Zeitschrift: Bulletin de la Société Vaudoise des Sciences Naturelles
Herausgeber: Société Vaudoise des Sciences Naturelles
Band: 39 (1903)
Heft: 146

Artikel: Détermination de la valeur de l'intégrale
Autor: Amstein, H.
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-267013

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 09.12.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

Bulletin de la Société Vaudoise des Sciences Naturelles
Vol. XXXIX. N° 146. 1903

DÉTERMINATION DE LA VALEUR DE L'INTÉGRALE

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{a^2 \sin^{2p}\theta + b^2 \cos^{2p}\theta}.$$

PAR

H. AMSTEIN

Cette intégrale définie dans laquelle a et b signifient des constantes positives quelconques et p un nombre entier positif, a fait l'objet d'une question dans le tome VIII, n° 12 (décembre 1901), de l'*Intermédiaire des Mathématiciens*.

L'évaluation de cette intégrale n'offre aucune difficulté ; il suffit d'appliquer le théorème de Cauchy relatif à l'intégrale prise le long du contour limitant une certaine aire, pour obtenir la formule désirée. Celle-ci, vu son élégance et son utilité, me paraît mériter de figurer dans ce Bulletin. Après l'avoir communiquée à l'*Intermédiaire*, je me suis appliqué à effectuer aussi l'intégrale indéfinie correspondante dont la portée est évidemment plus grande, puisque l'intégrale définie n'en est qu'une application particulière. Or il se trouve que les calculs nécessaires, tout en étant un peu longs peut-être, sont très faciles et en quelque sorte élémentaires. C'est cette partie de mon travail qu'on va lire. Sans faire intervenir le théorème de Cauchy, on passera alors de l'intégrale indéfinie à l'intégrale définie proposée.

Soit à évaluer

$$V = \int \frac{d\theta}{a^2 \sin^{2p}\theta + b^2 \cos^{2p}\theta}.$$

On a successivement

$$V = \int \frac{d\theta}{a^2 \sin^{2p}\theta + b^2 \cos^{2p}\theta} = \int \frac{\frac{d\theta}{\cos^{2p}\theta}}{a^2 \operatorname{tg}^{2p}\theta + b^2} = \int \frac{(1 + \operatorname{tg}^2\theta)^p \, d\theta}{a^2 \operatorname{tg}^{2p}\theta + b^2} =$$

$$= \int \frac{(1 + \operatorname{tg}^2\theta)^{p-1} \, d \operatorname{tg}\theta}{a^2 \operatorname{tg}^{2p}\theta + b^2} = \frac{1}{a^2} \int \frac{(1 + \operatorname{tg}^2\theta)^{p-1} \, d \operatorname{tg}\theta}{\operatorname{tg}^{2p}\theta + \frac{b^2}{a^2}},$$

et en posant

$$\operatorname{tg}\theta = x, \qquad \frac{b}{a} = c,$$

$$a^2 V = \int \frac{(1 + x^2)^{p-1}}{x^{2p} + c^2} \, dx.$$

La fonction à intégrer étant rationnelle, on la décomposera en fractions simples. A cet effet on déterminera les racines de l'équation

$$x^{2p} + c^2 = 0$$

ou de l'équation

$$x^{2p} = -c^2 = c^2 e^{(2k+1)\pi i}.$$

Elles sont

$$x_k = c^{\frac{1}{p}} e^{\frac{2k+1}{2p}\pi i} \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots 2p - 1)$$

ou, en les ordonnant de manière à faire ressortir les racines conjuguées x_k et x'_k

$$\left\{ \begin{array}{l} x_k = c^{\frac{1}{p}} e^{\frac{2k+1}{2p}\pi i}, \\ x'_k = c^{\frac{1}{p}} e^{-\frac{2k+1}{2p}\pi i} \end{array} \right. \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots p - 1).$$

Si pour un instant et pour abréger l'écriture, on pose

$$\frac{2k+1}{2p} = \lambda,$$

les racines en question sont

$$\begin{cases} x_k = c^{\frac{1}{p}} e^{\lambda\pi i}, \\ x'_k = c^{\frac{1}{p}} e^{-\lambda\pi i} \end{cases}$$

et la décomposition de la fonction à intégrer en fractions simples sera, par conséquent, de la forme

$$\frac{(1+x^2)^{p-1}}{x^{2p}+c^2} = \sum_{k=0}^{p-1}\left[\frac{A_k}{x - c^{\frac{1}{p}} e^{\lambda\pi i}} + \frac{B_k}{x - c^{\frac{1}{p}} e^{-\lambda\pi i}}\right].$$

