

Zeitschrift: Bulletin de la Société Vaudoise des Sciences Naturelles
Herausgeber: Société Vaudoise des Sciences Naturelles
Band: 50 (1914-1915)
Heft: 182

Artikel: Procédé rapide d'extraction des racines cubiques
Autor: Jaccard, E.
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-269624>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 14.01.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

Procédé rapide d'extraction des racines cubiques.

PAR

E. JACCARD

La question de l'extraction des racines cubiques a beaucoup fait parler d'elle en 1913, et des quotidiens comme le *Matin* en France, la *Gazette de Lausanne* et la *Tribune de Lausanne* chez nous en ont longuement entretenu leurs lecteurs,

Tout cela parce que les chevaux d'Elberfeld ont passionné l'opinion. M. Quinton, réfutant la valeur de certaines expériences dont ces chevaux ont été les sujets, a montré qu'il est facile de donner, par un calcul relativement simple et rapide, la racine cubique d'un nombre dans une foule de cas. Toutefois son procédé appliqué à des nombres qui ne sont pas des cubes parfaits demande une très forte mémoire et une grande habileté de calcul mental; et dans la bonne moitié des cas l'approximation n'est que très grossière et incertaine. (Tous les exemples de calculs donnés dans les numéros 1079, 1082 et 1083 de *La Nature*, où il est question du procédé de M. Quinton, sont des exemples où le premier chiffre de la racine est élevé et le suivant faible, seul cas favorable à ce calcul.)

L'annonce des résultats obtenus par M. Quinton m'ayant beaucoup intrigué, j'ai abordé de mon côté l'étude de cette question. Après avoir fait certaines constatations faciles qui expliquent le procédé de M. Quinton, une

étude systématique de la question m'a conduit au **procédé nouveau** que j'exposerai un peu plus loin.

Avant de commencer cet exposé, je ferai quelques *remarques générales* :

L'extraction des racines cubiques repose sur l'identité bien connue :

$$(a + b)^3 = a^3 + 3 a^2 b + 3 a b^2 + b^3;$$

cette identité peut d'ailleurs, dans les applications numériques, recevoir plusieurs interprétations différentes.

Si l'on suppose que $(a + b)^3$ est le cube parfait d'un nombre entier dont a exprime le nombre total des dizaines et b le chiffre des unités, alors a^3 exprime des milliers : de là le partage connu en tranches de trois chiffres, à partir des unités du nombre dont on veut extraire la racine.

I. Dans le *procédé classique d'extraction*, on extrait la racine de la tranche de gauche considérée isolément, puis on extrait la racine du nombre entier formé par les deux tranches de gauche prises à part (c'est-à-dire en ignorant ce qui est à leur droite), ceci en appliquant l'identité comme elle a été interprétée ci-dessus ; puis on extrait au moyen de ce premier résultat la racine du nombre entier formé par les trois tranches de gauche, par une nouvelle application de l'identité ; etc... Dans la première application de l'identité, a représente le chiffre de gauche de la racine ; dans la seconde application, a représente l'ensemble des deux premiers chiffres de gauche de la racine, etc..., b représentant dans chaque application le nouveau chiffre cherché.

Chaque application de l'identité demande de former les quantités $3 a^2 b$, $3 a b^2$ et b^3 et de les retrancher avant de passer à la suite. D'ailleurs chacun des chiffres b successifs de la racine s'obtient en divisant le reste auquel on est arrivé par la quantité $3 a^2$ correspondante,

au risque de trouver pour b un chiffre trop fort (ce qu'indiquera un nouveau reste trop grand et demandera de recommencer avec un b plus petit).

Exemple. Le nombre 306 542 394 donne :

1° $306 = 6^3 +$ un reste 90 (donc premier chiffre de la racine 6), reste par suite 905 du rang suivant; en divisant ce reste par 3 fois b^2 ou 108 on trouve 8 pour le chiffre suivant de la racine, mais l'essai de ce chiffre montre qu'il est trop fort, il faut prendre 7 et l'on a :

2° $306542 = 60^3 + \underbrace{3 \times 60^2 \times 7} + \underbrace{3 \times 60 \times 7^2} + 7^3 +$ un reste
d'où $90542 = 3 \times 60^2 \times 7 + 3 \times 60 \times 7^2 + 7^3 +$ reste;
ou 84763 + reste; en retranchant 84763, il reste 5779,
d'où reste 57793 du rang suivant; en divisant ce reste
par 3 fois 67^2 ou 13467, on trouve 4 pour le chiffre suivant de la racine, et l'on a :

3° $306542394 = 670^3 + \underbrace{3 \times 670^2 \times 4} + \underbrace{3 \times 670 \times 4^2} + 4^3 +$ un r.
etc.

On trouve pour la racine cherchée 674 à une unité près par défaut.

Les calculs sont longs et fastidieux, sujets à des recommencements; en outre chaque nouveau chiffre exige des calculs plus longs que ceux du chiffre précédent.

II. Méthode d'abréviation, d'application incertaine. —

Les considérations suivantes permettraient d'abréger souvent le calcul, moyennant quelque habileté du calculateur.

L'identité déjà considérée peut recevoir une autre interprétation : le nombre dont on veut extraire la racine étant représenté par $(a + b)^3$, si a représente le chiffre des plus hautes unités de la racine, b représente l'ensemble des chiffres suivants. Pour plus de simplicité, nous supposons que le nombre donné n'a qu'une tranche à la partie entière.

En enlevant du nombre donné la valeur de a^3 , il reste

encore $3a^2b + (3ab^2 + b^3)$; en divisant ce reste par $3a^2$, on obtient parfois, non seulement le premier chiffre de b , mais *deux* chiffres successifs ou même plus, suivant les grandeurs relatives de a et de b : plus b est petit par rapport à a , et d'ailleurs plus a est grand, plus aussi le terme $3ab^2$ est négligeable devant $3a^2b$ (et b^3 par rapport à $3ab^2$), et plus la division unique par $3a^2$ donnera de chiffres successifs de b ; et si b est assez petit on pourra même alors modifier légèrement la valeur de $3a^2$ pour avoir un diviseur plus simple (sans fausser le résultat à l'approximation considérée).

