

Zeitschrift: Bulletin de la Société Vaudoise des Sciences Naturelles
Herausgeber: Société Vaudoise des Sciences Naturelles
Band: 36 (1900)
Heft: 135

Artikel: Note complémentaire sur le logarithme-intégral
Autor: Amstein, H.
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-266065>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 25.04.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

NOTE COMPLÉMENTAIRE

SUR LE LOGARITHME-INTÉGRAL

PAR

H. AMSTEIN

Les quelques pages qu'on va lire forment la suite de mon travail : « Note sur le logarithme-intégral ». (V. *Bulletin*, vol. XXXI, n° 119, 1895, pages 203-225.) En appliquant les formules (1) p. 204 et (2^a) p. 208, on remarque bien vite que le calcul numérique du logarithme-intégral devient peu commode, dès que son argument sort de certaines limites et devient, par exemple, ou très petit ou très grand. Il serait donc à désirer de posséder deux séries remédiant à cet inconvénient, c'est-à-dire convergeant d'autant plus rapidement que l'argument du logarithme-intégral est respectivement plus petit ou plus grand. Or l'une d'elle au moins existe. Elle a été donnée par M. O. Schlämilch et se trouve dans la *Zeitschrift für Math. und Phys.*, 4. Jahrg., p. 390, de même que dans le *Compendium der höheren Analysis* du même auteur, 2^e édition, tome II, p. 265 et suivantes. Sous une forme un peu plus générale qu'il ne nous faut, la série en question est

$$(1) \quad \int_x^z \frac{e^{-v}}{v^\lambda} dv =$$

$$= \frac{e^{-x}}{x^\lambda} \left[1 - \frac{a_1}{x+1} + \frac{a_2}{(x+1)(x+2)} - \frac{a_3}{(x+1)(x+2)(x+3)} + \dots \right],$$

où

$$a_m = \frac{1}{\Gamma(\lambda)} \int_0^z t(t-1)(t-2)\dots[t-(m-1)]t^{\lambda-1} e^{-t} dt.$$

Les coefficients a_1, a_2, a_3, \dots se calculent facilement. En développant sous le signe \int

$$\begin{aligned} & t(t-1)(t-2)(t-3)\dots[t-(m-1)] = \\ & = t^m - C_{m,1}t^{m-1} + C_{m,2}t^{m-2} - \dots + (-1)^{m-1}C_{m,m-1}t, \end{aligned}$$

et en intégrant ensuite, il vient

$$\begin{aligned} a_m &= \frac{1}{\Gamma(\lambda)} \int_0^\infty [t^m - C_{m,1}t^{m-1} + C_{m,2}t^{m-2} - \dots + (-1)^{m-1}C_{m,m-1}t] t^{\lambda-1} e^{-t} dt = \\ &= \frac{1}{\Gamma(\lambda)} \left[\int_0^\infty t^{m+\lambda-1} e^{-t} dt - C_{m,1} \int_0^\infty t^{m+\lambda-2} e^{-t} dt + \dots + (-1)^{m-1} C_{m,m-1} \int_0^\infty t^\lambda e^{-t} dt \right] = \\ &= \frac{1}{\Gamma(\lambda)} \left[\Gamma(m+\lambda) - C_{m,1}\Gamma(m+\lambda-1) + C_{m,2}\Gamma(m+\lambda-2) - \dots + (-1)^{m-1}C_{m,m-1}\Gamma(\lambda+1) \right] \end{aligned}$$

Or on sait que

$$\frac{\Gamma(\lambda+1)}{\Gamma(\lambda)} = \lambda,$$

et par conséquent

$$\frac{\Gamma(\lambda+2)}{\Gamma(\lambda)} = \frac{\Gamma(\lambda+2)}{\Gamma(\lambda+1)} \cdot \frac{\Gamma(\lambda+1)}{\Gamma(\lambda)} = \lambda(\lambda+1),$$

.....

$$\frac{\Gamma(\lambda+q)}{\Gamma(\lambda)} = \lambda(\lambda+1)(\lambda+2)\dots(\lambda+q-1) = [\lambda]^q,$$

de sorte que finalement

(2)

$$a_m = [\lambda]^m - C_{m,1}[\lambda]^{m-1} + C_{m,2}[\lambda]^{m-2} - \dots + (-1)^{m-1}C_{m,m-1}[\lambda].$$

La série (1) dont M. Schlämilch démontre la convergence pour toutes les valeurs positives de x , mérite qu'on s'y arrête pendant quelques instants. Il peut arriver qu'on en ait besoin d'un grand nombre de termes. Dans ce cas il serait utile d'avoir

une formule de réduction facilitant encore le calcul des coefficients a . Afin de l'obtenir on commencera par étudier les quantités C .

