

Zeitschrift: Bulletin de la Société Vaudoise des Sciences Naturelles
Herausgeber: Société Vaudoise des Sciences Naturelles
Band: 52 (1918-1919)
Heft: 195

Artikel: Recherches sur la théorie des déformations des systèmes élastiques
[suite et fin]
Autor: Mayor B.
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-270189>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 12.01.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

Recherches sur la théorie des déformations des systèmes élastiques¹

PAR

B. MAYOR, professeur.

CHAPITRE IV

La correspondance entre les systèmes articulés à trois dimensions et les systèmes complexes.

27. Des considérations en tout point semblables à celles qui précèdent peuvent être étendues aux systèmes articulés à trois dimensions du type habituellement envisagé en statique graphique. Elles conduisent à des formules et à des développements analytiques rigoureusement identiques à ceux qui précèdent et qui font prévoir qu'il existe d'étroites relations entre les systèmes articulés de l'espace et ceux du plan. D'ailleurs, comme je l'ai montré dans une note très succincte² que je me propose précisément de développer ici, il est possible de faire correspondre à tout système articulé gauche du type ordinaire un système articulé plan qui le représente complètement au point de vue de la statique graphique, puisque cette correspondance est telle que le calcul du système plan entraîne le calcul immédiat du système de l'espace.

Pour établir cette propriété, considérons préalablement un complexe linéaire Γ dont l'axe coïncide avec

¹ Voir Bull. Soc. Vaud. Vol. 50. N° 182.

² Comptes Rendus, 30 août 1915.

l'axe Oz d'un système coordonné et dont le paramètre a ne soit ni nul ni infini. Utilisant une terminologie proposée par M. Lazzeri et qui simplifie le langage, convenons d'appeler *antiprojection* d'un vecteur V , la projection sur le plan des xy du conjugué de ce vecteur par rapport au complexe Γ . Cette antiprojection V' est définie analytiquement dès que l'on connaît ses projections X' et Y' sur les axes Ox et Oy , ainsi que son moment N' par rapport au point O . Ces quantités, que l'on peut appeler les coordonnées de V' , sont liées aux projections X, Y, Z du vecteur V par les relations ¹

$$X' = -X, Y' = -Y, N' = aZ$$

qui vont jouer un rôle essentiel.

Ces préliminaires posés, envisageons un système articulé gauche S possédant m barres et n nœuds, h de ces nœuds étant assujettis à glisser sans frottement sur des surfaces données. Désignons d'une manière générale par X_i, Y_i, Z_i les projections de la force extérieure F_i qui sollicite l'un quelconque, P_i , de ces nœuds et par X_i', Y_i', N_i' les coordonnées de l'antiprojection F_i' de cette force, de sorte que

$$(1) \quad X_i' = -X_i, Y_i' = -Y_i, N_i' = aZ_i.$$

Soient ensuite A_{ik}, B_{ik}, C_{ik} les projections d'un vecteur V_{ik} d'intensité arbitrairement choisie, admettant pour ligne d'action l'axe de la barre de longueur l_{ik} qui réunit les nœuds P_i et P_k , et pour sens celui qui va de P_i à P_k . En désignant alors par $A_{ik}', B_{ik}', H_{ik}'$ les coordonnées de l'antiprojection V_{ik}' de ce vecteur, on aura

$$(2) \quad A_{ik}' = -A_{ik}, B_{ik}' = -B_{ik}, H_{ik}' = aC_{ik}$$

En admettant e fin que P_r représente un nœud

¹ B. Mayor, statique graphique des systèmes de l'espace, p. 49.