Les constantes A_k et B_k qui sont des nombres complexes conjugués, à savoir les résidus de la fonction du premier membre relativement aux pôles simples x_k et x'_k, se déterminent au moyen du procédé classique; c'est-à-dire si la fonction rationnelle que l'on veut décomposer en fractions simples est de la forme $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$, où $f(x)$ et $\varphi(x)$ sont des polynômes, et qu'un de ses pôles simples soit a, le numérateur A de la fraction simple correspondante, $\frac{A}{x-a}$, est donné par la formule

$$A = \left|\frac{f(x)}{\varphi'(x)}\right|_{x=a},$$

où $\varphi'(x)$ signifie la dérivée de $\varphi(x)$.

Dans notre cas il vient

$$A_k = \left|\frac{(1+x^2)^{p-1}}{2p\,x^{2p-1}}\right|_{x=x_k} = \left|\frac{x(1+x^2)^{p-1}}{2p\,x^{2p}}\right|_{x=x_k} = \left|\frac{x(1+x^2)^{p-1}}{-2p\,c^2}\right|_{x=x_k} =$$

$$= -\frac{1}{2pc^2} c^{\frac{1}{p}} e^{\lambda\pi i}\left(1 + c^{\frac{2}{p}} e^{2\lambda\pi i}\right)^{p-1}$$

et

$$B_k = -\frac{1}{2pc^2} c^{\frac{1}{p}} \overline{e}^{\lambda\pi i}\left(1 + c^{\frac{2}{p}} \overline{e}^{2\lambda\pi i}\right)^{p-1}.$$

On a donc identiquement

$$\frac{(1 + x^2)^{p-1}}{x^{2p} + c^2} =$$

$$= -\frac{c^{\frac{1}{p}}}{2pc^2} \sum_{k=0}^{p-1} \left[\frac{e^{\lambda\pi i}\left(1 + c^{\frac{2}{p}} e^{2\lambda\pi i}\right)^{p-1}}{x - c^{\frac{1}{p}} e^{\lambda\pi i}} + \frac{\overline{e}^{\lambda\pi i}\left(1 + c^{\frac{2}{p}} \overline{e}^{2\lambda\pi i}\right)^{p-1}}{x - c^{\frac{1}{p}} \overline{e}^{\lambda\pi i}}\right].$$

On remarquera qu'en vertu d'un théorème bien connu sur la décomposition d'une fonction rationnelle en fractions simples, on a

$$\sum_{k=0}^{p-1} (A_k + B_k) = 0.$$

Ce fait entraîne les égalités

$$\sum_{k=0}^{p-1} \cos\frac{2k+1}{2p}\pi = 0, \quad \sum_{k=0}^{p-1} \cos\frac{3(2k+1)}{2p}\pi = 0, \quad \sum_{k=0}^{p-1} \cos\frac{5(2k+1)}{2p}\pi = 0,$$

$$\ldots \sum_{k=0}^{p-1} \cos\frac{(2m+1)(2k+1)}{2p}\pi = 0 \qquad (m \leq p-1), \ldots$$

$$\ldots \sum_{k=0}^{p-1} \cos\frac{(2p-1)(2k+1)}{2p}\pi = 0$$

qui d'ailleurs se démontrent directement sans aucune difficulté.

Afin d'éviter dans l'intégrale des logarithmes d'argument imaginaire, il suffit de réduire au même dénominateur les deux fractions sous le signe Σ; par là toutes les quantités en jeu, de même que les intégrales respectives, deviennent réelles.

Il vient

$$-\frac{2pc^2}{c^{\frac{1}{p}}}\,\frac{(1+x^2)^{p-1}}{x^{2p}+c^2}=\sum_{k=0}^{p-1}\frac{M_k x-c^{\frac{1}{p}}N_k}{x^2-2c^{\frac{1}{p}}\cos\lambda\pi+c^{\frac{2}{p}}},$$

où

$$\begin{cases} M_k = e^{\lambda\pi i}\left(1+c^{\frac{2}{p}}e^{2\lambda\pi i}\right)^{p-1}+e^{-\lambda\pi i}\left(1+c^{\frac{2}{p}}e^{-2\lambda\pi i}\right)^{p-1}, \\ N_k = \left(1+c^{\frac{2}{p}}e^{2\lambda\pi i}\right)^{p-1}+\left(1+c^{\frac{2}{p}}e^{-2\lambda\pi i}\right)^{p-1}. \end{cases}$$

Pour mettre M_k et N_k sous forme réelle, on considérera l'expression

$$K = e^{x\pi i}\left(1+c^{\frac{2}{p}}e^{2\lambda\pi i}\right)^{p-1}+e^{-x\pi i}\left(1+c^{\frac{2}{p}}e^{-2\lambda\pi i}\right)^{p-1}$$

qui donne M_k pour $x=\lambda$ et N_k pour $x=0$.