La formation de ces quantités fait immédiatement reconnaître l'exactitude des équations

$$(3) \left\{ \begin{array}{l} C_{m,1} = C_{m-1,1} + (m-1) C_{m-1,0} \\ C_{m,2} = C_{m-1,2} + (m-1) C_{m-1,1} \\ C_{m,3} = C_{m-1,3} + (m-1) C_{m-1,2} \\ \dots \dots \dots \\ C_{m,k} = C_{m-1,k} + (m-1) C_{m-1,k-1} \\ \dots \dots \dots \\ C_{m,m-1} = C_{m-1,m-1} + (m-1) C_{m-1,m-2}, \end{array} \right.$$

où $C_{n,0} = 1$ et $C_{n,n} = 0$. On a ainsi, par exemple,

$$\begin{array}{rcl} C_{m,1} & = & C_{m-1,1} + (m-1) \\ C_{m-1,1} & = & C_{m-2,1} + (m-2) \\ \dots & & \dots \\ C_{3,1} & = & C_{2,1} + 2 \\ C_{2,1} & = & 1 \end{array}$$

En ajoutant ces équations terme à terme, il vient

$$C_{m,1} = 1 + 2 + 3 + \dots + (m-1)$$

et l'on en conclut que les quantités $C_{2,1}, C_{3,1}, C_{4,1}, \dots, C_{m,1}$ forment une série arithmétique du second ordre.

Soit

$$R = u_0, u_1, u_2, \dots, u_n, \dots$$

une série de nombres,

$$AR = Au_0 = u_1 - u_0, Au_1 = u_2 - u_1, \dots, Au_n = u_{n+1} - u_n, \dots$$

la série de leurs différences premières,

$$f^2R = f^2u_0 = fu_1 - fu_0, f^2u_1 = fu_2 - fu_1, \dots, f^2u_n = fu_{n+1} - fu_n, \dots$$

la série de leurs différences deuxièmes,

.

$$f^pR = f^p u_0 = f^{p-1} u_1 - f^{p-1} u_0, f^p u_1 = f^{p-1} u_2 - f^{p-1} u_1, \dots$$

$$f^p u_n = f^{p-1} u_{n+1} - f^{p-1} u_n, \dots$$

la série de leurs différences p^i èmes. Alors on sait que le terme général de R est donné par la formule

$$u_p = u_0 + p_1 fu_0 + p_2 f^2u_0 + p_3 f^3u_0 + \dots + f^p u_0,$$

où

$$p_r = \frac{p(p-1)(p-2)\dots(p-r+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots r}$$

désigne le r^i ème coefficient du binôme, et la série R est dite une *série arithmétique du k^i ème ordre*, lorsque toutes les différences $(k+1)^i$ èmes sont zéros.

Dans le cas où la série se compose des nombres $C_{2,1}, C_{3,1}, C_{4,1}, \dots$ on trouve immédiatement

$$C_{2,1} = u_0 = 1, fu_0 = 2, f^2u_0 = 1, f^3u_0 = 0,$$

de sorte que

$$C_{p+2,1} = u_p = u_0 + p_1 fu_0 + p_2 f^2u_0 = 1 + 2p_1 + p_2.$$

On vérifie aisément qu'en effet on a

$$C_{m,1} = 1 + 2 + 3 + \dots (m-1) = \frac{m(m-1)}{2} = 1 + 2(m-2)_1 + (m-2)_2.$$

Ce fait une fois reconnu, il est naturel de demander si peut-être les quantités $C_{m,2}$ forment une série arithmétique du 4^e ordre, les quantités $C_{m,3}$ une série arithmétique du 6^e ordre et ainsi de suite.

