

Zeitschrift: Bulletin de la Société Vaudoise des Sciences Naturelles
Herausgeber: Société Vaudoise des Sciences Naturelles
Band: 54 (1921-1922)
Heft: 204

Artikel: Le mouvement quasi newtonien et la gravitation
Autor: Maillard, Louis
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-270913>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 13.01.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

Le mouvement quasi newtonien et la gravitation

PAR
LOUIS MAILLARD

I. — Le mouvement quasi newtonien et ses applications.

La loi de force centrale

$$(1) \quad F = -\frac{\mu mr}{(\alpha^2 + \beta \sqrt{r^2 - \alpha^2})^3} \quad (\mu = A^2 p^2)$$

permet de rendre compte de la formation discontinue des anneaux et des tourbillons planétaires, de l'extérieur à l'intérieur d'une nébuleuse primitivement homogène ; des rotations de sens rétrograde et de sens direct ; de l'inclinaison de l'axe d'Uranus ; de l'existence des planètes télescopiques ; etc. ¹⁾

Quand α^2 est très petit (α^4 négligeable), l'orbite d'une planète est déterminée par l'équation

$$p \left(\frac{d\rho}{d\varphi} \right)^2 = -\frac{1}{a} + 2\rho - p\rho^2 - 3\alpha^2\rho^2 + \alpha^2\rho^3 \quad \left(\rho = \frac{1}{r} \right)$$

L'intégrale elliptique se ramène à une quadrature.

Soit maintenant

$$(2) \quad \Phi = -\frac{\mu mr}{(r \pm \Delta)^3} = -\frac{\mu m}{r^2} \left(1 \mp 3 \frac{\Delta}{r} \right)$$

$(\Delta, \text{ constante, de l'ordre de } \alpha^2).$

Substituons Φ à F ; l'équation en ρ devient

$$p \left(\frac{d\rho}{d\varphi} \right)^2 = -\frac{1}{a} + 2\rho - p\rho^2 \mp 3\Delta\rho^2 ;$$

les deux petits termes complémentaires sont incorporés en un seul.

Φ est la loi du *mouvement quasi newtonien*.

Une correction minime ramène le foyer en S, centre du soleil ; l'équation de l'orbite conserve la forme keplerienne

$$\frac{p}{r} = 1 + e \cos w. \quad (w = \mathcal{L} - \omega)$$

¹⁾ COMPTES RENDUS du Congrès international des Mathématiciens, Strasbourg, septembre 1920 : *Mise au point des hypothèses cosmogoniques nébulaires*.

Marquons de l'indice zéro les lettres qui se rapportent au mouvement newtonien, *variations séculaires incluses*; nous aurons

$$\begin{aligned}\mu &= \mu_0 \cdot \beta^{-3}, & \mathcal{A}^2 &= \mathcal{A}_0^2 \pm 3\mu\Delta, & p &= \frac{\mathcal{A}^2}{\mu}, \\ v^2 &= \frac{2\mu}{r} \mp \frac{3\mu}{r^2} \cdot \Delta + h, & e &= \left(1 + \frac{hp}{\mu}\right)^{\frac{1}{2}}, \\ w &= w_0 \left(1 \pm \frac{3}{2} \cdot \frac{\Delta}{p}\right); & \text{etc.}\end{aligned}$$

En présence des écarts résiduels que la loi de Newton ne suffit pas à expliquer, on est en droit de se demander si, actuellement, l'action de F ou de Φ peut être mise en évidence.

Considérons la loi de force

$$\Psi = -\nu mr^{-(2+\nu)}$$

Utilisant un théorème de Newton, Newcomb (après Hall) a déterminé la constante ν de façon à représenter au mieux les résidus des inégalités séculaires des planètes : $\nu = 16 \cdot 10^{-8}$.

Identifions F et Ψ; pour $r = 1$ (distance Terre-Soleil) et $r = 0,723.333.22$ (distance Vénus-Soleil), nous trouvons :

$$\alpha^2 = 24 \cdot 10^{-8}, \quad \beta = 1 - 12 \cdot 10^{-8}, \quad \frac{\alpha^2}{2\beta} = \varepsilon = 12 \cdot 10^{-8}.$$

Envisagée pour elle-même, la loi Φ n'est qu'une expression commode, parce que simple; il reste à savoir si elle est utile.

Proposons-nous de déterminer Δ de façon à retrouver les résidus séculaires :

- 1^o de l'accélération du moyen mouvement de la lune;
- 2^o de l'avance du périhélie des planètes, de Mercure en particulier.

Voici les résultats de cette détermination :

$$\begin{aligned}1^o \quad \Delta &= \alpha^2, \quad \Phi = -\frac{\mu_1 m}{r^2} \left(1 - \frac{3\alpha^2}{r}\right). \\ [\mu_1 &= f m_1 = \frac{\mathcal{A}^2}{p}; m_1, \text{masse de la Terre.}]\end{aligned}$$

t étant exprimé en siècles, il vient

$$\frac{\partial l}{\partial t} - \frac{\partial l_0}{\partial t} = \frac{3\varepsilon}{a} \cdot n_0. \quad 1)$$

L'équation de Kepler donne le même résultat, en négligeant e^2 et $e \cdot \alpha^2$.

$$a = 0,002. 571.3, \quad n_0 = 47435'',$$

$$\frac{3\varepsilon}{a} \cdot n_0 = 0,00014 n_0 = 6'',6.$$

En ajoutant à ce résidu, selon M. E. Brown, 5'',8,
nous retrouvons la valeur 12'',4 par siècle,
exacte à moins d'une seconde près.