On a

$$K = e^{x\pi i}\sum_{m=0}^{p-1}(p-1)_m\,c^{m\frac{2}{p}}e^{m.2\lambda\pi i}+e^{-x\pi i}\sum_{m=0}^{p-1}(p-1)_m\,c^{m.\frac{2}{p}}e^{-m.2\lambda\pi i},$$

où $(p-1)_m$ signifie le m^ième^ coefficient du binôme, à savoir

$$(p-1)_m=\frac{(p-1)\,(p-2)\,(p-3)\,\ldots\,(p-m)}{1\,.\,2\,.\,3\ldots\ldots\,m},\quad (p-1)_0=1\,.$$

On peut écrire ensuite

$$K=\sum_{m=0}^{p-1}(p-1)_m\,c^{m\frac{2}{p}}\left[e^{(2m\lambda+x)\pi i}+e^{-(2m\lambda+x)\pi i}\right]=$$

$$=2\sum_{m=0}^{p-1}(p-1)_m\,c^{m.\frac{2}{p}}\cos(2m\lambda+x)\pi\,.$$

On obtient donc : pour $x=\lambda$

$$M_k=2\sum_{m=0}^{p-1}(p-1)_m\,c^{m.\frac{2}{p}}\cos(2m+1)\lambda\pi$$

et pour $x = 0$

$$N_k = 2 \sum_{m=0}^{p-1} (p-1)_m \, c^{m \cdot \frac{2}{p}} \cos 2m\lambda\pi .$$

L'on sait que l'intégrale

$$\int \frac{M_k x - c^{\frac{1}{p}} N_k}{x^2 - 2c^{\frac{1}{p}} x \cos \lambda\pi + c^{\frac{2}{p}}} dx$$

est de la forme

$$\int \frac{M_k x - c^{\frac{1}{p}} N_k}{x^2 - 2c^{\frac{1}{p}} x \cos \lambda\pi + c^{\frac{2}{p}}} dx = A \log \left(x^2 - 2c^{\frac{1}{p}} x \cos \lambda\pi + c^{\frac{2}{p}}\right) +$$

$$+ B \int \frac{dx}{x^2 - 2c^{\frac{1}{p}} x \cos \lambda\pi + c^{\frac{2}{p}}} .$$

Les constantes A et B s'obtiennent en différentiant cette égalité et en comparant dans les numérateurs les coefficients des mêmes puissances de x. Il vient

$$A = \frac{1}{2} M_k , \quad B = c^{\frac{1}{p}} (M_k \cos \lambda\pi - N_k).$$

Quant à l'intégration qui reste encore à effectuer, on sait que

$$\int \frac{dx}{x^2 - 2c^{\frac{1}{p}} x \cos \lambda\pi + c^{\frac{2}{p}}} = \int \frac{dx}{(x - c^{\frac{1}{p}} \cos \lambda\pi)^2 + c^{\frac{2}{p}} \sin^2 \lambda\pi} =$$

$$= \frac{1}{c^{\frac{1}{p}} \sin \lambda\pi} \operatorname{arctg} \frac{x - c^{\frac{1}{p}} \cos \lambda\pi}{c^{\frac{1}{p}} \sin \lambda\pi} ,$$

de sorte que

$$\int \frac{M_k x - c^{\frac{1}{p}} N_k}{x^2 - 2c^{\frac{1}{p}} x \cos \lambda\pi + c^{\frac{2}{p}}} dx = \frac{1}{2} M_k \log \left(x^2 - 2c^{\frac{1}{p}} x \cos \lambda\pi + c^{\frac{2}{p}}\right) +$$

$$+ \frac{M_k \cos \lambda\pi - N_k}{\sin \lambda\pi} \operatorname{arctg} \frac{x - c^{\frac{1}{p}} \cos \lambda\pi}{c^{\frac{1}{p}} \sin \lambda\pi}$$

et par suite

$$\int \frac{(1 + x^2)^{p-1}}{x^{2p} + c^2} dx = - \frac{c^{\frac{1}{p}}}{2pc^2} \sum_{k=0}^{p-1} \left[\frac{1}{2} M_k \log \left(x^2 - 2c^{\frac{1}{p}} x \cos \lambda\pi + c^{\frac{2}{p}}\right) + \right.$$

$$\left. + \frac{M_k \cos \lambda\pi - N_k}{\sin \lambda\pi} \operatorname{arctg} \frac{x - c^{\frac{1}{p}} \cos \lambda\pi}{c^{\frac{1}{p}} \sin \lambda\pi} \right] + \text{const.}$$