Si la réponse est affirmative, il doit être possible de mettre les nombres $C_{m,2}$ sous la forme

$$u_p = u_0 + p_1 fu_0 + p_2 f^2u_0 + p_3 f^3u_0 + p_4 f^4u_0.$$

Or par un calcul des plus simples on prouve directement que l'on peut écrire

$$C_{3,2} = 2 = 2$$

$$C_{4,2} = 11 = 2 + 9 \cdot 1_1$$

$$C_{5,2} = 35 = 2 + 9 \cdot 2_1 + 15 \cdot 2_2$$

$$C_{6,2} = 85 = 2 + 9 \cdot 3_1 + 15 \cdot 3_2 + 11 \cdot 3_3$$

$$C_{7,2} = 175 = 2 + 9 \cdot 4_1 + 15 \cdot 4_2 + 11 \cdot 4_3 + 3 \cdot 4_4$$

$$C_{8,2} = 322 = 2 + 9 \cdot 5_1 + 15 \cdot 5_2 + 11 \cdot 5_3 + 3 \cdot 5_4.$$

Dans ce cas on a

$$C_{3,2} = u_0 = 2, \quad Au_0 = 9, \quad A^2u_0 = 15, \quad A^3u_0 = 11, \quad A^4u_0 = 3, \quad A^5u_0 = 0,$$

d'où il suit

$$C_{p+3,2} = u_p = 2 + 9 p_1 + 15 p_2 + 11 p_3 + 3 p_4,$$

et par conséquent

$$C_{m,2} = 2 + 9(m-3)_1 + 15(m-3)_2 + 11(m-3)_3 + 3(m-3)_4.$$

A l'aide de la relation $C_{m+1,2} = C_{m,2} + m C_{m,1}$ on montre aisément que cette formule supposée exacte pour m , reste encore valable pour $m+1$; elle est donc applicable à toute valeur entière de $m >$ ou $= 3$.

Un raisonnement analogue conduit aux formules suivantes :

$$C_{m,3} = 6 + 44(m-4)_1 + 131(m-4)_2 + 204(m-4)_3 + 176(m-4)_4 + \\ + 80(m-4)_5 + 15(m-4)_6.$$

$$C_{m,4} = 24 + 250(m-5)_1 + 1100(m-5)_2 + 2695(m-5)_3 + 4045(m-5)_4 + \\ + 3824(m-5)_5 + 2230(m-5)_6 + 735(m-5)_7 + 105(m-5)_8.$$

$$C_{m,5} = 120 + 1644(m-6)_1 + 9724(m-6)_2 + 33060(m-6)_3 + 72045(m-6)_4 + \\ + 105650(m-6)_5 + 105939(m-6)_6 + 71904(m-6)_7 + \\ + 31675(m-6)_8 + 8190(m-6)_9 + 945(m-6)_{10}.$$

$$C_{m,6} = 720 + 12348(m-7)_1 + 92708(m-7)_2 + 407792(m-7)_3 + \\ + 1179402(m-7)_4 + 2375065(m-7)_5 + 3427543(m-7)_6 + \\ + 3581493(m-7)_7 + 2695007(m-7)_8 + 1426607(m-7)_9 + \\ + 504945(m-7)_{10} + 107415(m-7)_{11} + 10395(m-7)_{12}.$$

La formule générale pour $C_{m,k}$ serait sans doute assez compliquée; nous ne l'établirons pas, vu que nous n'en ferons aucun usage dans la suite. Elle serait pourtant bien intéressante et, à l'occasion, utile, car $C_{m,k}$ étant la somme des combinaisons des $(m - 1)$ premiers nombres entiers $1, 2, 3, \dots (m - 1)$, pris k à k , elle fournirait le moyen d'évaluer cette somme d'une manière relativement simple. Ainsi, par exemple, la somme des 84 combinaisons des nombres $1, 2, \dots 9$, pris 3 à 3, est donnée par la formule

$$C_{10,3} = 6 + 44.C_1 + 131.C_2 + 204.C_3 + 176.C_4 + 80.C_5 + 15 = 9450.$$

Passant maintenant aux coefficients a , on prévoit qu'il est possible d'établir de différentes manières des relations linéaires entre $a_1, a_2, \dots a_m$; il s'agit d'en choisir une qui ne soit pas trop compliquée. Partant de la formule

$$(2) \quad a_m = C_{m,0}[\lambda]^m - C_{m,1}[\lambda]^{m-1} + C_{m,2}[\lambda]^{m-2} - \dots + (-1)^{m-1} C_{m,m-1}[\lambda],$$

on essaiera de déterminer les constantes $A_{m,v}$ de façon à avoir identiquement

$$(4) \quad a_m = \lambda a_{m-1} + A_{m,1} a_{m-2} - A_{m,2} a_{m-3} + A_{m,3} a_{m-4} - \dots + (-1)^{m-1} A_{m,m-2} a$$