Ces considérations éclairées à l'aide des exemples suivants font comprendre en principe les procédés de M. Quinton.

Exemple : $\sqrt[3]{514,650} = ?$

$512 = 8^3$ est le plus grand cube contenu dans 514; on le retranche, reste 2,650. Dans ce cas $a = 8$ et $3a^2 = 192$ (environ 200); si l'on divise 2650 par 192, on trouve 0,0133* pour b , d'où 8,0133 pour la racine cherchée, et il se trouve que la valeur obtenue ainsi est exacte à 0,0004 près (mais on ne voit pas nettement pourquoi). D'ailleurs si l'on divise le reste 2,650 par 200, au lieu de 192, on a la même approximation, et tout le calcul peut se faire de tête.

Si l'on procède pareillement pour 306,542, on trouve pour la racine 6,84 au lieu de 6,74 valeur véritable : l'erreur porte donc *déjà sur le second chiffre* de la racine, trop grand de 1 unité.

Dans le premier exemple, on a $b = \frac{1}{800} a$ seulement, donc très petit; dans le deuxième $b > \frac{1}{10}$ de a .

Mais si dans le second exemple on suppose connu le

carré de 6,5 que l'on prend comme valeur de a , et si l'on connaît également par cœur la valeur de $3a^2$, on trouvera pour la partie complémentaire de la racine $b = 0,25$ et pour la racine 6,75, valeur exacte à 0,01 près (cette fois-ci $b = \frac{1}{25} a$ environ).

On voit par ces exemples qu'en connaissant par cœur les cubes approchés d'un nombre suffisant de nombres de deux chiffres (une quinzaine au moins), et les valeurs correspondantes approchées de $3a^2$ (il convient de forcer légèrement ces deux valeurs), on peut achever par une division unique l'extraction de la racine cubique, avec une approximation souvent suffisante, mais cependant toujours incertaine, et faire au besoin le tout mentalement.

Si cette manière de faire peut, ce qui est probable, expliquer les procédés des calculateurs prodiges, et faire paraître leurs prouesses moins prodigieuses, ainsi qu'a voulu le prouver pratiquement M. Quinton, il n'en est pas moins vrai qu'elle nécessite un gros effort de mémoire, une grande habileté de calcul mental, si l'on veut opérer de tête, et qu'il est pour le moins fort exagéré de dire qu'elle donne une approximation de 5 unités de la quatrième figure (cela n'est pas même vrai pour le tiers des cas).

III. Pour compléter ces considérations préliminaires, nous allons voir qu'il est très facile de deviner à vue (ou à audition) du nombre donné, la racine cubique d'un cube entier parfait de deux tranches (4 à 6 chiffres) :

En effet, appelons a et b les deux chiffres de cette racine; si l'on connaît par cœur les cubes 1, 8, 27, 64, 125, 216, 343, 512, 729 des neuf premiers nombres entiers, la tranche de gauche du nombre donné fournit a à vue (par le plus grand cube qu'elle contient); la tranche de droite fournit le chiffre b par la remarque suivante:

Les cubes de 1; 4, 5, 6 et 9 se terminent respective-

ment par ces mêmes chiffres 1, 4, 5, 6 et 9; et les cubes de 2, 3; 7 et 8 se terminent respectivement par le complément à 10 de ces chiffres-là, 8, 7; 3, et 2.

Exemple : $\sqrt[3]{97,336} = 46$; car 97 renferme $64 = 4^3$ (et non $125 = 5^3$) et 336 se termine par 6

$\sqrt[3]{571,787} = 83$; car 571 renferme $512 = 8^3$ et 787 se termine par 7 comme le cube de 3 ($3 + 7 = 10$)

Il est facile encore (cela demande quelques secondes) de trouver de tête la racine cubique d'un *cube parfait de trois tranches* : la tranche de gauche donne à vue le chiffre de gauche de la racine, la tranche de droite donne le chiffre de droite selon qu'il vient d'être dit ; il *suffit* donc de *calculer le chiffre du milieu* seulement : Ex.

$\sqrt[3]{553\cdot387\cdot661} = ?$ La racine a un 8 à gauche $512 = 8^3$, et un 1 à droite ($1^3 = 1$) ; puis $553 - 512 = 41$; divisons cette différence par 19 (puisque $3a^2 = 192$) on trouve 2 pour le chiffre du milieu ; donc racine cherchée = 821.

On peut même parfois atteindre avec facilité les racines de cubes parfaits de 4 tranches.

IV

Exposé du procédé nouveau découvert par l'auteur de ce mémoire.

Soit donné un nombre quelconque entier ou fractionnaire, dont on veut extraire la racine cubique ; si l'on multiplie ou divise ce nombre par une puissance quelconque de 1000, sa racine sera multipliée ou divisée par la même puissance de 10 (c'est-à-dire de même exposant).

[En effet si $\sqrt[3]{n} = r$, $\sqrt[3]{n \times 1000^p} = r \times 10^p$]

Par suite, pour simplifier l'exposition, nous supposerons

que le nombre donné n'a qu'une tranche à la partie entière, et que par conséquent la racine cherchée est comprise entre 1 et 10, c'est-à-dire n'a qu'un chiffre à la partie entière.

D'ailleurs un nombre quelconque étant donné, et ce nombre étant partagé en tranches de trois chiffres à partir de la virgule décimale, la racine a autant de chiffres à la partie entière que le nombre considéré a de tranches à la partie entière, et cette remarque suffit pour placer la virgule décimale à sa place dans le résultat final. On pourra donc toujours, dans le nombre donné, reporter provisoirement la virgule décimale à droite de la tranche de gauche, et nous supposerons dans la suite qu'on a opéré ainsi (ce qui ne diminue en rien la généralité du procédé).