Si dans cette formule on remplace x par $\operatorname{tg} \theta$, λ par sa valeur $\frac{2k+1}{2p}$, on a finalement

$$V = \int \frac{d\theta}{a^2 \sin^{2p}\theta + b^2 \cos^{2p}\theta} =$$

$$= - \frac{c^{\frac{1}{p}}}{2pa^2 c^2} \sum_{k=0}^{p-1} \left[\frac{1}{2} M_k \log \frac{\sin^2\theta - 2c^{\frac{1}{p}} \cos \frac{2k+1}{2p}\pi \sin\theta \cos\theta + c^{\frac{2}{p}} \cos^2\theta}{\cos^2\theta} + \right.$$

$$\left. + \frac{M_k \cos \frac{2k+1}{2p}\pi - N_k}{\sin \frac{2k+1}{2p}\pi} \operatorname{arctg} \frac{\sin\theta - c^{\frac{1}{p}} \cos \frac{2k+1}{2p}\pi \cos\theta}{c^{\frac{1}{p}} \sin \frac{2k+1}{2p}\pi \cos\theta} \right] + \text{const.}$$

où

$$\begin{cases} M_k = 2 \sum_{m=0}^{p-1} (p-1)_m \, c^{m\frac{2}{p}} \cos \frac{(2m+1)(2k+1)}{2p}\pi \\ N_k = 2 \sum_{m=0}^{p-1} (p-1)_m \, c^{m\frac{2}{p}} \cos \frac{m(2k+1)}{p}\pi . \end{cases}$$

Dans cette intégrale on introduira maintenant la limite inférieure $\theta = 0$. A cet effet on remarquera 1° que

$$\frac{1}{2} M_k \left| \log \frac{\sin^2\theta - 2c^{\frac{1}{p}} \cos \frac{2k+1}{2p}\pi \sin\theta\cos\theta + c^{\frac{2}{p}} \cos^2\theta}{\cos^2\theta} \right|_{\theta=0} =$$

$$= \frac{1}{2} M_k \log c^{\frac{2}{p}} = M_k \log c^{\frac{1}{p}}$$

et

$$\sum_{k=0}^{p-1} M_k \log c^{\frac{1}{p}} = \log c^{\frac{1}{p}} . \sum_{k=0}^{p-1} M_k = 0,$$

car

$$M_k = A_k + B_k$$

et

$$\sum_{k=0}^{p-1} M_k = \sum_{k=0}^{p-1} (A_k + B_k) = 0;$$

2° que

$$\left| \operatorname{arctg} \frac{\sin\theta - c^{\frac{1}{p}} \cos \frac{2k+1}{2p}\pi \cos\theta}{c^{\frac{1}{p}} \sin \frac{2k+1}{2p}\pi . \cos\theta} \right|_{\theta=0} = \operatorname{arctg}\left(-\operatorname{cotg}\frac{2k+1}{2p}\pi\right) =$$

$$= -\operatorname{arctg}\left(\operatorname{cotg}\frac{2k+1}{2p}\pi\right) = -\left[\frac{\pi}{2} - \operatorname{arccotg}\left(\operatorname{cotg}\frac{2k+1}{2p}\pi\right)\right] =$$

$$= -\left(\frac{\pi}{2} - \frac{2k+1}{2p}\pi\right).$$

Il vient donc

$$(1) \qquad \int_0^\theta \frac{d\theta}{a^2 \sin^{2p}\theta + b^2 \cos^{2p}\theta} =$$

$$= -\frac{c^{\frac{1}{p}}}{2pb^2} \sum_{k=0}^{p-1} \left[\frac{1}{2} M_k \log \frac{\sin^2\theta - 2c^{\frac{1}{p}} \cos \frac{2k+1}{2p}\pi \sin\theta\cos\theta + c^{\frac{2}{p}} \cos^2\theta}{\cos^2\theta} + \right.$$

$$+\frac{M_k \cos\frac{2k+1}{2p}\pi - N_k}{\sin\frac{2k+1}{2p}\pi}\operatorname{arctg}\frac{\sin\theta - c^{\frac{1}{p}}\cos\frac{2k+1}{2p}\pi\cos\theta}{c^{\frac{1}{p}}\sin\frac{2k+1}{2p}\pi\,.\cos\theta}+$$

$$+\frac{M_k \cos\frac{2k+1}{2p}\pi - N_k}{\sin\frac{2k+1}{2p}\pi}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{2k+1}{2p}\pi\right)\Bigg].$$