2º. — Pour les quatre planètes intérieures, Newcomb a calculé les valeurs numériques des variations séculaires déduites : 1º des observations, 2º de la théorie des perturbations ; et les différences. Répartissant les erreurs, il fut conduit à ajouter au déplacement du périhélie une avance séculaire, δ , savoir :

pour Mercure, $\delta_1 = 43'',4$;	pour Vénus, $\delta_2 = 17''$;
pour la Terre, $\delta_3 = 10'',5$;	pour Mars, $\delta_4 = 5'',5$.

Seul δ_1 est bien déterminé (à 2'' près). Les δ suivants en sont déduits au moyen de la loi empirique Ψ . A cause de la très faible excentricité des planètes Vénus et Terre, l'erreur moyenne dépasse les grandeurs probables de δ_2 et δ_3 . Des calculs plus récents font admettre $\delta_3 = 11''$ et $\delta_4 = 8''$.

D'autre part, Le Verrier et Gaillet ont corrigé une faible erreur systématique de la longitude de Saturne au moyen d'une avance du périhélie, de 40'' par siècle.

A tous ces δ positifs correspond la loi d'attraction quasi newtonienne

$$\Phi = -\frac{\mu m r}{(r - \Delta)^3} = -\frac{\mu m}{r^2} \left(1 + 3 \frac{\Delta}{r}\right).$$

Il s'ensuit

$$d\varphi = -\frac{d\rho}{\sqrt{\frac{h}{\rho^2} + \frac{2}{p}\rho - \left(1 - 3 \cdot \frac{\Delta}{p}\right)\rho^2}}.$$

¹⁾ Dans la différence des longitudes moyennes, le terme en t^2 est négligeable.

Posons $\frac{1}{r} = \rho = \rho_1 \cos^2 \theta + \rho_2 \sin^2 \theta$

$$\left[\rho_1 = \frac{1}{a(1-e)}, \quad \rho_2 = \frac{1}{a(1+e)} \right].$$

Après un demi tour de la planète sur son orbite,

$$\varphi = \left(1 + \frac{3}{2} \cdot \frac{\Delta}{p} \right) \pi.$$

Au bout du temps t , le périhélie a donc avancé de

$$(3) \quad \delta\omega = \frac{3}{2} \cdot \frac{\Delta}{p} \cdot nt.$$

Faut-il s'attendre à ce qu'une valeur unique de Δ convienne pour toutes les planètes ? — Non. — Remplacer la loi de Newton par Φ , c'est modifier aussi la fonction perturbatrice. Le cas de Mercure est exceptionnel en ce que, dans les limites de l'erreur moyenne, δ dépend des variations de l'énergie solaire et aussi de l'action variable des météorites qui foisonnent dans le voisinage du soleil. — Or, le diviseur du terme $\frac{\Delta}{p}$ tient compte de la distance planète-soleil et de l'excentricité. Il est possible de calculer Δ de façon à tenir compte de l'*ensemble des actions perturbatrices*. Δ doit alors grandir à mesure que l'orbite considérée se rapproche de celle des grosses planètes, notamment de Jupiter.

Le calcul confirme ces prévisions. Désignons par
 T, la durée d'une révolution sidérale, en jours moyens ;
 N, le nombre de révolutions par siècle (de 36 525 jours) ;
 e, l'excentricité ;
 p, la distance périhélie.

Soit enfin $\Delta = \nu \cdot 10^{-8}$ (où ν est un nombre à déterminer pour chacune des planètes considérées).

Dans le tableau ci-dessous, les cinq premières colonnes renferment les données ; les deux dernières, les résultats du calcul.

	T	N	e	p	δ probables	δ calculés	$\nu =$
1. Mercure	87,969	415,19	0,2056	0,3708	43"4	43"5	2
2. Vénus .	224,701	162,55	0,0068	0,7233	17"	17"4	4
3. Terre ..	365,256	100.—	0,0167	0,9997	11"	11"6	6
4. Mars ..	686,980	53,17	0,0933	1,5105	8"	8"2	12
7. Saturne	10759,236		3,3948	0,0559	9,5090	40"	40"
							96×60

Ainsi, $\frac{3}{2} \Delta = \frac{\varepsilon}{4}, \frac{\varepsilon}{2}, \frac{3\varepsilon}{4}, \frac{3\varepsilon}{2}, \dots 60 \times 12 \varepsilon.$ ¹⁾.

En résumé, les valeurs numériques des δ sont exprimées le plus simplement possible au moyen d'un terme complémentaire et de la constante ε .

Ces valeurs sont d'autant plus approchées des résidus séculaires probables que ceux-ci sont mieux déterminés ; la différence, qui n'atteint pas 1", descend

pour Mercure et Mars, à 0"1 ou 0"2 (par excès) ;
pour Saturne, à 0"03 (par défaut).

La confrontation de Φ avec certaines lois de l'électrodynamique nous permettra de préciser le sens de la constante ε .

¹⁾ Les valeurs de δ adoptées par Newcomb correspondent, pour les planètes

$$\begin{array}{ccccccccc} 1, & 2, & 3, & 4, & & & & & \text{à} \\ \nu = 2, & 4, & 6, & 8, & & & & & \text{et à} \\ \frac{3}{2} \Delta = \frac{\varepsilon}{4}, & \frac{\varepsilon}{2}, & \frac{3\varepsilon}{4}, & \varepsilon. & & & & & \end{array}$$

— Pour la comète d'Encke, l'accélération du moyen mouvement, par tour, est

$$\begin{aligned} \delta n &= 0",012 && (\text{ANNUAIRE DU BUREAU DES LONGITUDES.}) \\ T &= 3 \text{ ans, } 297, & a &= 2,21530. \end{aligned}$$

On trouve $\delta n = \frac{\varepsilon}{3} \cdot \frac{\pi}{a} = 0",012.$

Mais l'accélération de n a varié d'une période à l'autre, pour des causes complexes, dont quelques-unes sont mal connues. Il n'y a donc pas lieu d'insister.

