Zeitschrift: Bulletin de la Société Vaudoise des Sciences Naturelles

Herausgeber: Société Vaudoise des Sciences Naturelles

Band: 55 (1923-1925)

Heft: 213

Artikel: Sur l'intégral

Autor: Vaney, Félix

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-271279

Sur l'intégrale $\int x^n e^{ax^2+bx} dx$

PAR

FÉLIX VANEY

1. — Etant donnée l'intégrale

$$I_n = \int x^n e^{ax^2+bx} dx, \tag{1}$$

je me propose de trouver quelle relation [1] doit exister entre l'exposant n, nombre entier positif, et les coefficients a et b, nombres réels, a n'étant pas nul, pour que cette intégrale I_n soit le produit d'une fonction rationnelle par la transcendante e^{ax^2+bx}. Je montrerai ensuite quels sont les rapports étroits qui lient cette relation aux polynomes d'Hermite.

* * *

2. — J'établirai d'abord une formule de réduction pour I_n. De l'identité

$$\frac{d}{dx}\left[x^p e^{ax^2+bx}\right] = x^p(2ax+b)e^{ax^2+bx} + px^{p-1}e^{ax^2+bx},$$

nous tirons, après multiplication par dx et intégration,

$$x^p e^{ax^2+bx} = 2a\int x^{p+1} e^{ax^2+bx} dx + b\int x^p e^{ax^2+bx} dx + p\int x^{p-1} e^{ax^2+bx} dx,$$

relation qui fournit la formule de récurrence suivante entre trois intégrales I consécutives :

$$I_{p+1} = \frac{x^p}{2a} e^{ax^2+bx} - \frac{b}{2a} I_p - \frac{p}{2a} I_{p-1}. \tag{2}$$

Nous obtenons successivement,

pour $p = 0$: $\quad I_1 = \frac{1}{2a} e^{ax^2+bx} - \frac{b}{2a} I_0$;

pour $p = 1$, après avoir substitué la valeur de I_1 :

$$I_2 = \left(\frac{x}{2a} - \frac{b}{4a^2}\right) e^{ax^2+bx} + \left(\frac{b^2}{4a^2} - \frac{1}{2a}\right) I_0 ;$$

[1] Dingeldey a résolu un problème analogue pour $\int \frac{x^n dx}{\sqrt{ax^2+2bx+c}}$. (Jahresbericht der deutschen Mathematiker-Vereinigung, 1913. Bd. 22, p. 257.)

pour $p = 2$:

$$\mathrm{I}_3 = \left(\frac{x^2}{2a} - \frac{bx}{4a^2} + \frac{b^2}{8a^3} - \frac{2}{4a^2}\right) e^{ax^2 + bx} - \left(\frac{b^3}{8a^3} - \frac{3b}{4a^2}\right) \mathrm{I}_0 \,;$$

pour $p = n$, entier positif :

(3)
$$\mathrm{I}_n = (\mathrm{A}_0 x^{n-1} + \mathrm{A}_1 x^{n-2} + \ldots + \mathrm{A}_{n-2} x + \mathrm{A}_{n-1}) e^{ax^2+bx} + \mathrm{A}_n \int e^{ax^2+bx} dx.$$

* * *

3. — De l'expression (3) de I_n, on va tirer celle de A_n sous forme de déterminant, puis la relation cherchée entre les coefficients a et b et l'exposant n.

Les coefficients A_i ($i = 0, 1, 2, \ldots, n$) s'obtiennent en dérivant d'abord (3) par rapport à x, puis en divisant l'équation trouvée par $e^{ax^2 + bx}$, il vient alors :

$$\begin{aligned} x^n = {} & (\mathrm{A}_0 x^{n-1} + \mathrm{A}_1 x^{n-2} + \ \ldots \ + \mathrm{A}_{n-2} x + \mathrm{A}_{n-1})\ (2ax + b) \\ & + [\mathrm{A}_0 (n-1) x^{n-2} + \mathrm{A}_1 (n-2) x^{n-3} + \ \ldots \ + \mathrm{A}_{n-2}] + \mathrm{A}_n. \end{aligned}$$

Cette relation est valable quelle que soit la valeur de la variable x ; les $(n+1)$ coefficients A_0, A_1, A_2, ... A_n sont donc liés par $(n+1)$ équations linéaires qui les déterminent.