Or d'après (2)

$$\lambda a_{m-1} = C_{m-1,0} \lambda [\lambda]^{m-1} - C_{m-1,1} \lambda [\lambda]^{m-2} + C_{m-1,2} \lambda [\lambda]^{m-3} - C_{m-1,3} \lambda [\lambda]^{m-4} + \dots + (-1)^{m-2} C_{m-1,m-2} \lambda [\lambda],$$

et comme

$$\lambda [\lambda]^k = (\lambda + k - k) [\lambda]^k = [\lambda]^{k+1} - k [\lambda]^k,$$

l'équation précédente peut s'écrire

$$\lambda a_{m-1} = C_{m-1,0} [[\lambda]^m - (m - 1) [\lambda]^{m-1}] - C_{m-1,1} [[\lambda]^{m-1} - (m - 2) [\lambda]^{m-2}] + C_{m-1,2} [[\lambda]^{m-2} - (m - 3) [\lambda]^{m-3}] - C_{m-1,3} [[\lambda]^{m-3} - (m - 4) [\lambda]^{m-4}] + \dots + (-1)^{m-2} C_{m-1,m-2} [[\lambda]^2 - 1 \cdot [\lambda]];$$

ou bien

$$\lambda a_{m-1} = C_{m-1,0} [\lambda]^m -$$

$$- [C_{m-1,1} + (m-1) C_{m-1,0}] [\lambda]^{m-1} + [C_{m-1,2} + (m-2) C_{m-1,1}] [\lambda]^{m-2} -$$

$$- [C_{m-1,3} + (m-3) C_{m-1,2}] [\lambda]^{m-3} + [C_{m-1,4} + (m-4) C_{m-1,3}] [\lambda]^{m-4} -$$

$$- \dots + (-1)^{m-1} [C_{m-1,m-1} + 1 \cdot C_{m-1,m-2}] [\lambda];$$

ou encore en appliquant les formules (3) d'après lesquelles

$$C_{m-1,1} + (m-1) C_{m-1,0} = C_{m,1}$$

$$C_{m-1,2} + (m-2) C_{m-1,1} = C_{m,2} - 1 \cdot C_{m-1,1}$$

$$C_{m-1,3} + (m-3) C_{m-1,2} = C_{m,3} - 2 \cdot C_{m-1,2}$$

.....

$$C_{m-1,m-1} + 1 \cdot C_{m-1,m-2} = C_{m,m-1} - (m-2) C_{m-1,m-2},$$

$$\lambda a_{m-1} = C_{m,0} [\lambda]^m - C_{m,1} [\lambda]^{m-1} + [C_{m,2} - 1 \cdot C_{m-1,1}] [\lambda]^{m-2} -$$

$$- [C_{m,3} - 2 \cdot C_{m-1,2}] [\lambda]^{m-3} + [C_{m,4} - 3 \cdot C_{m-1,3}] [\lambda]^{m-4} -$$

$$\dots + (-1)^{m-1} [C_{m,m-1} - (m-2) C_{m-1,m-2}] [\lambda].$$

Si l'on introduit cette expression pour λa_{m-1} et en même temps les valeurs de $a_{m-2}, a_{m-3}, \dots, a_1$ tirées de (2) dans l'équation (4), il vient

$$a_m = C_{m,0} [\lambda]^m - C_{m,1} [\lambda]^{m-1} + [C_{m,2} - 1 \cdot C_{m-1,1}] [\lambda]^{m-2} - [C_{m,3} - 2 C_{m-1,2}] [\lambda]^{m-3} +$$

$$+ [C_{m,4} - 3 \cdot C_{m-1,3}] [\lambda]^{m-4} - \dots + (-1)^{m-1} [C_{m,m-1} - (m-2) C_{m-1,m-2}] [\lambda] +$$

$$A_{m,1} \{ C_{m-2,0} [\lambda]^{m-2} - C_{m-2,1} [\lambda]^{m-3} + C_{m-2,2} [\lambda]^{m-4} \dots + (-1)^{m-3} C_{m-2,m-3} [\lambda] \} -$$