II. — Le mouvement quasi newtonien et l'électrodynamique.

Gauss a formulé une loi d'action mutuelle pour deux éléments de courant animés d'un mouvement relatif connu ; en valeur absolue,

$$F = C \cdot \frac{e \cdot e'}{r^2} \left[1 + \frac{1}{c^2} (2v^2 - 3r'^2) \right]$$

$\left[e, e', \text{charges électriques} ; C, c, \text{constantes} ; v, \text{vitesse relative des éléments} ; r' = \frac{dr}{dt} \cdot \right]$

Appliquant cette loi au mouvement des planètes (en remplaçant les charges par des masses), Tisserand a montré qu'elle donne une avance du périhélie

$$(4) \quad \delta\vartheta = \frac{2k^2}{c^2 p} \cdot nl.$$

$(k^2 = \mu = f \cdot M)$; f , constante de la gravitation; M , masse du soleil; m , masse d'une planète).

La loi électrodynamique de Weber¹⁾, adaptée par Zöllner à l'astronomie, sous la forme

$$\text{donne } (5) \quad F = -\frac{\mu m}{r^2} \left[1 - \frac{1}{c^2} (r'^2 - 2r'r'') \right],$$

$$\delta\vartheta = \frac{k^2}{c^2 p} \cdot nl.$$

En supposant, avec Tisserand, c égal à la vitesse de la lumière dans le vide, on trouve pour Mercure $\delta = 14''$,5. C'est le tiers de la valeur calculée au moyen de la formule 3)²⁾.

Comme celle de Gauss, la loi de Riemann conduit à la formule 4).

¹⁾ Cette loi est contenue dans celle de Gauss, pourvu que les vitesses des deux éléments soient constantes.

²⁾ Ce rapport simple ne pouvait être aperçu avec le nombre $\delta = 38''$ calculé par Le Verrier. — Au surplus, Tisserand a posé $2c_0^2 = c^2$; si donc c_0 était la vitesse de la lumière, les valeurs 4) et 5) seraient réduites chacune de moitié.

La notation de Tisserand est légitime; elle revient à remplacer l'unité électrodynamique d'intensité de courant par l'unité électromagnétique, sans changer les unités de longueur, de masse et de temps.

Tisserand suppose que le potentiel électro-astronomique est de la forme

$$P = \mu m \left(\frac{1}{r} - \frac{D}{c^2} \right); \quad \text{il retrouve}$$

la loi de Riemann et 4) pour $D_r = \frac{x'^2 + y'^2}{r} = \frac{v^2}{r};$

la loi de Weber et 5) pour $D_w = \frac{(xx' + yy')^2}{r^3} = \frac{r'^2}{r}.$

Maurice Lévy constate que les deux fonctions

$$P_r = \frac{\mu m}{r} \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right) \quad \text{de Riemann et}$$

$$P_w = \frac{\mu m}{r} \left(1 - \frac{r'^2}{c^2} \right) \quad \text{de Weber,}$$

appliquées à deux courants fermés, donnent exactement les mêmes résultats ; leur différence est donc sans effet, et le potentiel

$$P = P_r + \lambda (P_w - P_r)$$

rend compte des phénomènes observés, quel que soit λ . ¹⁾
On a alors

$$P = \frac{\mu m}{r} \left(1 - \frac{1}{c^2} \left[(1 - \lambda) v^2 + \lambda r'^2 \right] \right), \quad \text{et}$$

$$\delta\omega = (2 - \lambda) \frac{k^2}{c^2 p} \cdot nl.$$

Pour Mercure, le déplacement séculaire de $38''$ correspondait à $\lambda = -\frac{2}{3}$; la valeur $\delta = 43'',5$ correspond à $\lambda = -1$.

D'où

$$(6) \quad P = \frac{\mu m}{r} \left[1 - \frac{1}{c^2} (2v^2 - r'^2) \right], \quad \text{et}$$

$$(7) \quad \delta\omega = \frac{3k^2}{c^2 p} \cdot nl.$$

¹⁾ COMPTES RENDUS de l'Académie des Sciences de Paris; 1890, t. CX : Notes de Tisserand (p. 313) et de Maurice Lévy (p. 545).

★

Voici la marche du calcul direct :

$$\text{Posons } \frac{\mu}{c^2} = \frac{k^2}{c^2} = G^2 ;$$

les équations du mouvement de la planète m sont

$$\begin{aligned}\frac{d^2x}{dt^2} &= -\frac{k^2x}{r^3} - G^2 \left[\frac{2x}{r^3} (x'^2 + y'^2) + 4 \frac{d}{dt} \left(\frac{x'}{r} \right) + \frac{x}{r^3} (r'^2 - 2r r'') \right], \\ \frac{d^2y}{dt^2} &= -\frac{k^2y}{r^3} - G^2 \left[\frac{2y}{r^3} (x'^2 + y'^2) + 4 \frac{d}{dt} \left(\frac{y'}{r} \right) + \frac{y}{r^3} (r'^2 - 2r r'') \right].\end{aligned}$$

Multiplions la première par $-y$, la seconde par x , et additionnons :

$$xy'' - yx'' = -4G^2 \left[\frac{1}{r} (xy'' - yx'') + (xy' - yx') \frac{d(\frac{1}{r})}{dt} \right].$$