Etablissons ces relations pour le cas particulier $n = 5$; la relation (3) devient :

$$\begin{aligned} \mathrm{I}_5 &= \int x^5 e^{ax^2 + bx} dx \\ &= (\mathrm{A}_0 x^4 + \mathrm{A}_1 x^3 + \mathrm{A}_2 x^2 + \mathrm{A}_3 x + \mathrm{A}_4) e^{ax^2 + bx} + \mathrm{A}_5 \int e^{ax^2 + bx} dx. \end{aligned}$$

Les 6 coefficients A_i ($i = 0, 1, 2, 3, 4, 5$) sont liés par les 6 relations linéaires :

$$(4) \quad \left\{ \begin{array}{lllllll} 1 = 2a\mathrm{A}_0 , & & & & & & \\ 0 = & b\mathrm{A}_0 + 2a\mathrm{A}_1 , & & & & & \\ 0 = & 4\mathrm{A}_0 + & b\mathrm{A}_1 + 2a\mathrm{A}_2 , & & & & \\ 0 = & & 3\mathrm{A}_1 + & b\mathrm{A}_2 + 2a\mathrm{A}_3 , & & & \\ 0 = & & & 2\mathrm{A}_2 + & b\mathrm{A}_3 + 2a\mathrm{A}_4 , & & \\ 0 = & & & & \mathrm{A}_3 + & b\mathrm{A}_4 + \mathrm{A}_5 , & \end{array} \right.$$

qui fournissent le coefficient suivant A_5 sous la forme du déterminant suivant :

$$(5) \qquad (2a)^5 \mathrm{A}_5 = - \begin{vmatrix} b & 2a & 0 & 0 & 0 \\ 4 & b & 2a & 0 & 0 \\ 0 & 3 & b & 2a & 0 \\ 0 & 0 & 2 & b & 2a \\ 0 & 0 & 0 & 1 & b \end{vmatrix}$$

Par analogie, il est facile d'exprimer A_n au moyen du déterminant D_n. Si a est différent de zéro, la condition pour que $e^{-ax^2-bx} I_n$ soit entièrement rationnel est que le déterminant D_n soit nul.

En calculant D_n au moyen des mineurs de la première ligne ou de la première colonne, nous avons la relation de récurrence entre trois déterminants consécutifs

$$D_n = -bD_{n-1} - 2(n-1)\,aD_{n-2}\,. \tag{6}$$

Comme $D_0 = 1$ et $D_1 = -b$, nous en tirons :

$$\left\{\begin{aligned} D_2 &= b^2 - 2a\,, \\ D_3 &= -b^3 + 6ab. \end{aligned}\right. \tag{7}$$

Le déterminant D_{2p+1} s'annulant pour $b = 0$, nous en déduisons :

I. — Le produit $e^{-ax^2} I_n$ est rationnel si n est un entier positif impair ; l'intégrale I_n se calcule alors immédiatement au moyen de la substitution $ax^2 = z$.

De plus, pour n pair, D_n contient seulement des puissances paires de b, tandis que, pour n impair, D_n n'a que des puissances impaires de b ; d'où la proposition suivante :

II. — Si le produit $e^{-ax^2-bx} I_n$ est entièrement rationnel, celui que l'on obtient en remplaçant b par $-b$ l'est aussi.

En outre, d'après les relations (6) et (7), le déterminant D_n pour n pair est homogène en b^2 et a, tandis que, pour n impair, $\frac{D_n}{b}$ est homogène en b^2 et a. La relation $D_n = 0$ peut donc être considérée comme une équation algébrique du $p^{\text{ième}}$ degré si $n = 2p$ ou si $n = 2p + 1$, où p est un entier positif ou nul ; l'inconnue est alors formée par le quotient $\frac{b^2}{a}$ ou l'inverse $\frac{a}{b^2}$. Il s'ensuit la nouvelle proposition :

III. — Si le produit $e^{-ax^2-bx} I_n$ est entièrement rationnel pour les valeurs particulières α et β de a et de b, dont le rapport $\frac{\beta^2}{\alpha} = k$, le produit considéré reste encore rationnel pour toutes les valeurs arbitraires attribuées à a et à b donnant lieu au même rapport k. Ce nombre k est racine d'une équation algébrique du $p^{\text{ième}}$ degré, telle que $2p = n$ ou $2p + 1 = n$.

* * *

4. — Examinons maintenant quelles sont les propriétés de ces équations du $p^{ième}$ degré et en particulier si toutes leurs racines sont réelles.

