

Zeitschrift: Bulletin de la Société Vaudoise des Sciences Naturelles
Herausgeber: Société Vaudoise des Sciences Naturelles
Band: 51 (1916-1917)
Heft: 191

Artikel: Transformation d'une série double
Autor: Paschoud, Maurice
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-269910>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 13.01.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

Transformation d'une série double

PAR

MAURICE PASCHOUD

1) Dans une note des Comptes Rendus de l'Académie des Sciences, t. 158, p. 1743, note relative au problème du régime uniforme dans un tube de section carrée, j'ai indiqué une expression curieuse, en série double, du coefficient k , caractéristique de la forme carrée, à savoir la formule :

$$(1) \quad k = \left(\frac{2}{\pi}\right)^6 \sum_m \sum_n \frac{1}{m^2 n^2 (m^2 + n^2)}$$

où $m = 1, 3, 5, \dots$; $n = 1, 3, 5, \dots$

Cette série double permet, bien plus facilement que les expressions de k données autrefois par Fourier, par de Saint-Venant et plus récemment par M. Boussinesq, de calculer la valeur numérique de k .

Cependant, il faut prendre environ cent termes de la série (1) pour avoir k avec une erreur relative de moins de un dix millième.

2) Je vais montrer que l'on peut transformer la série double (1) en une série simple si rapidement convergente qu'il suffit d'en calculer trois termes pour obtenir cette approximation du dix-millième.

On peut écrire :

$$\begin{aligned} k &= \left(\frac{2}{\pi}\right)^6 \sum_n \frac{1}{n^2} \left[\sum_m \frac{1}{n^2} \left(\frac{1}{m^2} - \frac{1}{m^2 + n^2} \right) \right] \\ &= \left(\frac{2}{\pi}\right)^6 \left[\sum_n \frac{1}{n^4} \sum_m \frac{1}{m^2} - \sum_n \frac{1}{n^4} \sum_m \frac{1}{m^2 + n^2} \right]. \end{aligned}$$

Or, on sait que : (Voir par ex., Fabry, *Théorie des séries à termes constants*, p. 87 et suivantes)

$$\sum_{m=1,3,5,\dots} \frac{1}{m^2} = \frac{\pi^2}{8} \quad \text{et} \quad \sum_{n=1,3,5,\dots} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{96}$$

D'autre part, au moyen des méthodes de sommation de Cauchy, (Voir, Collection Borel, *Le calcul des résidus*, par M. Lindelöf, p. 54) ou par une méthode élémentaire que j'exposerai plus loin, on trouve que

$$\sum_{m=1,3,5,\dots} \frac{1}{(2\nu - 1)^2 + m^2} = \frac{\pi}{4(2\nu - 1)} \operatorname{th} \frac{(2\nu - 1)\pi}{2}$$

où $\operatorname{th} x = \text{tangente hyperbolique de } x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$

En tenant compte de ces expressions, il vient :

$$\begin{aligned} k &= \left(\frac{2}{\pi}\right)^6 \frac{\pi^2}{2^3} \cdot \frac{\pi^4}{3 \cdot 2^5} - \left(\frac{2}{\pi}\right)^6 \frac{\pi}{2^2} \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{(2\nu-1)^5} \operatorname{th} \frac{(2\nu-1)\pi}{2} \\ &= \frac{1}{12} - \frac{2^4}{\pi^5} \left[\operatorname{th} \frac{\pi}{2} + \frac{1}{3^5} \operatorname{th} \frac{3\pi}{2} + \frac{1}{5^5} \operatorname{th} \frac{5\pi}{2} + \dots \right] \end{aligned}$$

Le 1^{er} terme de cette série donne $k = 0,035375$; deux termes donnent $k = 0,035160$; enfin, avec trois termes, on obtient $k = 0,035143$, valeur exacte au dix millième près.

Le convergence est donc très rapide.