assujetti à demeurer sur une surface donnée, nous désignerons par A_r , B_r , C_r les projections d'un vecteur V_r dont l'intensité et le sens peuvent être arbitrairement choisis, mais dont la ligne d'action se confond avec la normale au point P_r de la surface correspondante. Les coordonnées A_r' , B_r' , H_r' de l'antiprojection V_r' de ce vecteur sont alors données par les formules

$$(3) \quad A_r' = -A_r, B_r' = -B_r, H_r' = a C_r.$$

Dans ces conditions, les règles de la statique permettent de faire correspondre, à tout nœud libre tel que P_i , trois équations de la forme

$$(4) \quad \left\{ \begin{array}{l} X_i + \sum_i T_{ik} \frac{A_{ik}}{V_{ik}} = 0, \\ Y_i + \sum_i T_{ik} \frac{B_{ik}}{V_{ik}} = 0, \\ Z_i + \sum_i T_{ik} \frac{C_{ik}}{V_{ik}} = 0, \end{array} \right.$$

et, à tout nœud tel que P_r assujetti à une liaison, trois équations du type

$$(5) \quad \left\{ \begin{array}{l} X_r + R_r \frac{A_r}{V_r} + \sum_r T_{rs} \frac{A_{rs}}{V_{rs}} = 0, \\ Y_r + R_r \frac{B_r}{V_r} + \sum_r T_{rs} \frac{B_{rs}}{V_{rs}} = 0, \\ Z_r + R_r \frac{C_r}{V_r} + \sum_r T_{rs} \frac{C_{rs}}{V_{rs}} = 0, \end{array} \right.$$

dans lesquelles T_{ik} et R_r représentent la tension engendrée dans la barre l_{ik} et la réaction exercée sur le nœud P_r , tandis que le symbole \sum_i indique une somme dont les termes correspondent aux diverses barres issues du nœud P_i .

En désignant ensuite par x_i, y_i, z_i les coordonnées du nœud P_i , par $\delta x_i, \delta y_i, \delta z_i$ les projections du déplacement supposé infiniment petit Δ_i que subit ce nœud sous l'action des forces extérieures et par δl_{ik} l'allongement de la barre l_{ik} , on a immédiatement

$$(x_i - x_k)(\delta x_i - \delta x_k) + (y_i - y_k)(\delta y_i - \delta y_k) + (z_i - z_k)(\delta z_i - \delta z_k) = l_{ik} \delta l_{ik}$$

D'ailleurs, par définition même du vecteur V_{ik} on peut écrire

$$x_i - x_k = -\frac{A_{ik}}{V_{ik}} l_{ik}, \\ y_i - y_k = -\frac{B_{ik}}{V_{ik}} l_{ik}, \quad z_i - z_k = -\frac{C_{ik}}{V_{ik}} l_{ik},$$

tandis qu'en vertu d'une formule élémentaire de la résistance des matériaux

$$\delta l_{ik} = \mu_{ik} T_{ik},$$

μ_{ik} désignant un coefficient qui caractérise la barre considérée au point de vue de l'élasticité et que nous appellerons son *module*.

Dans ces conditions, la relation précédente peut être mise sous la forme

$$(6) \quad A_{ik}(\delta x_i - \delta x_k) + B_{ik}(\delta y_i - \delta y_k) + C_{ik}(\delta z_i - \delta z_k) = -\mu_{ik} V_{ik} T_{ik},$$

et il est bien évident qu'aux m barres du système correspondent m équations de ce type.

Enfin, le déplacement du nœud P_r doit s'opérer sur une surface donnée. Par définition même de V_r , il est

normal à ce vecteur et l'on peut écrire encore h équations de la forme

$$(7) \quad \dots \quad A_r \delta x_r + B_r \delta y_r + C_r \delta z_r = 0 .$$

Les équations (4), (5), (6) et (7) sont au nombre de $3n + m + h$. Elles permettent donc, lorsque leur déterminant ne s'annule pas, c'est-à-dire dans tous les cas où le système envisagé remplit les conditions qui autorisent son emploi dans l'art de la construction, de déterminer les tensions de toutes les barres, les réactions de toutes les liaisons et les déplacements de tous les nœuds. Ce sont en définitive les équations fondamentales dont dépend tout le calcul du système S, mais pour faire apparaître la relation qui lie les systèmes de l'espace à ceux du plan, il est nécessaire de les transformer.