Intégrons, et soit $k\sqrt{p}$ la constante des aires :

$$(xy' - yx') \left(1 + \frac{4G^2}{r} \right) = k\sqrt{p}.$$

D'ailleurs, le théorème de l'énergie donne

$$v^2 \left(1 + \frac{4G^2}{r} \right) = \frac{2k^2}{r} + 2G^2 \cdot \frac{r'^2}{r} - \frac{k^2}{a}.$$

En coordonnées polaires, ces deux équations s'écrivent

$$r^2 \frac{d\varphi}{dt} \left(1 + \frac{4G^2}{r} \right) = k\sqrt{p} \quad \text{et}$$

$$\left(\frac{dr}{dt} \right)^2 \left(1 + \frac{2G^2}{r} \right) + r^2 \left(\frac{d\varphi}{dt} \right)^2 \left(1 + \frac{4G^2}{r} \right) = \frac{2k^2}{r} - \frac{k^2}{a}.$$

Eliminons dt et résolvons par rapport à $d\varphi$:

$$d\varphi = \left(1 - \frac{3G^2}{r} \right) \cdot \frac{dr}{r^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{-\frac{1}{pa} + \frac{2}{pr} - \frac{1}{r^2} + \frac{4G^2}{r^3}}}.$$

Soit enfin $\frac{1}{r} = \rho = \rho_1 \cos^2 \theta + \rho_2 \sin^2 \theta$, et

$$-\frac{1}{pa} + \frac{2}{pr} - \frac{1}{r^2} + \frac{4G^2}{r^3} \equiv -\frac{(\rho - \rho_1)(\rho - \rho_2)(1 - 4G^2\rho)}{1 + 4G^2(\rho_1 + \rho_2)}.$$

Substituons, puis intégrons. Après un demi-tour de la planète,

$$\begin{aligned}\varphi &= \left(1 + \frac{4G^2}{p}\right) \int_{\rho_1}^{\rho_2} \frac{-(1 - G^2\rho)}{V(\rho_1 - \rho)(\rho - \rho_2)} d\rho \\ &= \left(1 + \frac{4G^2}{p}\right) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[1 - G^2(\rho_1 \cos^2 \theta + \rho_2 \sin^2 \theta)\right] 2d\theta \\ &= \left(1 + \frac{4G^2}{p} - \frac{G^2}{p}\right) \pi = \left(1 + \frac{3G^2}{p}\right) \pi;\end{aligned}$$

d'où, après le temps t :

$$(7) \quad \delta\phi = \frac{3G^2}{p} \cdot nt. \quad ^1)$$

¹⁾ La loi considérée par Laplace, utilisée par Seeliger,

$$F = -\frac{\mu m}{r^2} \cdot e^{-\lambda r} \quad (\lambda \text{ très petit})$$

ne donne pas, pour l'ensemble des planètes, des valeurs de δ conciliables avec les observations.

Les théories de Maxwell ne peuvent s'appliquer à la gravitation.

Walther Ritz établit les équations du mouvement des planètes comme un cas particulier de sa loi d'électrodynamique générale. Celle-ci contient, sous leur forme primitive, les lois de Weber et de Riemann, retrouvées indépendamment des hypothèses faites à l'origine sur la nature des courants de conduction. L'intégration donne, par tour,

$$\delta\phi = \frac{\mu^2 \pi (\lambda + 5)}{2c_0^2 A^2} = \frac{\lambda + 5}{2} \cdot \frac{G^2}{p} \cdot \pi.$$

Il faut donc prendre $\lambda = 7$. Si Ritz avait choisi les mêmes unités que Tisserand, et posé $2c_0^2 = c^2$, il aurait trouvé $\lambda = 1$.

[W. Ritz (1878-1909). ŒUVRES. XVIII: *Recherches critiques sur l'électrodynamique générale* (1908). — La théorie, provisoire et incomplète, est originale, mesurée et simple ; le principe de la relativité du mouvement y est conservé dans son sens classique ; la notion d'éther disparaît, inutile. — Malgré l'encombrement de ses richesses récentes, la Physique retiendra et achèvera, espérons-le, l'esquisse tentée par un jeune savant qui se fût classé au rang des maîtres, si la mort eût été moins pressée.]

Voir aussi : H. Minkowski, GESAMMELTE ABHANDLUNGEN (1907), t. II, XXX.

M. Gerber (1902), partant de l'expression d'un potentiel

$$P = \frac{\mu m}{r \left(1 - \frac{r'}{c}\right)^2},$$

retrouve δ_1 (Mercure).

M. Walker (1920), se donnant la fonction de Lagrange pour deux particules mobiles, dispose d'un facteur arbitraire qui y figure de manière à déterminer δ_1 .

★

La loi Φ nous a donné, pour Mercure, $\delta\phi = \frac{\varepsilon}{4p} \cdot nt$.

Identifions cette valeur à 7) :

$$\frac{\varepsilon}{4} = 3G^2, \quad \text{ou} \quad G^2 = \frac{k^2}{c^2} = \frac{\varepsilon}{12} = 10^{-8}.$$

Ainsi, ε prend un sens physique simple. *La loi dérivant du potentiel 6) peut être utilisée en astronomie.* Elle permet de représenter le mouvement newtonien et le mouvement quasi newtonien.