Partons de l'identité déjà rappelée :

$(a + b)^3 = a^3 + 3 a^2 b + 3 a b^2 + b^3$; $(a + b)^3$ représentant alors le nombre quelconque dont on veut extraire la racine (modifié comme on vient de le voir, s'il y a lieu), $(a + b)$ en est la *racine intégrale* (le plus souvent incommensurable); *en appelant a le chiffre des unités de la racine cherchée, b représente la partie décimale intégrale* (autrement dit l'ensemble des chiffres suivants).

Si du nombre considéré nous *retranchons* a^3 , c'est-à-dire le plus grand cube entier contenu dans la tranche entière, il reste :

$$r = 3 a^2 b + 3 a b^2 + b^3 \quad \text{ou} \\ 3 a (a + b) b + b^3.$$

1° Cette forme, du reste, m'a suggéré l'idée de le diviser par $3 a$, ce qui donne la quantité :

$$(a + b) b + \frac{b^3}{3a} \quad \left(= \frac{r}{3a} \right),$$

et d'examiner si la quantité $\frac{b^3}{3a}$ n'est pas négligeable (vu sa petitesse) dans un calcul d'approximation (ce sont les

seuls qu'on fasse dans la pratique). *Supposons, jusqu'à examen de la question, qu'il en est bien ainsi*; le reste divisé par 3 a peut alors s'écrire simplement

$$(a + b) b \quad \left(= \frac{r'}{3a} \right)$$

2° J'ai eu ensuite l'idée de poser :

$$b = b' + b'' + b''' + \dots$$

b', b'', b''', \dots désignant les *chiffres successifs* de la partie b ; la quantité $(a + b) b$

$$\text{ou } (a + b' + b'' + b''' + \dots) (b' + b'' + b''' + \dots) \left(= \frac{r'}{3a} \right)$$

peut sans peine se *transformer*, en effectuant les produits et en mettant ensuite en évidence les facteurs $b', b'', b''' \dots$ et devient :

$$\begin{aligned} & (a + b') b' + (a + 2b' + b'') b'' \\ & + (a + 2b' + 2b'' + b''') b''' + \dots \left(= \frac{r'}{3a} \right) \end{aligned}$$

b' exprimant des dixièmes, b'' des centièmes, b''' des millièmes, etc...., d'après nos conventions, on voit que : $(a + b')$ exprime des dixièmes, et $(a + b') b'$ des centièmes; $a + 2b' + b''$ exprime des cent. et $(a + 2b' + b'') b''$ exprime des dix-mil. $(a + 2b' + 2b'' + b''')$ exprime des mill. et $(a + 2b' + b''') b'''$ exprime des millionièmes....

Il résulte de la nouvelle forme que l'on a pu donner ainsi au reste modifié $\left(\frac{r'}{3a} \right)$, que si l'on divise le nombre total des centièmes de ce reste par $(a + b')$, c'est-à-dire-*approximativement le nombre des dixièmes par a*, on trouvera la valeur du chiffre b' , dont on vérifiera d'ailleurs la justesse en retranchant le produit facile $(a + b') b'$; la soustraction doit pouvoir se faire, et on aura un *nouveau reste* qui doit être *plus petit que* $(a + b')$ unités de l'ordre des centièmes.

En divisant le nombre total des dix-millièmes de ce

nouveau reste par $(a + 2b' + b'')$, c'est-à-dire *approximativement le nombre des centièmes par a* [ou encore celui des millièmes par $(a + 2b')$], on trouvera la valeur du chiffre b'' , dont on vérifiera d'ailleurs la justesse en retranchant le produit facile $(a + 2b' + b'') b''$; la soustraction doit pouvoir se faire, et on aura un *nouveau reste* qui doit être *plus petit que* $(a + 2b' + b'')$ unités de l'ordre des dix-millièmes.

En divisant le nombre total des millionièmes de ce nouveau reste par $(a + 2b' + 2b'' + b''')$, c'est-à-dire *approximativement le nombre des millièmes par a* [ou encore celui des dix-millièmes par $(a + 2b')$], on trouvera la valeur du chiffre b''' , dont on vérifiera d'ailleurs la justesse en retranchant le produit facile $(a + 2b' + 2b'' + b''') b'''$; la soustraction doit pouvoir se faire, et on aura un *nouveau reste* qui doit être *plus petit que* $(a + 2b' + 2b'' + b''')$ unités d'ordre des millionièmes.

etc....

On pourrait continuer ainsi, et **obtenir sûrement, en faisant en somme de simples divisions par un nombre d'un chiffre avec quotient d'un chiffre, tous les chiffres successifs de la partie b** que l'on voudrait, sans la pré-

sence dans le reste $\frac{r}{3a}$ du terme $\frac{b^3}{3a}$. En réalité on sera

arrêté dès que ce terme $\frac{b^3}{3a}$ ne sera plus négligeable devant

une des parenthèses successives, ou plus exactement devant le produit de cette parenthèse par l'unité décimale correspondante.

Les parenthèses ci-dessus sont des nombres faciles à former : dans chacune d'elles on a *les chiffres successifs de la racine pris à double, sauf le premier a et le dernier obtenu à ce moment-là*. Ayant ces chiffres sous les yeux, comme on a à en faire le produit par un nombre d'un

seul chiffre, le dernier obtenu à la racine, on peut procéder comme dans une multiplication ordinaire, en *doublant à mesure les produits partiels intermédiaires* entre ceux provenant des chiffres extrêmes, et *opérer la soustraction de ce produit en même temps*, si l'on a l'habitude d'opérer la soustraction par addition; le calcul est ainsi très réduit ainsi que l'écriture. D'ailleurs, si l'on préfère, on indiquera, à droite, comme dans les exemples suivants, les valeurs des multiplicandes les unes sous les autres, chaque nouveau multiplicande dérivant du précédent en doublant le dernier chiffre de celui-ci et en indiquant à sa droite le nouveau chiffre obtenu comme quotient (puis on inscrira à gauche chaque produit sous la quantité dont on doit le soustraire).