3) On peut calculer avec une grande approximation une limite supérieure de l'erreur commise quand on s'arrête à un terme déterminé de la série des th.

Supposons en effet que le dernier terme calculé dans cette série soit $\frac{1}{(2n-1)^5} \operatorname{th} \frac{(2n-1)\pi}{2}$ où n a une valeur déterminée. Appelons R le reste de la série.

Puisque les th sont toujours inférieures à 1, on a

$$R < \frac{1}{(2n+1)^5} + \frac{1}{(2n+3)^5} + \dots$$

$$\text{ou } R < \frac{1}{2n+1} \left[\frac{1}{(2n+1)^4} + \frac{1}{(2n+3)^4} + \dots \right]$$

ou enfin

$$R < \frac{1}{2n+1} \left[\frac{\pi^4}{96} - \frac{1}{1} - \frac{1}{3^4} - \dots - \frac{1}{(2n-1)^4} \right]$$

L'expression dans le crochet se calcule facilement si n a une valeur déterminée.

4) Voyons maintenant comment on peut obtenir, par une méthode élémentaire, la relation

$$\sum_{m=1,3,5,\dots} \frac{1}{(2n-1)^2 + m^2} = \frac{\pi}{4(2n-1)} \operatorname{th} \frac{(2n-1)\pi}{2}$$

que j'ai utilisée plus haut.

Je partirai de l'expression bien connue du cosinus en produit infini.

$$\text{On a } \cos x = \prod_{\nu=1}^{\infty} \left(1 - \frac{4x^2}{(2\nu-1)^2 \pi^2} \right)$$

Or, on sait que l'on passe du cosinus au cosinus hyperbolique au moyen de la relation $\cos ix = \operatorname{ch} x$.

Il viendra donc en remplaçant x par ix dans la relation ci-dessus

$$\operatorname{ch} x = \prod_{\nu=1}^{\infty} \left(1 + \frac{4x^2}{(2\nu-1)^2 \pi^2} \right)$$

d'où, en prenant le logarithme,

$$\log \operatorname{ch} x = \sum_{\nu=1}^{\infty} \log \cdot \left(1 + \frac{4x^2}{(2\nu-1)^2 \pi^2} \right)$$

En dérivant, il vient enfin,

$$\operatorname{th} x = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{8x}{(2\nu-1)^2\pi^2 + 4x^2},$$

$$\text{ou } \operatorname{th} x = 8x \left[\frac{1}{\pi^2 + 4x^2} + \frac{1}{(3\pi)^2 + 4x^2} + \dots \right]$$

En faisant $x = \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{a}{b}}$, on obtient

$$\operatorname{th} \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{a}{b}} = 8 \cdot \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{a}{b}} \left[\frac{1}{\pi^2 + 4 \frac{\pi^2 a}{4} \frac{1}{b}} + \frac{1}{(3\pi)^2 + 4 \cdot \frac{\pi^2 a}{4} \frac{1}{b}} + \dots \right]$$

ou

$$\begin{aligned} \operatorname{th} \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{a}{b}} &= 4\pi \sqrt{\frac{a}{b}} \cdot \frac{b}{\pi^2} \left[\frac{1}{a+b} + \frac{1}{a+3^2 b} + \dots \right] \\ &= \frac{4}{\pi} \sqrt{ab} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a+(2n-1)^2 b} \end{aligned}$$

et par suite

$$\frac{\pi}{4\sqrt{ab}} \operatorname{th} \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{a}{b}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a+(2n-1)^2 b}$$

Si l'on fait $b = 1$ et $a = (2\nu-1)^2$ il vient finalement

$$\sum_{m=1,3,5,\dots} \frac{1}{(2\nu-1)^2 + m^2} = \frac{\pi}{4(2\nu-1)} \operatorname{th} \frac{(2\nu-1)\pi}{2}$$

C'est la relation qu'il s'agissait d'obtenir.