Si V est la vitesse de la gravité, la condition de l'accord est

$$V = c = \frac{k}{G}. \quad ^1)$$

Soit v_1 la vitesse moyenne de la Terre sur son orbite ; la constante d'aberration de la lumière est

$$\alpha = \frac{v_1}{c} = 10^{-4} = G.$$

Cette coïncidence n'est pas fortuite ; dans le mouvement elliptique,

$$v^2 = \frac{2\mu}{r} - \frac{\mu}{a};$$

pour $r = a = 1$, $v_1^2 = \mu = k^2$; donc

$$G = \frac{k}{c} = \frac{v_1}{c} = \alpha.$$

*Il existe une aberration gravitaire, égale à l'aberration de la lumière.*²⁾

M. G. Bertrand (1921), partant de la loi de force

$$F = -\frac{\mu m}{r^2} \cdot \varphi \left(\frac{v^2}{c^2} \right), \quad \varphi = 1 + \alpha \cdot \frac{v^2}{c^2} + \dots,$$

retrouve δ_1 pour $\alpha = 3$.

On a donc l'embarras du choix. C'est qu'il existe une infinité de lois élémentaires conduisant toutes au même résultat pour deux courants fermés (Stefan). A une fonction P donnée, on peut ajouter toute autre fonction dont l'intégrale, prise entre les limites relatives au cas considéré, est nulle. La préférence ira naturellement aux formes les plus générales et les plus simples.

Rappelons enfin les analogies hydrodynamiques découvertes par B. Riemann et Brill, Bjerknes et Korn, les images électrodynamiques de Zenger, etc.

¹ Dans sa MÉCANIQUE CÉLESTE, Laplace avait estimé V supérieur à $30 \cdot 10^6 c$. D'autres savants sont parvenus à des valeurs moindres, mais toutes beaucoup plus grandes que c . — Voir Tisserand, MÉCANIQUE CÉLESTE, t. IV, p. 494.

² En astronomie, la correction de $G = \alpha$ s'effectue en substituant au temps t de l'ob-

★

Rien ne permet d'avancer que l'expression P (6) est assez générale pour s'appliquer à tous les cas possibles. Lorsque l'action mutuelle dépend des vitesses et des accélérations relatives, on peut prendre, à une constante près :

$$(8) \quad P = \frac{\mu m}{r} + \frac{\mu m}{c^2 r} (\lambda \cdot v^2 + \lambda' \cdot r'^2) = P_0 + P_1.$$

[$\mu = C \cdot M$; m , M, masses ou charges quelconques, positives ou négatives; λ, λ' , constantes arbitraires, à déterminer selon les conditions caractéristiques du problème. Pour deux courants fermés, $\lambda + \lambda' = 1$.] On néglige ainsi les termes d'ordre supérieur.¹⁾

P_0 , d'où dérivent les lois de Newton et de Coulomb, donne RIGOUREUSEMENT l'effet statique; P tient compte de l'effet dynamique, en particulier de la loi d'Ampère. P_1 sera positif ou négatif selon que l'effet dynamique est une attraction ou une répulsion.

Dans cet ordre d'idées, la liaison prévue et conforme aux théories récentes sur la constitution de la matière s'établit ainsi :

La lumière et la gravitation sont deux phénomènes de même nature ou deux manifestations d'un même phénomène. L'énergie gravitique rayonne de tous les corps.

La vitesse de la gravitation est égale à celle de la lumière et de l'onde électromagnétique. Les aberrations lumineuse et gravitique sont égales.

★

A tout potentiel gravifique on peut faire correspondre un potentiel électromagnétique, et réciproquement.

Comparons deux potentiels de même forme P , et posons

$$(9) \quad \lambda c^2 \cdot f m m' = \pm e e'. \quad (C. G. S.)$$

[e, e' , charges électriques, en u. e. m. ;
 m, m' , masses gravitiques, en g. ;

servation le temps $\left(t - \frac{r}{c}\right)$. En électrodynamique, on est conduit ainsi à la notion des potentiels retardés (Gauss, Riemann, C. Neumann ; Lorentz). Mais, dans les lois d'action des courants fermés, les termes du premier ordre ont une somme nulle (Ritz).

¹⁾ D'autres ajustements ont été proposés par F. Neumann, Grassmann, Helmholtz, Clausius, etc.

constante de la gravitation : $f = 6,667 \cdot 10^{-8} = \frac{20}{3} \cdot 10^{-8}$;
 vitesse de la lumière : $c = 3 \cdot 10^{10} \text{ cm.}]$

Une liaison quantitative est fournie par la charge élémentaire, qui permet de calculer λ . Soit, *en valeur absolue*,

$e' = e = e_0$, la charge de l'électron (*u. e. m.*), égale à la charge d'un atome d'hydrogène dans l'électrolyse ;
 $m' = m = m_0$, la masse de l'électron (*g.*)

$$(9) \text{ devient alors} \quad (10) \quad \lambda c^2 f = \left(\frac{e_0}{m_0} \right)^2 = \eta_0^2.$$

En moyenne, $\eta_0 = 2 \cdot 10^7 \text{ u. e. m.}^1)$ Il s'ensuit

$$\lambda = \frac{20}{3} = 10^8 /; \quad \lambda c^2 f = 10^8 c^2 f^2 = \eta_0^2.$$

f est la valeur *numérique* du potentiel newtonien pour
 $m' = m = 1 \text{ g.}$ et $r = 1 \text{ cm.};$

$10^4 f = f_\mu$, la valeur correspondante pour $r = 10^{-4} \text{ cm} = 1 \mu$.

$$f_\mu = \frac{1}{c} \eta_0 \text{ (u. e. m.)} \quad \text{ou} \quad f_\mu = \frac{1}{c^2} [\eta_0] \text{ (u. e. s.)}$$

Dans l'hypothèse de l'énergie pesante, c^{-2} est la masse d'un *erg*. — Soit q la quantité de chaleur produite par une réaction chimique ; la masse (*g.*) qui disparaît avec la chaleur rayonnée est

$$m_q = q \cdot c^{-2}, \text{ d'où} \quad c^{-2} = \frac{m_q}{q}.$$

★

PROPRIÉTÉS ÉLÉMENTAIRES DU POTENTIEL P.

