ax^2-bx} I_n$  ne peut devenir rationnel que si  $a$  est positif.

\* \* \*

5. — Voici pour les premières valeurs de  $n$  certaines valeurs des coefficients  $a$  et  $b$  pour lesquelles l'expression  $e^{-ax^2-bx} I_n$  est rationnelle.

Valeurs de $n$	Polynomes d'Hermite	Valeurs du rapport $4z^2 = \frac{b^2}{a}$	Expression du produit $e^{-ax^2-bx} I_n$ pour certaines valeurs de $a$ et de $b$
$n=1$	—	—	$b=0, e^{-ax^2} I_1 = \frac{1}{2a}$
$n=2$	$U_2(z) = 4z^2 - 2$	$\frac{b^2}{a} = 2$	$b=1, a=\frac{1}{2} \left\} e^{-\frac{x^2}{2}-x} I_2 = x-1$
$n=3$	$\frac{U_3(z)}{2z} = -4z^2 + 6$	$\frac{b^2}{a} = 6$	$b=1, a=\frac{1}{6} \left\} e^{-\frac{x^2}{6}-x} I_3 = 3x^2 - 9x + 9$
$n=4$	$U_4(z) = 16z^4 - 48z^2 + 12$	$\frac{b^2}{a} = 6 \pm 2\sqrt{6}$	—

6. — Déterminons les valeurs qu'il faut attribuer à  $a$  et à  $b$  pour que le déterminant  $D_n$  représente le polynome d'Hermite  $U_n(z)$ .

Le déterminant  $D_n$ , qui n'a comme éléments différents de zéro que ceux de la diagonale principale, ainsi que ceux des 2 parallèles placées de chaque côté de la diagonale principale, se nomme un continuant.

Il est possible de le modifier comme suit : prenons, par exemple, le continuant  $D_5$  et multiplions la première ligne par  $4!$ , la deuxième ligne par  $3!$ , la troisième ligne par  $2!$  et la quatrième ligne par  $1!$ ,  $D_5$  s'écrit alors :

$$1!2!3!4!D_5 = \begin{vmatrix} 4!b & 4!2a & 0 & 0 & 0 \\ 4! & 3!b & 3!2a & 0 & 0 \\ 0 & 3! & 2!b & 2!2a & 0 \\ 0 & 0 & 1! & 1!b & 1!2a \\ 0 & 0 & 0 & 1 & b \end{vmatrix}.$$

Divisons maintenant dans ce nouveau continuant la première colonne par  $4!$ , la deuxième colonne par  $3!$ , la troisième colonne par  $2!$ , la quatrième colonne par  $1!$ , il vient :

$$D_5 = \begin{vmatrix} b & 8a & 0 & 0 & 0 \\ 1 & b & 6a & 0 & 0 \\ 0 & 1 & b & 4a & 0 \\ 0 & 0 & 1 & b & 2a \\ 0 & 0 & 0 & 1 & b \end{vmatrix} \text{ ou } \begin{vmatrix} b & 2a & 0 & 0 & 0 \\ 1 & b & 4a & 0 & 0 \\ 0 & 1 & b & 6a & 0 \\ 0 & 0 & 1 & b & 8a \\ 0 & 0 & 0 & 1 & b \end{vmatrix}.$$

Cette propriété est générale pour tout continuant ; elle permet, sans changer la valeur de celui-ci, de remplacer chaque élément d'une parallèle à la diagonale principale par 1 à condition de remplacer chaque élément de l'autre parallèle à la diagonale par le produit des 2 éléments correspondants des 2 parallèles.

D'après les relations (6) et (9), il résulte que l'on peut passer du déterminant  $D_5$  à l'expression de  $U_5(z)$  en remplaçant  $a$  par 1 et  $b$  par  $2z$ .

$$U_5(z) = \begin{vmatrix} 2z & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2z & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2z & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2z & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2z \end{vmatrix} = -32z^5 + 160z^3 - 120z.$$

Si nous faisons  $a = 1$  et  $b = 2z$ , l'intégrale  $I_5$  s'écrit :

$$I_5 = \int x^5 e^{x^2+2zx} dx = e^{x^2+2zx} \theta_5(z, x) + \frac{1}{2^5} U_5(z) \int e^{x^2+2zx} dx,$$

où  $\theta_5(z, x)$  désigne un polynôme du quatrième degré en  $x$  et en  $z$ , et  $U_5(z)$  est le polynôme d'Hermite du cinquième degré en  $z$ ; ce qui s'étend immédiatement à  $I_n$ .

\* \* \*

7. — Laguerre (Oeuvres, tome I, p. 415) a étudié l'intégrale analogue suivante, pour  $n$  entier positif,

$$I_n = \int x^n e^{-\frac{x^2}{2}+zx} dx,$$

où  $a = -\frac{1}{2}$  et  $b = z$ .

Dans ce cas, le coefficient  $a$  étant négatif, il résulte de ce qui précède que le produit  $e^{\frac{x^2}{2}-zx} I_n$  ne peut jamais devenir rationnel; les coefficients de  $\int e^{-\frac{x^2}{2}+zx} dx$  sont donc tous des polynômes en  $z$  dont les racines sont toutes imaginaires.

Lausanne, août 1923.