Il résulte de l'étude faite que, *pour les soustractions successives à opérer, on doit abaisser chaque fois deux chiffres pour l'opération nouvelle, et qu'on avance chaque fois d'un rang dans le choix du nouveau dividende partiel à diviser par a.*

Toutefois, comme il est très facile, on va le voir, et très expéditif, de reconnaître, dès que b' est calculé, quelle est l'approximation que l'on peut obtenir au résultat, on négligera dans les derniers calculs toutes les décimales d'un ordre inférieur à celui qu'on ne dépassera pas au résultat, ou mieux on en gardera une de plus, comme le montrent les exemples de calcul suivants.

Approximation obtenue en négligeant le terme $\frac{b^3}{3a}$
Corrections partielles.

Si l'on forme le tableau des valeurs de $\frac{b^3}{3a}$ pour toutes les valeurs de a de 1 à 9, et toutes les valeurs de b par dixièmes de 0,1 à 1,0, on constate que la division par $(a+b')$ de ces valeurs donne toujours moins de 0,1, sauf dans le seul cas où $a=1$ $b > 0,8$ (où il vaut 0,1 environ) :

Le procédé donne donc dans tout les cas deux chiffres à la racine sans correction.

Si l'on divise les valeurs de $\frac{b^3}{3a}$ par $(a+2b')$, le quotient est moindre que 0,01 *toutes les fois* que l'on aura :

$$a \leq 4 \text{ avec } b < 0,9$$

(sauf justement pour $a=4$ $b=0,9$ où le quotient est 0,01 environ). On verra que *tous les autres cas peuvent* immédiatement *se ramener à ceux-là* en multipliant ou divisant par 8, si $a=3$ ou 2 ou 1, ou en modifiant un peu le procédé si $b > 0,9$.

L'erreur sur le calcul de la racine sera donc au plus de l'ordre de b''' et sa valeur sera approximativement le quotient de $\frac{b^3}{3a}$ par $(a+2b')$.

*En calculant seulement le chiffre significatif de gauche de la valeur $\frac{b^3}{3a(a+2b)}$, donc en prenant $a+2b'$ à 1 près et pour b la plus rapprochée des valeurs b' et $b'+0,1$ qui la comprennent, on aura du même coup l'approximation à laquelle peut prétendre le calcul, et la correction soustractive à apporter au premier chiffre faussé ; le calcul additionnel demande deux ou trois secondes, et se fait dès que b' est connu. En résumé : **Le procédé donnera toujours, dans les conditions indiquées, trois figures au moins de la racine sans correction aucune, et quatre figures au moins avec une correction extrêmement rapide.***

En calculant la petite correction dès que b' est calculé, on ne risquera pas de faire des calculs illusoires en poussant le travail trop loin.

Voici quelques valeurs extraites du tableau général de ces erreurs : avec $b=0,1$ l'erreur est de 0,0003 pour

$a=1$, de 0,00007 pour $a=2$, de 0,000 009 pour $a=6$; avec $b=0,5$, l'erreur est de 0,007 pour $a=2$ et de 0,0005 pour $a=9$; enfin avec $b=0,9$, l'erreur n'est encore que de 0,007 pour $a=5$ et de 0,002 pour $a=9$.

— — —

Si l'on a besoin d'une exactitude plus grande, on peut encore obtenir plusieurs figures de plus au résultat par une série de corrections successives, et, dans ce cas encore, l'ensemble des calculs est considérablement plus court que dans le procédé classique. Ces corrections, qui sont les valeurs des différentes parties de b , se font alors directement sur la valeur notée plus haut r , ou dividende général, par soustractions successives, progressivement après chaque figure nouvelle.

Remarquons pour cela que :

$$\begin{aligned}(b' + b'')^3 &= b'^3 + 3 b' (b' + b'') b'' + b''^3 \\(b' + b'' + b''')^3 &= (b' + b'')^3 + 3(b' + b'')(b' + b'' + b''')b''' \\&\quad + b'''^3 \\(b' + b'' + b''' + b^{iv})^3 &= (b' + b'' + b''')^3 + 3(b' + b'' + b''') \\&\quad \times (b' + b'' + b''' + b^{iv}) b^{iv} + b^{iv3} \\&\quad \text{etc...}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{d'où} \quad \frac{b^3}{3a} &= \frac{b'^3}{3a} + \frac{b''^3}{3a} + \frac{b'''^3}{3a} + \dots + \\&\quad + \frac{b' (b' + b'')b''}{a} + \frac{(b' + b'')(b' + b'' + b''')b'''}{a} \\&\quad + \frac{(b' + b'' + b''')(b' + b'' + b''' + b^{iv}) b^{iv}}{a}\end{aligned}$$

Dans les conditions supposées, $a > 4$ et $b < 0,9$, on a :

$$\frac{b'^3}{3a} < \frac{0,730}{12} \text{ où } 0,06 \text{ environ; } \frac{b''^3}{3a} < 0,00006 \text{ environ;}$$

$$\frac{b'''^3}{3a} < 0,00000006 \dots \text{ etc.}$$

puis

$$\frac{b'(b' + b'')b''}{a} < 0,2 b''; \frac{(b' + b'')(b' + b'' + b''')b'''}{a}$$

$$< 0,2 b'''; \text{ etc...}$$

Ces termes correctifs sont d'un calcul facile et rapide ; par exemple, pour $b = 0,8457$, on a

$$\frac{(b' + b'' + b''')(b' + b'' + b''' + b^{IV})b^{IV}}{a} =$$

$$= \frac{845 \times 8457 \times 7}{a} \text{ unités du } 11^{\text{me}} \text{ ordre décimal}$$