1º Dans $P = \frac{\mu m}{r} \left[1 - \frac{1}{c^2} (2 v^2 - r'^2) \right]$, soit $r' = c$.

P devient, en valeur absolue

¹⁾ Les écarts (13%) proviennent des erreurs fortuites et de l'incertitude relative au nombre d'Avogadro ; mais aussi, du fait que si l'électron subit une résistance ou une agitation thermique du milieu, l'inertie apparente en est augmentée. — Dans tous les cas, la moyenne adoptée sera un repère commode pour la comparaison critique des résultats expérimentaux.

$$\left| P_c \right| = 2 \frac{\mu m}{c^2} \cdot r \left(\frac{d\varphi}{dt} \right)^2 = 2 \frac{\mu m}{c^2} \cdot \frac{\mathcal{A}^2}{r^3}.$$

(\mathcal{A} , constante des aires.)

$$\text{Si } \mu = f \cdot M = k^2, \quad \mathcal{A}^2 = \mu p,$$

il s'ensuit

$$\left| P_c \right| = 2 G^2 \mu m \cdot \frac{p}{r^3}.$$

La loi d'attraction dérivant de $P_o \mp P_c$ est

$$F = - \frac{\mu m}{r^2} \left[1 \mp \frac{6 G^2}{r^2} \cdot p \right] = - \frac{\mu m}{r^2} \left[1 \mp \frac{6 G^2}{r} \right];$$

elle contient en particulier $\Phi = - \frac{\mu m}{r^2} \left[1 + \frac{\varepsilon}{2r} \right]$ (cas de Mercure).

Ainsi, le terme en r^{-4} (ou r^{-3}) ajouté à la loi de Newton est de l'ordre du carré de l'aberration.

2° Dans le cas d'une propagation rectiligne de la lumière ($v = r' = c$), l'énergie cinétique est constante. L'effet dynamique annule l'effet statique ; cette propriété définit la constante c .

Si la lumière se meut dans les milieux illimités 1 et 2 (densités d_1 et d_2 , potentiels C_1 et C_2), séparés par une surface infiniment mince, le rapport des sinus à l'incidence et à la réfraction est

selon la théorie de l'émission (Newton-Maupertuis) : $\rho = \frac{V_2}{V_1^2}$;

selon la théorie des ondulations (Huygens-Fermat) : $\rho = \frac{V_1}{V_2}$.

Dans le premier cas, le principe de la moindre action est applicable. A la manière de Maupertuis (qui néglige la courbure du rayon au passage de 1 à 2), l'action d'une particule lumineuse est

$$A = m_1 V_1 s_1 + m_2 V_2 s_2, \quad \text{d'où}$$

$$\rho = \frac{m_2 V_2}{m_1 V_1} = \frac{V_1}{V_2} \quad (\text{puisque } m_1 V_1^2 = m_2 V_2^2).$$

Les deux théories sont alors compatibles. Les grains d'énergie sont émis constamment, dans tous les sens, par les charges électriques ; ils vibrent sous l'influence du champ électromagnétique ; leur trajectoire moyenne est rectiligne. L'éther, ce « sujet métaphys-

sique du verbe onduler » n'existe pas. Le vide non plus, puisque l'espace est traversé sans trêve par le rayonnement des corps. Sous cette forme, on voit reparaître la « matière subtile » de Descartes.

3^o Un rayon lumineux, dont la source est à une distance pratiquement infinie, pénètre dans le champ gravitaire de M avec la vitesse $r' = c$. La particule m est soumise au potentiel

$$\begin{aligned} P &= \frac{\mu m}{r} \left[1 + \frac{1}{c^2} (2v^2 - r'^2) \right] = \frac{\mu m}{r} \left\{ 1 + \frac{1}{c^2} \left[c^2 + 2r^2 \left(\frac{d\varphi}{dt} \right)^2 \right] \right\} = \\ &= \frac{2\mu m}{r} + \frac{2\mu m}{c^2} \cdot r \left(\frac{d\varphi}{dt} \right)^2 = 2P_0 + P_e . \end{aligned}$$

En première approximation, quand r est petit,

$$(11) \quad P = \frac{2\mu m}{r} = 2P_0 .$$

Les choses se passent comme si la particule m était déviée parce que pesante et parce que lumineuse, les deux effets se juxtaposant.

Ce résultat est conforme au *principe de superposition* (Lorentz, Ritz).

III. — Le mouvement quasi newtonien et la relativité¹⁾.

Dans sa théorie de la gravitation, M. Einstein est conduit à ajouter un terme en r^{-4} à la loi de Newton²⁾.

L'orbite d'une planète est déterminée par l'équation

$$(12) \quad \left(\frac{d\rho}{d\varphi} \right)^2 = \frac{h}{\mathcal{A}^2} + \frac{2\mu}{\mathcal{A}^2} \cdot \rho - \rho^2 + 2\mu\rho^3$$

[$\rho = \frac{1}{r}$; la vitesse de la lumière est $c = 1$; le terme complémentaire $2\mu\rho^3$ est donc de l'ordre de G^2 .]

¹⁾ A. Einstein. *Erklärung der Perihelbewegung des Merkur aus der allgemeinen Relativitätstheorie* (1915).

²⁾ Clairaut voulut expliquer ainsi le mouvement du périhélie de la lune. Buffon le contredit par des raisons tirées de la métaphysique et de l'algèbre élémentaire. Clairaut fut ramené à la loi de Newton par des calculs plus précis, qui le mirent « à l'abri des chicanes de la physique ».

(HISTOIRE de l'Académie royale des Sciences de Paris, MDCCXLV.)