$$A_{m,2} \{ C_{m-3,0} [\lambda]^{m-3} - C_{m-3,1} [\lambda]^{m-4} + \dots + (-1)^{m-4} C_{m-3,m-4} [\lambda] \} +$$

$$A_{m,3} \{ C_{m-4,0} [\lambda]^{m-4} - C_{m-4,1} [\lambda]^{m-5} + \dots + (-1)^{m-5} C_{m-4,m-5} [\lambda] \} -$$

$$A_{m,4} \{ C_{m-5,0} [\lambda]^{m-5} - C_{m-5,1} [\lambda]^{m-6} + \dots + (-1)^{m-6} C_{m-5,m-6} [\lambda] \} +$$

$$\dots$$

$$(-1)^{m-1} A_{m,m-2} C_{1,0} [\lambda].$$

En égalant les coefficients des mêmes symboles $[\lambda]^\nu$ ($\nu = m, m-1, \dots, 2, 1$) dans les seconds membres de (2) et (5), on obtient les équations

$$C_{m,0} = C_{m,0}; -C_{m,1} = -C_{m,1}$$

$$C_{m,2} = [C_{m,2} - 1 \cdot C_{m-1,1}] + A_{m,1} C_{m-2,0}$$

$$-C_{m,3} = -[C_{m,3} - 2 \cdot C_{m-1,2}] - A_{m,1} C_{m-2,1} - A_{m,2} C_{m-3,0}$$

$$C_{m,4} = [C_{m,4} - 3 \cdot C_{m-1,3}] + A_{m,1} C_{m-2,2} + A_{m,2} C_{m-3,1} + A_{m,3} C_{m-4,0}$$

.....

$$\begin{aligned} (-1)^{m-1} C_{m,m-1} &= (-1)^{m-1} [C_{m,m-1} - (m-2) C_{m-1,m-2}] + (-1)^{m-3} A_{m,1} C_{m-2,m-3} \\ &- (-1)^{m-4} A_{m,2} C_{m-3,m-4} + (-1)^{m-5} A_{m,3} C_{m-4,m-5} - (-1)^{m-6} A_{m,4} C_{m-5,m-6} \\ &+ \dots + (-1)^{m-1} A_{m,m-2} C_{1,0} \end{aligned}$$

dont on tire, en les résolvant par rapport au dernier $A_{m,\mu}$ qui se trouve dans chacune d'elles

$$A_{m,1} = 1 \cdot C_{m-1,1}$$

$$A_{m,2} = 2 C_{m-1,2} - A_{m,1} C_{m-2,1}$$

$$A_{m,3} = 3 C_{m-1,3} - A_{m,1} C_{m-2,2} - A_{m,2} C_{m-3,1}$$

$$A_{m,4} = 4 C_{m-1,4} - A_{m,1} C_{m-2,3} - A_{m,2} C_{m-3,2} - A_{m,3} C_{m-4,1}$$

.....

$$\begin{aligned} A_{m,m-2} &= (m-2) C_{m-1,m-2} - A_{m,1} C_{m-2,m-3} - A_{m,2} C_{m-3,m-4} - A_{m,3} C_{m-4,m-5} \\ &\dots - A_{m,m-3} C_{2,1} \end{aligned}$$

Ces valeurs obtenues, il est facile de vérifier directement les égalités

$$(7) \left\{ \begin{aligned} A_{m,1} &= A_{m-1,1} + (m-2) \\ A_{m,2} &= A_{m-1,2} + 1 \cdot A_{m-1,1} \\ A_{m,3} &= A_{m-1,3} + 2 \cdot A_{m-1,2} \\ A_{m,4} &= A_{m-1,4} + 3 \cdot A_{m-1,3} \\ &\dots \end{aligned} \right.$$