Afin de rendre cette formule aussi maniable que possible, on évaluera encore les deux sommes

$$\sum_{k=0}^{p-1}\frac{M_k \cos\frac{2k+1}{2p}\pi - N_k}{\sin\frac{2k+1}{2p}\pi},\quad \sum_{k=0}^{p-1}\frac{2k+1}{2p}\,\frac{M_k \cos\frac{2k+1}{2p}\pi - N_k}{\sin\frac{2k+1}{2p}\pi}.$$

On a déjà vu que

$$\left.\begin{aligned}\frac{1}{2}M_k &= \sum_{m=0}^{p-1}(p-1)_m\, c^{m\cdot\frac{2}{p}}\cos\frac{(2m+1)(2k+1)\pi}{2p}\\ \frac{1}{2}N_k &= \sum_{m=0}^{p-1}(p-1)_m\, c^{m\cdot\frac{2}{p}}\cos\frac{m(2k+1)\pi}{p}\end{aligned}\right|\begin{aligned}&\cos\frac{2k+1}{2p}\\ &-1\end{aligned}$$

Il s'ensuit que

$$\frac{1}{2}M_k\cos\frac{2k+1}{2p}\pi - \frac{1}{2}N_k =$$

$$\sum_{m=0}^{p-1}(p-1)_m\, c^{m\cdot\frac{2}{p}}\left[\cos\frac{(2m+1)(2k+1)\pi}{2p}\cos\frac{2k+1}{2p}\pi - \cos\frac{m(2k+1)}{p}\pi\right]$$

$$\sum_{m=0}^{p-1}(p-1)_m c^{m\cdot\frac{2}{p}}\left[\frac{1}{2}\cos\frac{(m+1)(2k+1)\pi}{p}+\frac{1}{2}\cos\frac{m(2k+1)}{p}\pi-\cos\frac{m(2k+1)}{p}\pi\right]=$$

$$\sum_{m=0}^{p-1}(p-1)_m c^{m\cdot\frac{2}{p}}\left[\frac{1}{2}\cos\frac{(m+1)(2k+1)\pi}{p}-\frac{1}{2}\cos\frac{m(2k+1)\pi}{p}\right]=$$

$$= -\sum_{m=0}^{p-1} (p-1)_m c^{m \cdot \frac{2}{p}} \sin \frac{(2m+1)(2k+1)\pi}{2p} \sin \frac{2k+1}{2p} \pi =$$

$$= -\sin \frac{2k+1}{2p} \pi \sum_{m=0}^{p-1} (p-1)_m c^{m \cdot \frac{2}{p}} \sin \frac{(2m+1)(2k+1)\pi}{2p};$$

puis

$$\frac{\frac{1}{2} M_k \cos \frac{2k+1}{2p} \pi - N_k}{\sin \frac{2k+1}{2p} \pi} = -\sum_{m=0}^{p-1} (p-1)_m c^{m \cdot \frac{2}{p}} \sin \frac{(2m+1)(2k+1)\pi}{2p}.$$

Pour effectuer la sommation relative à la lettre k, on peut écrire

$$(2) \quad -\sum_{k=0}^{p-1} \frac{\frac{1}{2} M_k \cos \frac{2k+1}{2p} \pi - \frac{1}{2} N_k}{\sin \frac{2k+1}{2p} \pi} = \sum_{m=0}^{p-1} (p-1)_m c^{m \cdot \frac{2}{p}} \left[\sin \frac{2m+1}{2p} \pi + \right.$$

$$\left. + \sin \frac{(2m+1)3\pi}{2p} + \sin \frac{(2m+1)5\pi}{2p} + \ldots + \sin \frac{(2m+1)(2p-1)\pi}{2p} \right].$$