$$(3^{\text{me}} + 4^{\text{me}} + 4^{\text{me}}).$$

On voit par l'analyse ci-dessus que les soustractions successives doivent se faire dans l'ordre suivant :

$$\begin{array}{ll} 1^{\text{re}} \text{ correction } \frac{b'^3}{3a} & \text{dès que } b' \text{ est calculé} \\ 2^{\text{me}} \text{ » } \frac{b'(b' + b'')b''}{a} & \text{dès que } b'' \text{ est calculé} \\ 3^{\text{me}} \text{ » } \frac{(b' + b'')(b' + b'' + b''')b'''}{a} & \text{dès que } b''' \text{ est calculé} \\ 4^{\text{me}} \text{ » } \frac{b''}{3a} & \text{(on peut faire cette correction après la suivante)} \\ 5^{\text{me}} \text{ » } \frac{(b' + b'' + b''')(b' + b'' + b''' + b^{IV})b^{IV}}{a} & \end{array}$$

dès que b^{IV} est calculé

etc...

En s'arrêtant à la 5^{me} correction, l'erreur sur le résultat final sera plus petite que $\frac{0,2 b}{a}$ ou $0,05 b^V$ environ ; on aura donc au moins 6 figures de b et 7 figures à la racine (la correction n'interviendrait qu'en 8^e rang au plus tôt). D'ailleurs, les corrections n^o 1, n^o 2 et n^o 4 pourront

presque toujours se faire en une fois, après le calcul de b'' , sous la forme de $\frac{(b' + b'')^3}{3a}$, et l'on passera ensuite aux corrections n° 3 et n° 5.

Il n'arrivera que *très rarement* qu'une soustraction ne pourra pas s'opérer par suite d'un b trop fort, et cela seulement à propos d'un chiffre 9 ; on en sera quitte pour recommencer le calcul du dernier chiffre inscrit en diminuant ce chiffre d'une unité.

Remarque. — Suivant le nombre de chiffres que l'on désire à la racine, on arrêtera tous les calculs à l'ordre décimal du dernier chiffre à calculer, ou par sécurité à l'ordre suivant.

Remarque. — Les produits $b'(b' + b'')$; $(b' + b'')(b' + b'' + b''')$; $(b' + b'' + b''')(b' + b'' + b''' + b^{iv})$ se déduisent avec facilité l'un de l'autre, en les considérant provisoirement comme des nombres entiers, par exemple le 3^{me} vaut 100 fois le précédent + $(b' + b'' + b''')(b''' + b^{iv})$, etc..., chaque nouveau produit parenthèse ne nécessite qu'une multiplication par un nombre de deux chiffres.

Remarque. — On peut avoir avec le système de corrections, autant de figures que l'on veut, toutefois cela oblige à prendre ce nombre de figures dès le début pour tous les calculs successifs de correction. Mais, contrairement alors à ce qui arrive dans le procédé classique, les calculs diminuent de longueur à mesure que l'on approche de la fin.

Chaque terme correctif exprime des unités mille fois plus petites que celle du terme correctif précédent de même type ; cette remarque permet d'en faire le calcul en les regardant provisoirement comme nombres entiers

Exemples de calcul.

$$\sqrt[3]{544,835} = ?$$

	544,835	$a \ b' \ b'' \ b''' \ b^{iv}$
$- a^3$	$- 512$	8,167508
	32,835	
$: 3a \left\{ \begin{array}{l} : a \text{ ou } 8 \\ : 3 \end{array} \right.$	4,104375	81×1 centièmes
	$\boxed{1,3}68125 \left(= \frac{r}{3a} \right)$	826×6 dix-millièmes
	$- 81$	8327×7 millionièmes
	$\boxed{55}81$	83345×5 cent-millionièmes
$13 : 8 = 1$	$- 49 \ 56$	<i>Calcul de l'erreur :</i>
$55 : 8 = 6$	$\boxed{62}525$	$b^3 = \text{env. } \frac{0,006}{3 \times 8 \times 8,3}$
$62 : 8 = 7$	$- 58 \ 289$	$3a(a + 2b') = \frac{0,001}{4 \times 8,3} \times \text{env. } 0,00003$
	$\boxed{42}3600$	mieux :
$42 : 8 = 5$	41 6725	$17 \quad 4913 \text{ millionièmes}$
	$\boxed{68}75$	$\times 17 : 8 \dots 614$
$6 : 8 = 0$	8,167508	$119 : 3 \dots 205$
$68 : 8 = 8$	$- 25$	$17 : 8 \dots 25$
	8,167483	289
		$\times 17$
		2023
		289
		4913

Donc $\sqrt[3]{544,835} = 8,167483$

avec une erreur en tout cas inférieure à 0,000005.

Même calcul en disposition réduite :

544,835	8,167508
32	
4,104375	Pour retrancher par exemple de 62525 le produit de 8327×7 sans l'écrire, on regarde 8167 écrit ci-dessus, et l'on dit : 7 fois 7 ... 49 ... et 6 (que j'inscris) ... 55 ; je retiens 5 ; 7 fois 6 ... 42 ... doublé 84 ... et 5 ... 89 ... et 3 (que j'inscris) ... 92 ; je retiens 9 ; 7 fois 1 ... 7 ... doublé 14 ... et 9 ... 23 ... et 2 (que j'inscris) ... 25 ; je retiens 2 ; 7 fois 8 ... 56 ... et 2 ... 58 ... et 4 (que j'inscris) ... 62.
1,368125	
5581	
62525	
4236	
67	

2^e exemple. $\sqrt[3]{306,542\cdot394} = ?$

(Voir plus haut méthode classique.)

En disposition réduite, pour 3 figures.

306,54	6,74(5)
90	
30,18	
503	
34	
4	

3^e exemple. — Voici un dernier exemple, $\sqrt[3]{115,865}$, le moins favorable possible au calcul, puisqu'il est à l'extrême limite des conditions supposées jusqu'ici, à savoir $a \geq 4$ avec $b < 0,9$ — On y trouve pour b' presque 0,9, d'où pour $\frac{b'}{3a}$ environ 0,01 ; donc il faut inscrire pour b'' 0,07 au lieu de 0,08.