Des déterminants D_n, on déduit facilement les polynomes d'Hermite [1] qui proviennent du développement suivant les puissances croissantes de h de la fonction e^{-h^2+2hz} ; le coefficient de $\frac{h^m}{m!}$ dans ce développement est le polynome d'Hermite du $m^{ième}$ degré que l'on désigne ordinairement par $U_m(z)$ et qui a pour expression :

(8)
$$(-1)^m U_m(z) = (2z)^m - \frac{m(m-1)}{1!}(2z)^{m-2} + \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{2!}(2z)^{m-4} - \dots$$

Le polynome $U_m(z)$ ne contient que des puissances paires ou impaires de z suivant que m est pair ou impair. Trois polynomes consécutifs sont liés par la formule de récurrence

(9) $$U_m(z) = -2z\,U_{m-1}(z) - 2(m-1)\,U_{m-2}(z),$$

qui est analogue à la relation (6).

Afin de préciser l'analogie entre (6) et (9), nous distinguerons deux cas :

Premier cas. — Pour $n = 2p$, la relation (6) devient :

(10) $$D_{2p} = -b\,D_{2p-1} - 2(2p-1)\,a\,D_{2p-2}.$$

Les déterminants D_{2p} et D_{2p-2} peuvent être considérés comme des polynomes homogènes en b^2 et a dont les degrés respectifs sont p et $p-1$, tandis que D_{2p-1} est le produit par b d'un polynome homogène en b^2 et a de degré $p-1$.

Après division par a^p et au moyen de la substitution $\frac{b^2}{a} = 4z^2$, la relation (10) montre que D_{2p} se transforme en un polynome d'Hermite de degré $2p$.

En effet, $D_2 = b^2 - 2a$ devient $U_2(z) = 4z^2 - 2$,
$D_3 = b(b^2 - 6a)$ devient $U_3(z) = -2z(4z^2 - 6)$
et $D_4 = -b\,D_3 - 2.3a\,D_2 = -b^2(b^2 - 6a) - 2.3a(b^2 - 2a)$
devient $U_4(z) = 4z^2(4z^2 - 6) - 6(4z^2 - 2) = 16z^4 - 48z^2 + 12.$

Deuxième cas. — Pour $n = 2p + 1$, la relation (6) s'écrit :

(11) $$D_{2p+1} = -b\,D_{2p} - 4pa\,D_{2p-1}.$$

[1] Oeuvres. Tome II, p. 294.

Les déterminants D_{2p+1} et D_{2p-1} contenant chacun b comme facteur, la relation de récurrence, après division par b, devient homogène et de degré p en b^2 et a. Divisons alors par a^p et posons $\frac{b^2}{a} = 4z^2$, la relation (11), ainsi modifiée, donne l'expression du polynome $\frac{U_{2p+1}(z)}{2z}$.

Nous pouvons donc énoncer la proposition suivante :

IV. — La condition $D_n = 0$, nécessaire et suffisante, pour que le produit $e^{-ax^2-bx}I_n$ soit rationnel, peut être considérée, si a et b ne sont pas nuls, comme une équation dont l'inconnue est $\frac{b^2}{a} = 4z^2$. Si n est pair, cette équation est identique à $U_n(z) = 0$, et pour n impair, D_n devient $\frac{U_n(z)}{2z}$.

On sait d'ailleurs que $U_m(z) = 0$ est une équation du $m^{\text{ième}}$ degré ayant m racines réelles, différentes et opposées, comprises entre $-\infty$ et $+\infty$; pour m impair, une des racines est nulle.

Le rapport $\frac{b^2}{a} = 4z^2$ étant essentiellement positif, le produit $e^{-ax^2-bx}I_n$ ne peut devenir rationnel que si a est positif.

* * *

5. — Voici pour les premières valeurs de n certaines valeurs des coefficients a et b pour lesquelles l'expression $e^{-ax^2-bx}I_n$ est rationnelle.