Or la somme de sinus figurant dans cette expression, s'obtient facilement. On a, en effet,

$$\sin \frac{2m+1}{2p} \pi + \sin \frac{(2m+1)3\pi}{2p} + \sin \frac{(2m+1)5\pi}{2p} + \ldots + \sin \frac{(2m+1)(2p-1)\pi}{2p} =$$

$$= \frac{1}{2i} \left[e^{\frac{2m+1}{2p}\pi i} + e^{\frac{(2m+1)3}{2p}\pi i} + e^{\frac{(2m+1)5}{2p}\pi i} + \ldots + e^{\frac{(2m+1)(2p-1)}{2p}\pi i} \right.$$

$$\left. - e^{-\frac{2m+1}{2p}\pi i} - e^{-\frac{(2m+1)3}{2p}\pi i} - e^{-\frac{(2m+1)5}{2p}\pi i} - \ldots - e^{-\frac{(2m+1)(2p-1)}{2p}\pi i} \right] =$$

$$= \frac{1}{2i} \left[\frac{e^{\frac{(2m+1)(2p+1)}{2p}\pi i} - e^{\frac{2m+1}{2p}\pi i}}{e^{\frac{2m+1}{p}\pi i} - 1} - \frac{e^{-\frac{(2m+1)(2p+1)}{2p}\pi i} - e^{-\frac{2m+1}{2p}\pi i}}{e^{-\frac{2m+1}{p}\pi i} - 1} \right] =$$

$$= \frac{1}{2i}\left[\frac{-e^{\frac{2m+1}{2p}\pi i} - e^{\frac{2m+1}{2p}\pi i}}{e^{\frac{2m+1}{p}\pi i} - 1} - \frac{-e^{-\frac{2m+1}{2p}\pi i} - e^{-\frac{2m+1}{2p}\pi i}}{e^{-\frac{2m+1}{p}\pi i} - 1}\right] =$$

$$= \frac{1}{i}\left[-\frac{e^{\frac{2m+1}{2p}\pi i}}{e^{\frac{2m+1}{p}\pi i} - 1} + \frac{e^{-\frac{2m+1}{2p}\pi i}}{e^{-\frac{2m+1}{p}\pi i} - 1}\right] =$$

$$= \frac{1}{i}\left[-\frac{1}{e^{\frac{2m+1}{2p}\pi i} - e^{-\frac{2m+1}{2p}\pi i}} + \frac{1}{e^{-\frac{2m+1}{2p}\pi i} - e^{\frac{2m+1}{2p}\pi i}}\right] =$$

$$= \frac{1}{i}\left[-\frac{1}{2i\sin\frac{2m+1}{2p}\pi} - \frac{1}{2i\sin\frac{2m+1}{2p}\pi}\right] = \frac{1}{\sin\frac{2m+1}{2p}\pi}.$$

La somme cherchée est donc

$$(3) \quad -\sum_{k=0}^{p-1} \frac{\frac{1}{2}\,\mathrm{M}_k \cos\frac{2k+1}{2p}\pi - \frac{1}{2}\,\mathrm{N}_k}{\sin\frac{2k+1}{2p}\pi} = \sum_{m=0}^{p-1} \frac{(p-1)_m\, c^{m\cdot\frac{2}{p}}}{\sin\frac{2m+1}{2p}\pi} =$$

$$= \frac{1}{\sin\frac{\pi}{2p}} + \frac{(p-1)_1\, c^{\frac{2}{p}}}{\sin\frac{3\pi}{2p}} + \frac{(p-1)_2\, c^{2\cdot\frac{2}{p}}}{\sin\frac{5\pi}{2p}} + \ldots + \frac{(p-1)_{p-1}\, c^{(p-1)\frac{2}{p}}}{\sin\frac{2p-1}{2p}\pi}.$$

En s'appuyant sur les calculs qui ont abouti à la formule (2), on reconnaît que la seconde somme est donnée par

$$-\sum_{k=0}^{p-1} \frac{2k+1}{2p} \cdot \frac{\mathrm{M}_k \cos\frac{2k+1}{2p}\pi - \mathrm{N}_k}{\sin\frac{2k+1}{2p}\pi} =$$

$$= 2\sum_{m=0}^{p-1} (p-1)_m\, c^{m\cdot\frac{2}{p}} \left[\frac{1}{2p}\sin\frac{(2m+1)\pi}{2p} + \frac{3}{2p}\sin\frac{(2m+1)3\pi}{2p} + \right.$$

$$\left. + \frac{5}{2p}\sin\frac{(2m+1)5\pi}{2p} + \ldots + \frac{2p-1}{2p}\sin\frac{(2m+1)(2p-1)\pi}{2p}\right].$$