115,865	4,875·106	1 ^{re} cor. $\left[\frac{0,8^3 + 0,07^3}{3} + 0,8 \times 0,87 \times 0,07 \right] : 4$	
— 64	48 × 8		
51,865	567 × 7	2 ^{me} » $\frac{87 \times 875 \times 5}{4} : 10^8$	
{ : 4 12,966·25	5745 × 5		
{ : 3 4,322·083	575 01 × 1	3 ^{me} » $\frac{875 \times 8751 \times 1}{4} : 10^{11}$	
— 3,84	57 ... × 0		
,482 0	5 ... × 6		
— 396 9			
,085 183	0,512·343	87 × 8 × 7	875 × 87
Corr. — 54 875	: 3 0,170·781	696 × 7	6125
,030·308	48 72	4872	7000 (2 ^{me} corr.)
— 28 725	0,219·501	(1 ^{re} correct.)	76125 : 4
,001·583	: 4 0,054·875		19031 × 5
Corr. — 952			952 du 6 ^e ordre déc.
,000·631			
— 575		3 ^{me} corr. 19 × 1	
56			
Corr. — 19			
37			
— 34			
3			

$\sqrt[3]{115,865} = 4,875 \cdot 106 \text{ à } 0,000.001 \text{ près.}$

$$\sqrt[3]{115,865} = 4,875 \cdot 106 \text{ à } 0,000.001 \text{ près.}$$

Cas où $a = 1, 2, 3$.

Pour ces valeurs de a , l'erreur provenant du fait de négliger le terme $\frac{b^3}{3a}$ est trop grande. Il est *extrêmement facile de remédier* à cet inconvénient majeur : Remarquons, en effet, que si l'on **multiplie le nombre donné par 8**, c'est-à-dire 2^3 , la racine est doublée, donc si a était primitivement 2, on aura $a = 4$ ou 5 dans la transformée, et si a était primitivement 3, on aura $a = 6$ ou 7 dans la transformée; il n'y aura dès lors plus d'empêchement à appliquer le procédé et *il suffira de prendre la moitié du résultat trouvé*.

[Il peut même y avoir avantage à faire cette si minime transformation pour $a = 4$ avec un b un peu grand.]

Enfin, si $a = 1$, cas encore plus défavorable, nous remarquons qu'il suffit de **diviser le nombre donné par 8** ou 2^3 , et qu'alors la racine étant de ce fait divisée par 2, son premier chiffre sera 5 ou plus; l'empêchement disparaît encore avec une simplicité parfaite et *il suffira de doubler le résultat trouvé*.

Le procédé est donc applicable à tous les cas, avec un égal succès, si l'on a $b < 0,9$. Cette dernière restriction sera levée un peu plus loin par une modification du procédé lui-même, applicable à ce cas spécial.

[On peut remarquer encore qu'au cas où $a = 1$, en multipliant le nombre par 8×8 , la racine est multipliée par 2×2 , et qu'il suffit de prendre le quart du résultat, l'erreur primitive étant ainsi elle-même divisée par 4.]

Soit par exemple à prendre la racine cubique de 17 856 763. En considérant 17, 856·763 on aurait $a^3 = 8$, $a = 2$; il y a donc lieu de multiplier d'abord par 8 avant d'opérer le travail d'extraction qui se fait ainsi sur le nombre 142,854 104 et donne 5,2276; la moitié de ce

résultat donne 2,61380, d'où pour la racine cherchée 261,380 à 0,005 près.

Soit en second lieu à prendre la racine cubique de 6 498,532. En considérant 6498,532, on aurait $a^3 = 1$, $a = 1$; il faut donc diviser le nombre donné par 8 d'abord, et opérer sur le résultat 812,3165 ; on a cette fois $a^3 = 729$, $a = 9$. On trouve ainsi pour la racine cherchée $9,3306 \times 2 = 18,6612$ à 0,0002 près.

*Cas où l'on désire un grand nombre de figures
au résultat.*

On a vu que le procédé peut donner autant de figures à la racine que l'on veut, mais qu'il faut pratiquer un système de corrections successives. On peut encore procéder comme suit :

Supposons qu'on ait appliqué le procédé au nombre donné et qu'on ait déterminé ainsi 3 figures exactes de la racine ; on pourra reprendre le calcul, et le continuer de la manière suivante : Reportons la virgule décimale, dans le nombre donné, à droite de la 3^{me} tranche dès la gauche, et par suite dans la racine à droite du 3^{me} chiffre, dès la gauche. C'est ce nombre entier de trois chiffres que nous allons appeler maintenant a ; et b sera la partie décimale complémentaire. Cette nouvelle application du procédé ne différera de la précédente qu'en ceci que a aura *trois chiffres consécutifs, qui ne se doublent pas dans les multiplications* (au lieu d'un). — Il faudra d'abord effectuer directement le cube de a , et le soustraire du nombre donné, puis diviser par $3a$, etc...

Comme a est plus de 100 fois plus grand dans cette seconde application que dans la première, et a^2 plus de 10 000 fois plus grand que l'ancien, l'erreur provenant du fait de négliger le terme $\frac{b^3}{3a}$ sera réduite dans le rapport de

1 à 0,0001 ; on aura de ce fait 4 décimales de plus pour b sans correction ; on aura donc au moins 6 décimales exactes pour b sans correction, d'où 9 figures exactes à la racine avant toute correction. On pourra d'ailleurs, une fois ces 6 décimales connues, calculer en bloc le système des corrections relatives à ces 6 décimales, et poursuivre après soustraction le calcul de 5 nouvelles décimales exactes, l'erreur finale étant moindre que $0,05 b^{\text{VII}} : 10000$ ou $0,000\ 005 b^{\text{VII}}$.