Or en désignant par T_{ik}' et R_r' les projections sur le plan des $x y$ de la tension T_{ik} et de la réaction R_r on a immédiatement

$$\frac{T_{ik}}{V_{ik}} = \frac{T_{ik}'}{V_{ik}'} , \quad \frac{R_r}{V_r} = \frac{R_r'}{V_r'}$$

Posons ensuite

$$(8) \quad \delta x_i = -\eta_i' \delta \omega_i' , \quad \delta y_i = \xi_i' \delta \omega_i' , \quad \delta z_i = a \delta \omega_i'$$

et remarquons tout de suite que ces formules sont susceptibles d'une interprétation géométrique simple. Si l'on désigne, en effet, par Δ_i' l'antiprojection du déplacement Δ_i du nœud P_i , on vérifie sans peine que le pôle de la ligne d'action de Δ_i' par rapport à une circonférence imaginaire décrite du point O comme centre avec un rayon égal à $a\sqrt{-1}$ admet précisément pour coordonnées les quantités ξ_i' et η_i' .

En tenant alors compte de ces derniers résultats ainsi que des formules (1), (2) et (3), on voit immédia-

tement que les équations fondamentales (4), (5), (6) et (7) prennent respectivement les formes suivantes

$$(4') \quad \left\{ \begin{array}{l} X_i' + \sum_i T_{ik}' \frac{A_{ik}'}{V_{ik}'} = 0, \\ Y_i' + \sum_i T_{ik}' \frac{B_{ik}'}{V_{ik}'} = 0, \\ N_i' + \sum_i T_{ik}' \frac{H_{ik}'}{V_{ik}'} = 0, \end{array} \right.$$

$$(5') \quad \left\{ \begin{array}{l} X_r' + R_r' \frac{A_r'}{V_r'} + \sum_r T_{rs}' \frac{A_{rs}'}{V_{rs}'} = 0 \\ Y_r' + R_r' \frac{B_r'}{V_r'} + \sum_r T_{rs}' \frac{B_{rs}'}{V_{rs}'} = 0, \\ N_r' + R_r' \frac{H_r'}{V_r'} + \sum_r T_{rs}' \frac{H_{rs}'}{V_{rs}'} = 0 \end{array} \right.$$

$$(6') \quad \begin{aligned} & A_{ik}, (\eta_k' \delta\omega_k' - \eta_i' \delta\omega_i') + \\ & + B_{ik}' (\xi_i' \delta\omega_i' - \xi_k' \delta\omega_k') - H_{ik}' (\delta\omega_i' - \delta\omega_k') = \\ & = T_{ik}' \mu_{ik} \frac{V_{ik}^2}{V_{ik}'} ; \end{aligned}$$

$$(7') \quad A_r' \eta_r' - B_r' \xi_r + H_r' = 0.$$

Il est évident que, comme celles dont elles dérivent, ces équations permettent le calcul complet du système S. Elles donnent, en effet, les projections de toutes les tensions et de toutes les réactions sur le plan des xy , et, par l'intermédiaire des formules (8), les déplacements de tous les nœuds.

Ces résultats obtenus, considérons un système articulé complexe S', entièrement contenu dans le plan des xy et constitué de la manière suivante :

Sur la ligne d'action de chaque vecteur tel que V_{ik}' , choisissons deux points, P_i' et P_k' , astreints à la seule

condition que le sens qui va de P_i' à P_k' soit précisément celui de V_{ik}' , et supposons que ces points limitent une barre l_{ik}' appartenant à S' et caractérisée par un module μ_{ik}' vérifiant la relation

$$(9) \quad \mu_{ik}' V_{ik}'^2 = \mu_{ik} V_{ik}^2.$$

A toute barre de S correspond ainsi une barre de S' , tandis qu'à chaque nœud P du premier système correspondent autant de points distincts P_i' qu'il y a de barres aboutissant à ce nœud. Admettons alors que tous ces points P_i' se confondent avec les centres d'une série d'articulations à l'aide desquelles on attache les barres correspondantes de S' à une même plaque (P_i') infiniment mince, mais absolument rigide et de forme arbitraire. Dans ces conditions, aux n nœuds de S correspondent, dans S' , un même nombre de plaques (P_i') qui peuvent se superposer partiellement, mais que nous supposons libres de se déplacer les unes par rapport aux autres dans la mesure où le permet l'élasticité des barres qui les réunissent. Admettons encore que toute plaque (P_r') qui correspond à un nœud non libre P_r de S soit assujettie à la liaison suivante : un point invariablement lié à cette plaque et choisi sur la ligne d'action de V_r' est astreint à glisser sans frottement sur une courbe située dans le plan des xy et normale à cette ligne d'action.