Afin de déterminer la somme entre crochets on considérera d'abord cette autre somme

$$\cos\frac{x}{2p}+\cos\frac{3x}{2p}+\cos\frac{5x}{2p}+\ldots+\cos\frac{(2p-1)x}{2p}=$$

$$=\frac{1}{2}\left[\left(e^{\frac{x}{2p}i}+e^{\frac{3x}{2p}i}+e^{\frac{5xi}{2p}}+\ldots+e^{\frac{(2p-1)xi}{2p}}\right)+\right.$$

$$\left.+\left(e^{-\frac{x}{2p}i}+e^{-\frac{3x}{2p}i}+e^{-\frac{5x}{2p}i}+\ldots+e^{-\frac{(2p-1)x}{2p}i}\right)\right]$$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{e^{\frac{2p+1}{2p}xi}-e^{\frac{x}{2p}i}}{e^{\frac{x}{p}i}-1}+\frac{e^{-\frac{2p+1}{2p}xi}-e^{-\frac{x}{2p}i}}{e^{-\frac{x}{p}i}-1}\right]=$$

$$=\frac{1}{2}\,\frac{e^{\frac{2p-1}{2p}xi}-e^{-\frac{x}{2p}i}-e^{\frac{2p+1}{2p}xi}+e^{\frac{x}{2p}i}+e^{-\frac{2p-1}{2p}xi}-e^{\frac{x}{2p}i}-e^{-\frac{2p+1}{2p}xi}+e^{-\frac{x}{2p}i}}{\left(e^{\frac{x}{p}i}-1\right)\left(e^{-\frac{x}{p}i}-1\right)}$$

$$=\frac{1}{2}\,\frac{\left(e^{\frac{2p-1}{2p}xi}+e^{-\frac{2p-1}{2p}xi}\right)-\left(e^{\frac{2p+1}{2p}xi}+e^{-\frac{2p+1}{2p}xi}\right)}{e^{\frac{x}{2p}i}\left(e^{\frac{x}{2p}i}-e^{-\frac{x}{2p}i}\right)e^{-\frac{x}{2p}i}\left(e^{-\frac{x}{2p}i}-e^{\frac{x}{2p}i}\right)}=$$

$$=\frac{1}{2}\,\frac{2\cos\frac{2p-1}{2p}x-2\cos\frac{2p+1}{2p}x}{2i\sin\frac{x}{2p}\,(-2i)\sin\frac{x}{2p}}=\frac{\cos\frac{2p-1}{2p}x-\cos\frac{2p+1}{2p}x}{4\sin^2\frac{x}{2p}}=$$

$$=\frac{\sin x\sin\frac{x}{2p}}{2\sin^2\frac{x}{2p}}=\frac{\sin x}{2\sin\frac{x}{2p}}.$$

Dérivant par rapport à x les deux membres de cette égalité

$$\cos\frac{x}{2p} + \cos\frac{3x}{2p} + \cos\frac{5x}{2p} + \ldots + \cos\frac{(2p-1)x}{2p} = \frac{1}{2}\frac{\sin\frac{x}{2p}}{\sin\frac{x}{2p}},$$

il vient

$$-\left[\frac{1}{2p}\sin\frac{x}{2p} + \frac{3}{2p}\sin\frac{3x}{2p} + \frac{5}{2p}\sin\frac{5x}{2p} + \ldots + \frac{2p-1}{2p}\sin\frac{(2p-1)x}{2p}\right] =$$

$$= \frac{\sin\frac{x}{2p}\cos x - \frac{1}{2p}\sin x\cos\frac{x}{2p}}{2\sin^2\frac{x}{2p}}.$$

Or il suffit de faire $x = (2m+1)\pi$ dans cette formule pour avoir immédiatement la somme cherchée, à savoir

$$\frac{1}{2p}\sin\frac{(2m+1)\pi}{2p} + \frac{3}{2p}\sin\frac{(2m+1)3\pi}{2p} + \frac{5}{2p}\sin\frac{(2m+1)5\pi}{2p} + \ldots +$$

$$+ \frac{2p-1}{2p}\sin\frac{(2m+1)(2p-1)\pi}{2p} = \frac{1}{2\sin\frac{(2m+1)\pi}{2p}}.$$

On a ainsi

$$(4) \qquad -\sum_{k=0}^{p-1}\frac{2k+1}{2p}\,\frac{M_k\cos\frac{2k+1}{2p}\pi - N_k}{\sin\frac{2k+1}{2p}} = \sum_{m=0}^{p-1}\frac{(p-1)_m\, c^{m.\frac{2}{p}}}{\sin\frac{2m+1}{2p}\pi}.$$