Exemple.

$$\sqrt[3]{836,768534} = ?$$

$$\begin{array}{r} 836,77 \\ - 729 \\ \hline 107 \\ \left. \begin{array}{l} : 3 \\ : 9 \end{array} \right\} \begin{array}{r} 35,92 \\ 3\ 99 \\ - 3\ 76 \\ \hline 23 \end{array} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 9,42 \\ \hline 94 \times 4 \\ 9|82 \times 2 \end{array}$$

On trouve ainsi 9,42
comme première approxi-
mation (le 2, par défaut).
— On a ensuite :

$$\begin{array}{r} 942 = a \\ \times 942 \times a \\ \hline 1884 \\ 3768 \\ 8478 \\ \hline 887364 = a^2 \\ \times 942 \times a \\ \hline 1774728 \\ 3549456 \\ 7986276 \\ \hline 835\cdot896\cdot888 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 836\cdot768\cdot534 \\ - 835\cdot896\cdot888 \\ \hline \end{array}$$

$$871\ 646 = 3 a^2 + 3 a b^2 + b^3$$

Division par $3 a$.

$$\begin{array}{r} 871\cdot646 : 942 \\ \hline 2384 \\ 5006 \\ 2960 \\ 1340 \\ 3980 \\ 2120 \\ 2360 \\ 4760 \\ 5000 \\ 2900 \\ 7400 \\ 8060 \end{array}$$

308,438·075·017·696		942,327315·209·514·4	
—	282 69	9423 × 3	327 × 32
	25,7480	94262 × 2	654
—	18,8524	942647 × 7	981
	6,89567·5	9426543 × 3	10464 × 7
—	6 59852·9	94265461 × 1	73248
	,297·146·01	942654625 × 5	327 × 73
—	282·796·29	94265463 02 × 2	981
	,014 349·727·6	9426546 3 × 0	2289
—	9·426·546·1	942654... × 9	23871
	,004·923·181·596	94265... × 5	1·046·400
—	4,713·273·125	9426... × 1	+ 23·871
	,000·209·908·471	942 × 4	1·070·271 × 3
Correction —	12·408·70	94... × 4	3·210·813
	197·499·771		
—	188·530·925		
	8·968·846		
—	8·483·892		
	484·954		
—	471·327		
	13627		
	9427		
	4200		
—	3771		
	429		
—	377		
	52		

Corrections.

$$\begin{aligned}
 0,3^3 + 0,02^3 + 0,007^3 &= 0,027·008·343 \\
 &: 3..... 0.009·002·781 \\
 3 \times 32 \times 2 : 10^5 & 1·920·000 \\
 32 \times 327 \times 7 : 10^8 & 732·480 \\
 327 \times 3273 \times 3 : 10^{11} & 32108 \\
 3273 \times 32731 \times 1 : 10^{14} & 1071 \\
 107,1 \times 5 : 10^9 & 536 \\
 10,7 \times 2 & 21 \\
 1,07 \times 0,9 & 1 \\
 \text{Total } 0,011·688·998 &
 \end{aligned}$$

$$0,011·688·988 : 942$$

2268

3849

8198

662

3

$$0,000·012·408·7$$

donc $\sqrt[3]{836,768534} = 9,423·273·152·095·144$ à

0,000·000·000·000·001 près.

16 figures (calcul complet).

Procédé indirect

(pour le cas où b serait très grand dans le procédé direct).

Si la tranche de gauche du nombre donné est de très peu inférieure à un cube parfait, on ne représentera plus le nombre donné par $(a+b)^3$ et sa racine par $(a+b)$, car la valeur de b serait très voisine de 1, condition défavorable au calcul. On représentera alors le nombre donné par $(a-b)^3$, et sa racine intégrale par $(a-b)$; alors a sera le chiffre des unités simples de la racine par excès de 1 unité, et b sera la partie décimale à en soustraire. Cette valeur de b qui sera donc la différence à 1 de l'autre sera alors une très petite valeur, condition favorable au calcul avec plusieurs figures.

On part alors de l'identité :

$$(a - b)^3 = a^3 - 3 a^2 b + 3 a b^2 - b^3$$

mais comme $a^3 < (a - b)^3$, on en tire :

$$a^3 - (a - b)^3 = 3 a^2 b - 3 a b^2 + b^3$$

$$\text{d'où } \frac{r}{3a} = (a - b) b + \frac{b^3}{3a}$$

en divisant par $3a$; et ensuite

$$\begin{aligned} \frac{r'}{3a} &= (a - b') b' + (a - 2 b' - b'') b'' + \\ &+ (a - 2 b' - 2 b'' - b''') b''' + \dots \\ &\text{en négligeant le terme } \frac{b^3}{3a} . \end{aligned}$$

On voit par là que le travail à effectuer dans le procédé indirect pour extraire la racine sera presque le même que dans le procédé direct, sauf que la première soustraction se fait dans un sens inverse (cube de a moins le nombre donné) et que dans les facteurs parenthèses, des parties soustractives remplacent des parties additives ; les parenthèses sont rapidement calculées si l'on remarque que la seconde vaut $(b' + b'')$ de moins que la première, la troisième $(b'' + b''')$ de moins que la seconde, la quatrième $(b''' + b^{iv})$ de moins que la troisième, etc...

D'ailleurs encore l'erreur due au terme $\frac{b^3}{3a}$ donne lieu à la correction finale soustractive $\frac{b^3}{3a(a-2b')}$ sur la valeur de b trouvée, ou au système des corrections soustractives successives sur la valeur de $\frac{r'}{3a}$ (dividende général).