Valeurs de n	Polynomes d'Hermite	Valeurs du rapport $4z^2 = \frac{b^2}{a}$	Expression du produit $e^{-ax^2-bx}I_n$ pour certaines valeurs de a et de b
$n=1$	—	—	$b=o$, $e^{-ax^2}I_1 = \frac{1}{2a}$
$n=2$	$U_2(z) = 4z^2-2$	$\frac{b^2}{a} = 2$	$\left.\begin{matrix} b=1 \\ a=\frac{1}{2} \end{matrix}\right\} e^{-\frac{x^2}{2}-x}I_2 = x-1$
$n=3$	$\frac{U_3(z)}{2z} = -4z^2+6$	$\frac{b^2}{a} = 6$	$\left.\begin{matrix} b=1 \\ a=\frac{1}{6} \end{matrix}\right\} e^{-\frac{x^2}{6}-x}I_3 = 3x^2-9x+9$
$n=4$	$U_4(z) = 16z^4-48z^2+12$	$\frac{b^2}{a} = 6 \pm 2\sqrt{6}$	—

6. — Déterminons les valeurs qu'il faut attribuer à a et à b pour que le déterminant D_n représente le polynome d'Hermite $U_n(z)$.

Le déterminant D_n, qui n'a comme éléments différents de zéro que ceux de la diagonale principale, ainsi que ceux des 2 parallèles placées de chaque côté de la diagonale principale, se nomme un continuant.

Il est possible de le modifier comme suit : prenons, par exemple, le continuant D_5 et multiplions la première ligne par 4 !, la deuxième ligne par 3 !, la troisième ligne par 2 ! et la quatrième ligne par 1 !, D_5 s'écrit alors :

$$1!2!3!4!D_5 = -\begin{vmatrix} 4!b & 4!2a & 0 & 0 & 0 \\ 4! & 3!b & 3!2a & 0 & 0 \\ 0 & 3! & 2!b & 2!2a & 0 \\ 0 & 0 & 1! & 1!b & 1!2a \\ 0 & 0 & 0 & 1 & b \end{vmatrix}.$$

Divisons maintenant dans ce nouveau continuant la première colonne par 4!, la deuxième colonne par 3 !, la troisième colonne par 2!, la quatrième colonne par 1 !, il vient :

$$D_5 = -\begin{vmatrix} b & 8a & 0 & 0 & 0 \\ 1 & b & 6a & 0 & 0 \\ 0 & 1 & b & 4a & 0 \\ 0 & 0 & 1 & b & 2a \\ 0 & 0 & 0 & 1 & b \end{vmatrix} \text{ ou} - \begin{vmatrix} b & 2a & 0 & 0 & 0 \\ 1 & b & 4a & 0 & 0 \\ 0 & 1 & b & 6a & 0 \\ 0 & 0 & 1 & b & 8a \\ 0 & 0 & 0 & 1 & b \end{vmatrix}.$$

Cette propriété est générale pour tout continuant ; elle permet, sans changer la valeur de celui-ci, de remplacer chaque élément d'une parallèle à la diagonale principale par 1 à condition de remplacer chaque élément de l'autre parallèle à la diagonale par le produit des 2 éléments correspondants des 2 parallèles.

D'après les relations (6) et (9), il résulte que l'on peut passer du déterminant D_5 à l'expression de $U_5(z)$ en remplaçant a par 1 et b par $2z$.

$$U_5(z) = -\begin{vmatrix} 2z & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2z & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2z & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2z & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2z \end{vmatrix} = -32z^5 + 160z^3 - 120z.$$

Si nous faisons $a = 1$ et $b = 2z$, l'intégrale I_5 s'écrit :

$$I_5 = \int x^5 e^{x^2+2zx}\, dx = e^{x^2+2zx}\, \theta_5(z, x) + \frac{1}{2^5} U_5(z) \int e^{x^2+2zx}\, dx,$$

où $\theta_5\,(z, x)$ désigne un polynome du quatrième degré en x et en z, et $U_5\,(z)$ est le polynome d'Hermite du cinquième degré en z ; ce qui s'étend immédiatement à I_n.

* * *

7. — Laguerre (Oeuvres, tome I, p. 415) a étudié l'intégrale analogue suivante, pour n entier positif,

$$I_n = \int x^n e^{-\frac{x^2}{2}+zx}\, dx,$$

où $a = -\dfrac{1}{2}$ et $b = z$.

Dans ce cas, le coefficient a étant négatif, il résulte de ce qui précède que le produit $e^{\frac{x^2}{2}-zx}\, I_n$ ne peut jamais devenir rationnel ; les coefficients de $\int e^{-\frac{x^2}{2}+zx}\, dx$ sont donc tous des polynomes en z dont les racines sont toutes imaginaires.

Lausanne, août 1923.