On peut constater que, dans la formule (1), l'expression provenant de la limite inférieure

$$\sum_{k=0}^{p-1}\frac{M_k\cos\frac{2k+1}{2p}\pi - N_k}{\sin\frac{2k+1}{2p}\pi}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{2k+1}{2p}\pi\right) \quad \text{est} = 0,$$

car on a d'après (3) et (4)

$$\frac{\pi}{2}\sum_{k=0}^{p-1}\frac{M_k\cos\frac{2k+1}{2p}\pi-N_k}{\sin\frac{2k+1}{2p}\pi}-\pi\sum_{k=0}^{p-1}\frac{2k+1}{2p}\,\frac{M_k\cos\frac{2k+1}{2p}\pi-N_k}{\sin\frac{2k+1}{2p}\pi}=$$

$$=-\pi\sum_{m=0}^{p-1}\frac{(p-1)_m\,c^{m\cdot\frac{2}{p}}}{\sin\frac{2m+1}{2p}\pi}+\pi\sum_{m=0}^{p-1}\frac{(p-1)_m\,c^{m\cdot\frac{2}{p}}}{\sin\frac{2m+1}{2p}\pi}=0.$$

L'intégrale (1) prend ainsi la forme plus simple

$$(5)\qquad \int_0^{\theta}\frac{d\theta}{a^2\sin^{2p}\theta+b^2\cos^{2p}\theta}=$$

$$=-\frac{c^{\frac{1}{p}}}{2pb^2}\sum_{k=0}^{p-1}\left[\frac{1}{2}M_k\log\frac{\sin^2\theta-2c^{\frac{1}{p}}\cos\frac{2k+1}{2p}\pi\sin\theta\cos\theta+c^{\frac{2}{p}}\cos^2\theta}{\cos^2\theta}+\right.$$

$$\left.+\frac{M_k\cos\frac{2k+1}{2p}\pi-N_k}{\sin\frac{2k+1}{2p}\pi}\operatorname{arctg}\frac{\sin\theta-c^{\frac{1}{p}}\cos\frac{2k+1}{2p}\pi\cos\theta}{c^{\frac{1}{p}}\sin\frac{2k+1}{2p}\pi\cos\theta}\right].$$

Pour terminer et afin d'obtenir l'intégrale définie demandée dans l'*Intermédiaire*, on fera encore, dans cette formule, $\theta=\frac{\pi}{2}$. Les termes logarithmiques disparaîtront. Ils deviennent infinis, il est vrai, mais tous de la même manière, de sorte que la somme $\sum_{k=0}^{p-1}\frac{1}{2}M_k$ qui est nulle, peut se mettre en évidence. Or

$$\left|\operatorname{arctg}\frac{\sin\theta-c^{\frac{1}{p}}\cos\frac{2k+1}{2p}\pi\cos\theta}{c^{\frac{1}{p}}\sin\frac{2k+1}{2p}\cos\theta}\right|_{\theta=\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi}{2}\ ;$$

il s'ensuit que l'intégrale en question devient

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{a^2 \sin^{2p}\theta + b^2 \cos^{2p}\theta} = -\frac{c^{\frac{1}{p}}}{2pb^2} \cdot \frac{\pi}{2} \sum_{k=0}^{p-1} \frac{M_k \cos \frac{2k+1}{2p}\pi - N_k}{\sin \frac{2k+1}{2p}\pi} =$$

$$= \pi \frac{c^{\frac{1}{p}}}{2pb^2} \sum_{m=0}^{p-1} \frac{(p-1)_m \, c^{m \cdot \frac{2}{p}}}{\sin \frac{2m+1}{2p}\pi}$$

ou, en remplaçant c par sa valeur

$$6) \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{a^2 \sin^{2p}\theta + b^2 \cos^{2p}\theta} = \frac{\pi}{2pb^2} \sum_{m=0}^{p-1} \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{2m+1}{p}} \frac{(p-1)_m}{\sin \frac{2m+1}{2p}\pi}$$

où

$$(p-1)_m = \frac{(p-1)(p-2)\ldots(p-m)}{1 \,.\, 2 \,.\, \ldots \, m}, \quad (p-1)_0 = 1 \,.$$

Les formules (5) et (6) résolvent différents problèmes. Elles donnent, entre autres, l'aire des courbes dont l'équation en coordonnées polaires est de la forme

$$r = \frac{C}{\sqrt{a^2 \sin^{2p}\theta + b^2 \cos^{2p}\theta}}$$

ou en coordonnées parallèles rectangulaires

$$a^2 y^{2p} + b^2 x^{2p} = C(x^2 + y^2)^{p-1}$$

et les moments d'inertie polaires par rapport à l'origine des courbes

$$r = \frac{C}{\sqrt[4]{a^2 \sin^{2p}\theta + b^2 \cos^{2p}\theta}}$$

ou bien

$$a^2 y^{2p} + b^2 x^{2p} = C(x^2 + y^2)^{p-2}.$$