Comme nous allons le montrer, le système S' ainsi constitué représente complètement, au point de vue de la statique graphique, le système S .

Admettons en effet qu'une plaque quelconque de S' soit sollicitée par une force représentée par l'antiprojection de la force extérieure appliquée au nœud correspondant de S .

Si l'on exprime en premier qu'une plaque telle que

(P_i') demeure en équilibre sous l'action de la force extérieure F_i' qui y est appliquée et des tensions des barres correspondantes, tensions que nous désignerons d'une façon générale par T_{ik}' , on obtient des équations rigoureusement identiques aux équations (4').

De même, si l'on envisage une plaque telle que (P_r'), en exprimant que la force extérieure F_r' et la réaction de la liaison correspondante, que nous désignerons par R_r' , font équilibre aux tensions correspondantes, on obtient encore des équations identiques aux équations (5').

Considérons ensuite la barre l_{ik}' et les deux plaques (P_i') et (P_k') sur lesquelles ses extrémités sont attachées. Lorsque le système S' se déforme sous l'action des forces extérieures, (P_i') et (P_k') subissent dans le plan des xy des déplacements très petits que l'on peut assimiler à des rotations $\delta\omega_i'$ et $\delta\omega_k'$ s'opérant autour de centres dont les coordonnées seront désignées par ξ_i' , η_i' et ξ_k' , η_k' . Dans ces conditions la barre l_{ik}' subit un allongement $\delta l_{ik}'$ que l'on peut facilement déterminer. La projection, sur la direction du vecteur V_{ik}' qui coïncide en direction avec l_{ik}' , du déplacement du point d'attache P_i' de cette barre avec la plaque (P_i') est égal, en effet, au quotient par V_{ik}' du moment relatif de la rotation $\delta\omega_i'$ et du vecteur V_{ik}' . En d'autres termes, il a pour valeur

$$\frac{1}{V_{ik}'} [A'_{ik} \eta_i' - B'_{ik} \xi_i' + H'_{ik}] \delta\omega_i'.$$

Une expression analogue donne la projection sur la même direction du point d'attache P_k' d'où il résulte que l'allongement $\delta l_{ik}'$ de la barre est donné par la formule

$$\delta l_{ik}' = \frac{1}{V_{ik}'} [A'_{ik} (\eta_k' \delta\omega_k' - \eta_i' \delta\omega_i') - B'_{ik} (\xi_k' \delta\omega_k' - \xi_i' \delta\omega_i') + H'_{ik} (\delta\omega_k' - \delta\omega_i')].$$

En tenant alors compte de la relation (9) on voit immédiatement que les tensions produites dans les diverses barres du système S' vérifient des relations identiques aux équations (6').

Les liaisons auxquelles les plaques telles que (P_r') sont assujetties conduisent facilement enfin à h relations de la forme

$$A_{r'} \eta_{r'} - B_{r'} \xi_{r'} + H_{r'} = 0,$$

et qui sont par conséquent identiques aux équations (7').

En définitive, les relations dont dépend le calcul complet de S' sont exactement les mêmes que celles qui correspondent à S . Le calcul de S' entraîne donc celui de S , de sorte qu'au point de vue de la statique graphique, le premier de ces systèmes représente complètement le second. Il convient cependant de noter qu'au point de vue de la géométrie cette représentation est incomplète, car il est manifestement impossible, lorsqu'on se donne uniquement le système S' , de retrouver la forme et la position de S .

D'autre part, le complexe Γ pouvant être arbitrairement choisi, à un même système S correspondent une infinité de systèmes S' ; en revanche, à un système S' complètement arbitraire, ne correspond, en général, aucun système S .