L'avance du périhélie est donnée, pour un tour, par

$$(13) \quad \delta\omega = \frac{24\pi^3 a^2}{c^2 T^2 (1 - e^2)} = 6\pi \cdot \frac{n^2 a^3}{c^2 p} = \frac{3 G^2}{p} \cdot 2\pi,$$

valeur identique à (7).

La forme (12) ne s'adapte ni au calcul de n de la lune, ni à celui de δ des planètes en général. (Elle donne $\delta_3 = 4''$ et $\delta_4 = 1'', 5.$) C'est que le terme complémentaire rigide ne peut tenir compte de l'ensemble des actions perturbatrices.

*

Examinons les deux effets physiques signalés par M. Einstein, savoir

- 1^o la déviation des rayons lumineux dans un champ gravitaire,
- 2^o le déplacement des raies du spectre solaire.

1^o M. Einstein applique le principe d'Huygens à un rayon lumineux, d'origine stellaire, pénétrant dans le champ du soleil.¹⁾

Comme celle de Newton, l'optique de M. Einstein satisfait au principe de la moindre action ; il n'en est pas ainsi de la théorie d'Huygens. L'appliquer au problème, c'est concilier implicitement les deux théories et présupposer une déviation. Pour un rayon stellaire passant dans le voisinage du soleil, à la distance périhélie q , cette déviation est alors mesurée par le petit angle $\Theta = \frac{4 G^2}{q}$.

D'autre part, une masse électromagnétique m , soumise à l'attraction du soleil, est déviée ; le mouvement est hyperbolique, parabolique ou elliptique suivant que r_0 est supérieur, égal ou inférieur à $2G^2$; dans le premier cas, la déviation totale est $\frac{2 G^2}{q} = \frac{1}{2} \Theta$.

L'accord se rétablit si l'on prend (3^o, p. 246) :

$$P = \frac{2 \mu m}{r} = 2 P_0.$$

¹⁾ Newton déjà liait les phénomènes de réfraction et d'attraction (LES PRINCIPES MATHÉMATIQUES DE LA PHILOSOPHIE NATURELLE, L. I^{er}, XIV^{me} section) : un corpuscule lumineux attiré (ou poussé) normalement d'un milieu vers l'autre, décrit un petit arc de parabole, à la manière d'un projectile de Galilée.

Le théorème de l'énergie donne alors

$$V^2 - c^2 = \pm \frac{4\mu m}{r}, \quad \text{d'où } \frac{V}{c} = 1 \pm \frac{2G^2}{r}.$$

La trajectoire est l'hyperbole dont les demi-axes sont

$$a = 2G^2, \quad b = q \left(1 + \frac{2G^2}{q} \right);$$

le petit angle extérieur des asymptotes est mesuré (en première approximation), par

$$\Theta = 2 \cdot \frac{a}{b} = \frac{4G^2}{q}.$$

On sait que ce résultat a été confirmé, avec une précision fort remarquable, par des savants anglais (MM. Eddington, Crommelin, Davidson), lors de l'éclipse totale du 29 mai 1919. Le résultat prévu, $\Theta = 1'',74$ est compris entre les résultats de l'observation en deux stations indépendantes, savoir :

à l'île du Prince (Golfe de Guinée), $\Theta = 1'',61$,
à Sobral (au nord du Brésil), $\Theta = 1'',98$. ¹⁾

Ceux en qui l'usage a engrainé la croyance désuète à la réalité de la matière et même à la réalité du soleil admettront comme plausible un effet de réfraction par quoi un rayon stellaire est dévié dans le même sens que par l'attraction solaire ; dès lors, Θ observé peut être égal ou supérieur au chiffre calculé. Toutefois, avant qu'une détermination numérique s'impose, des séries d'expériences seront nécessaires. Nul ne songe à contester l'indépendance d'esprit et l'habileté des éminents opérateurs anglais ; mais leur méthode est discutée ; M. Hamy, entre autres, en préconise une nouvelle, qui doit permettre de mesurer Θ en dehors des éclipses. Le problème pratique n'est donc pas définitivement résolu.

Si la valeur moyenne de Θ est plus grande que $\frac{4G^2}{q}$, on pourra en tirer des indications sur la densité moyenne du milieu solaire traversé.

¹⁾ A. S. Eddington, ESPACE, TEMPS ET GRAVITATION (trad. J. Rossignol). L'ouvrage magistral du savant professeur de Cambridge contient notamment la mise au point et l'extension des théories relativistes généralisées.

- 2^o** Deux particules lumineuses semblables vibrent :
la première, M, à la surface du soleil
(distance SM = r ; vitesse V = N. λ);
la seconde, M₁, à la surface de la Terre
(distance TM₁ = r_1 ; vitesse V₁ = N₁. λ).

M et M₁ étant à peu près alignés sur la droite TS (sinon certains termes seront multipliés par des cosinus), le théorème de l'énergie s'applique ainsi :

dans le cas de M,

$$V^2 - c^2 = - \frac{2\mu}{r} + \frac{2fm_1}{a-r};$$

dans le cas de M₁,

$$V_1^2 - c^2 = - \frac{2fm_1}{r_1} + \frac{2\mu}{a-r_1};$$

$$\left[TS = a = 1; \quad \frac{\mu}{V^2} = G^2 \text{ (à peu près)}; \quad fm_1 = \frac{\mu}{333.432} \right].$$