Voici un exemple de calcul dans le procédé indirect, avec beaucoup de décimales, pour montrer l'application des corrections :

$$\sqrt[3]{115,865} = ?$$

$$\begin{array}{r}
 a^3 = 125 \\
 - \quad 115,865 \\
 \hline
 9,135 \cdot 000 \cdot 00 \\
 : 15 \quad 0,609 \cdot 000 \cdot 00 \\
 - \quad 49 \\
 \hline
 , 119 \cdot 0 \\
 - \quad 956 \\
 \hline
 , 023 \cdot 400 \\
 - \quad 19024 \\
 \hline
 4 \cdot 376 \cdot 00 \\
 1^{\text{re}} \text{ correct.} - \quad 127 \ 11 \\
 \hline
 4 \cdot 248 \cdot 89 \\
 - \quad 3804 \ 16 \\
 \hline
 444 \cdot 73 \\
 - \quad 427 \ 89 \\
 \hline
 1684 \\
 2^{\text{me}} \text{ correctc.} - \quad 275 \\
 \hline
 1409 \\
 - \quad 951 \\
 \hline
 458 \\
 - \quad 428 \\
 \hline
 30 \\
 - \quad 28 \\
 \hline
 \end{array}$$

$$5 - 0,124 \cdot 892 \cdot 96$$

$ \begin{array}{l} 49 \times 1 \\ 478 \times 2 \\ 4756 \times 4 \\ 47552 \times 8 \\ 475431 \times 9 \\ 475 \dots \times 2 \\ 47 \dots \times 9 \end{array} $	$ \begin{array}{l} 124 \times 12 \\ \hline 248 \\ 124 \\ \hline 1488 \times 4 \dots 5992 \\ 124 \times 48 \\ 992 \\ 496 \\ \hline 5952 \\ 148800 \\ 5952 \\ \hline 154752 \times 8 \dots 1238016 \\ 15 \dots \times 9 \dots 139 \\ 1 \dots \times 2 \dots 3 \end{array} $
---	---

Corrections :

$$\begin{array}{r}
 0,1^3 + 0,02^3 + 0,004^3 = 0,001 \cdot 008 \cdot 064 \\
 : 3 \dots\dots 0,000 \cdot 336 \cdot 02 \\
 1 \times 12 \times 2 : 10^5 \dots \quad 240 \cdot 00 \\
 12 \times 124 \times 4 : 10^8 \dots \quad - \quad 5952 \\
 \hline
 \text{Total} \quad 0,000 \cdot 635 \cdot 54 \\
 : a \text{ ou } 5 \quad 0,000 \cdot 12711 \\
 \hline
 124 \times 1248 \times 8 : 10^{11} \quad 1238 \\
 1248 \times 12489 \times 9 : 10^{14} \quad 139 \\
 \hline
 \text{Total} \quad 1377 \\
 : a \text{ ou } 5 \quad 275
 \end{array}$$

$$\begin{aligned}
 & 5 - 0,124 \cdot 892 \cdot 96 = \\
 & = 4,875 \cdot 107 \cdot 04 \\
 \sqrt[3]{115,865} & = 4,875 \cdot 107 \cdot 04 \quad \text{à } 0,000 \cdot 000 \cdot 01 \text{ près.}
 \end{aligned}$$

Conclusion.

Un exposé théorique de la question était nécessaire pour montrer les bases du procédé et l'approximation possible. J'ai d'ailleurs calculé les exemples donnés avec beaucoup de figures, pour que l'on puisse juger de l'étendue du procédé.

Mais si l'on se borne au cas pratique de 4 figures, on reconnaîtra sans peine que le procédé est d'une application tout à fait générale, facile, extra-rapide, et qu'il est possible d'en donner facilement une explication toute mécanique en permettant l'emploi. Son approximation dépasse celle de la règle à calcul, et le calcul d'une racine exige une trentaine de secondes pour 4 figures.

ANNEXE

DE LA RACINE CARRÉE

On peut donner du procédé classique d'extraction de la racine carrée l'exposé théorique suivant que m'a suggéré l'étude de la racine cubique.

De l'identité

$$(a + b)^2 = a^2 + 2 a b + b^2$$

on tire $(a + b)^2 - a^2 = 2 a b + b^2 = (2 a + b) b (= r)$;
en posant $b = b' + b'' + b''' + \dots$

pour mettre en évidence les chiffres successifs de b , on a

$$\begin{aligned}
 r &= (2a + b')b' + (2a + 2b' + b'')b'' + \\
 &+ (2a + 2b' + 2b'' + b''')b''' + \dots
 \end{aligned}$$

[a représente d'après les mêmes conventions que dans le chapitre précédent le chiffre des unités simples de la racine et b la partie décimale].

Le quotient de r par $2a + b'$, ou $2a$ environ, donne le chiffre b' ; on retranche $(2a + b')b'$; le quotient du nouveau reste par $(2a + 2b' + b'')$ ou $2a$ environ donne le chiffre b'' ; on retranche le produit $(2a + 2b' + b'')b''$, etc...

Le travail d'extraction de la racine carrée dans le procédé classique est donc exactement le même que pour l'extraction de la racine cubique dans le procédé que j'ai exposé plus haut, sauf que 2 a remplace a dans les divisions partielles et dans les produits à retrancher et qu'il n'y a pas à diviser par 3 a. C'est dire que mon procédé pour la racine cubique est aussi commode que le procédé classique pour la racine carrée, si l'on se borne au cas de 4 figures.

[Si l'on divise r par $2a$ dans l'expression ci-dessus, on a $\frac{r}{2a} = b + \frac{b^2}{2a}$; il suffirait donc, pour avoir b

seul de retrancher de ce reste modifié $\frac{r}{2a}$, successivement les différentes parties de $\frac{b^2}{2a} = \frac{b'^2}{2a} + \frac{b''^2}{2a} + \frac{b'''^2}{2a} + \dots$

+ $\frac{bb'}{a} + \frac{(b + b')b''}{a} + \frac{(b + b' + b'')b'''}{a} + \dots$

suiuant un ordre facile à établir ; on aurait ainsi pour l'extraction de la racine carrée l'équivalent du procédé exposé pour l'extraction de la racine cubique ; toutefois ce procédé n'est vraiment bien avantageux que pour le cas où b est petit.]