Donc,

$$V^2 - V_1^2 = - 2\mu \left[\frac{1}{r} + \frac{1}{a-r_1} \right] + 2fm_1 \left[\frac{1}{r_1} + \frac{1}{a-r} \right];$$

soit, en première approximation :

$$\begin{aligned} V^2 - V_1^2 &= - \frac{2\mu}{r}; & \frac{V}{V_1} &= 1 - \frac{G^2}{r}; & \text{d'où} \\ \frac{N - N_1}{N_1} &= - \frac{G^2}{r}, & N &< N_1. \end{aligned}$$

La particule solaire vibre plus lentement que la particule terrestre ; le déplacement *maximum* des franges spectrales vers le rouge est mesuré par $\frac{G^2}{r}$.¹⁾

Le potentiel P₀ suffit à rendre compte du phénomène ; mais, à l'observation, cet effet peut être atténué, annulé, contrarié par d'autres : réfractions anormales dans l'atmosphère du soleil, variations

¹⁾ Les expériences de MM. St-John, Schwarzschild, Evershed, etc. ont donné un déplacement moyen inférieur à celui qu'annonçait la théorie. — En revanche, les expériences de MM. Grebe et Bachem, Pérot, Buisson et Fabry confirment les prévisions de M. Einstein.

Il serait intéressant de connaître, dans chaque cas, la valeur approchée de l'angle MSM₁.

accidentelles du champ électromagnétique local (en M), etc. Des séries d'expériences seront donc nécessaires pour éliminer les écarts fortuits provenant de l'activité de l'astre, sans parler de ceux qui sont dûs à l'atmosphère terrestre et aux opérateurs.

Des différences d'effet constatées au centre et sur les bords du soleil renseigneraient sur le mode vrai de propagation de la lumière, et sur la solidité des hypothèses implicites qui sont les étais de notre calcul.

Quels que soient, d'ailleurs, les résultats du contrôle expérimental, le mérite de la découverte demeure acquis, pour les faits physiques en question, à M. Einstein et à lui seul. Mais comme ces faits s'expliquent aussi par le potentiel newtonien, on ne saurait tirer des observations aucun argument sur le caractère *objectif* de la relativité généralisée. Cette synthèse grandiose s'affirme, à tout le moins, comme un précieux instrument de recherche ; elle découvre bien des choses ; elle les explique même,... à la condition d'en sortir.

Ce n'est point diminuer le relativisme, c'est au contraire en souligner l'intérêt que d'énoncer cet axiome :

De par la nature même de nos moyens de contrôle, tous les faits nouveaux découverts grâce à la relativité sont et seront interprétables dans l'espace euclidien et le temps terrestre.

Ce temps n'a rien d'universel en soi. C'est un temps local, nécessaire aux Telluriens pour repérer les faits universels, et commode, au sens que donnait à ce mot Henri Poincaré. Laplace ayant su voir la meilleure définition possible des unités principales, la vitesse de la lumière elle-même s'exprime simplement en fonction du tour ou du rayon de notre cadran, la Terre. On ne saurait désirer mieux.

Il convient de rendre un juste hommage à l'œuvre monumentale de M. Einstein ; armé de l'instrument mathématique forgé par Riemann, Christoffel, Ricci et Levi-Civitâ, adapté par M. Grossmann, — il a édifié un système de généralisation admirable, où l'intuition d'un grand physicien vient seconder et féconder la logique d'un grand mathématicien.

Quant à discuter la question de savoir si l'univers est euclidien ou einsteinien, c'est proprement philosopher. M. Einstein a écrit ceci (en 1915) : Dans la relativité généralisée, « l'espace et le temps sont

dépouillés des dernières traces de réalité objective. » Et ceci (en 1920) : cette théorie « ne peut ni ne veut donner aucun système du monde, mais seulement une condition restrictive à laquelle les lois de la nature doivent se soumettre ».¹⁾ Par malheur, en science comme en art, les disciples s'imaginent que pour surpasser le Maître, il est nécessaire et suffisant de déformer sa pensée.

Outre sa loi, qui durera tant qu'il y aura des mondes, Newton a laissé ce précepte, qui mérite de durer tant qu'il y aura des physiciens : « Physique, garde-toi de la métaphysique. »

15 juin—15 octobre 1921.

¹⁾ « La théorie de la relativité a passé en revue tous les sujets de la physique. Elle a unifié les grandes lois qui, par la précision dans la forme et la rigueur dans l'application, ont conquis dans la science humaine la place d'honneur que la physique occupe aujourd'hui. Et pourtant, en ce qui concerne la nature des choses, cette science n'est qu'une forme vide — un échafaudage de symboles... » (A. S. Eddington.)

Ch. Bührer. — La hauteur moyenne de la pluie à Montreux est de 1078 mm. (Moyenne de 35 ans : 1864-1870 et 1884-1911)

Nous avons par saisons :

199 mm. en hiver, 236 mm. au printemps, 352 mm. en été et 261 mm. en automne.

Les années les plus pluvieuses de cette série ont été 1866 avec 1662 mm. et 1867 avec 1610 mm.; les plus sèches, 1906 avec 761 mm. et 1893 avec 822 mm. En 1920, nous avons recueilli 764 mm. et 1921, 545 mm.

La période sèche a débuté ici avec le printemps 1920, qui a fourni 192 mm. d'eau, soit un déficit de 72 mm. L'été, avec 346 mm. était normal, mais l'automne, avec 125 mm. montre un déficit de 136 mm. Les moins-values de l'année 1921 vont en augmentant, comme il est aisément de le voir, d'après les chiffres suivants : hiver 95 mm., printemps 156 mm., été 229 et automne 70 mm.

C'est l'automne qui a été relativement la saison la plus sèche dans ces deux dernières années. Avec la nouvelle année, le cycle paraît être rompu ; nous avons en effet mesuré 131 mm. dans le mois de janvier, tandis que la moyenne de ce mois est de 54 mm.