De proche en proche on arrive à la relation hypothétique

$$(7^a) \quad A_{m,k-1} = A_{m-1,k-1} + (k-2) A_{m-1,k-2},$$

et si l'on peut prouver, partant de (7) et (7^a) que l'on a de même

$$(8) \quad A_{m,k} = A_{m-1,k} + (k-1) A_{m-1,k-1},$$

cette dernière égalité sera valable pour toutes les valeurs entières de k , de $k = 1$ jusqu'à $k = m - 2$. Or la démonstration en question n'offre aucune difficulté. En effet, en s'appuyant sur les formules (6), (7), (7^a) et (3), on a successivement

$$\begin{aligned} A_{m,k} &= k C_{m-1,k} - A_{m,1} C_{m-2,k-1} - A_{m,2} C_{m-3,k-2} - A_{m,3} C_{m-4,k-3} - \dots - \\ &- A_{m,k-1} C_{m-k,1} = k [C_{m-2,k} + (m-2) C_{m-2,k-1}] - [A_{m-1,1} + (m-2)] C_{m-2,k-1} - \\ &- [A_{m-1,2} + 1 \cdot A_{m-1,1}] C_{m-3,k-2} - [A_{m-1,3} + 2 \cdot A_{m-1,2}] C_{m-4,k-3} - \dots - \\ &- [A_{m-1,k-1} + (k-2) A_{m-1,k-2}] C_{m-k,1} = k C_{m-2,k} - A_{m-1,1} C_{m-2,k-1} - \\ &- A_{m-1,2} C_{m-3,k-2} - \dots - A_{m-1,k-1} C_{m-k,1} + k(m-2) C_{m-2,k-1} - (m-2) C_{m-2,k-1} - \\ &- 1 \cdot A_{m-1,1} C_{m-3,k-2} - 2 \cdot A_{m-1,2} C_{m-4,k-3} - \dots - (k-2) A_{m-1,k-2} C_{m-k,1} \\ &= k C_{m-2,k} - A_{m-1,1} [C_{m-3,k-1} + (m-3) C_{m-3,k-2}] - A_{m-1,2} [C_{m-4,k-2} + \\ &+ (m-4) C_{m-4,k-3}] - A_{m-1,3} [C_{m-5,k-3} + (m-5) C_{m-5,k-4}] - \dots - \\ &A_{m-1,k-1} [C_{m-k-1,1} + m-k-1] + (k-1)(m-2) C_{m-2,k-1} - 1 \cdot A_{m-1,1} C_{m-3,k-2} - \\ &- 2 \cdot A_{m-1,2} C_{m-4,k-3} - \dots - (k-2) A_{m-1,k-2} C_{m-k,1} = A_{m-1,k} - \\ &- (m-3) A_{m-1,1} C_{m-3,k-2} - (m-4) A_{m-1,2} C_{m-4,k-3} - (m-5) A_{m-1,3} C_{m-5,k-4} - \dots \\ &\dots - (m-k) A_{m-1,k-2} C_{m-k,1} - (m-k-1) A_{m-1,k-1} + \\ &+ (k-1)(m-2) C_{m-2,k-1} - 1 \cdot A_{m-1,1} C_{m-3,k-2} - 2 \cdot A_{m-1,2} C_{m-4,k-3} - \dots - \\ &- (k-2) A_{m-1,k-2} C_{m-k,1} = A_{m-1,k} + (m-2) [(k-1) C_{m-2,k-1} - A_{m-1,1} C_{m-3,k-2} - \\ &- A_{m-1,2} C_{m-4,k-3} - \dots - A_{m-1,k-2} C_{m-k,1}] \\ &+ 1 \left| \begin{array}{l} A_{m-1,1} C_{m-3,k-2} + 2 \\ -1 \end{array} \right| \begin{array}{l} A_{m-1,2} C_{m-4,k-3} + \dots + (k-2) \\ -2 \end{array} \left| \begin{array}{l} A_{m-1,k-2} C_{m-k,1} \\ -(k-2) \end{array} \right| \\ &- (m-k-1) A_{m-1,k-1} \\ &= A_{m-1,k} + (m-2) A_{m-1,k-1} - (m-k-1) A_{m-1,k-1} = A_{m-1,k} + (k-1) A_{m-1,k-1}. \end{aligned}$$

Ainsi la formule (8) est démontrée.

Les nombres $A_{m,k}$ conservant leur valeur et leur importance quelle que soit la valeur particulière qu'on veut attribuer à λ , il ne sera pas inutile de consigner ici le petit tableau suivant :

$A_{m,k}$.

$k =$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
3	1										
4	3	1									
5	6	4	2								
6	10	10	10	6							
7	15	20	30	36	24						
8	21	35	70	126	168	120					
9	28	56	140	336	672	960	720				
10	36	84	252	756	2016	4320	6480	5040			
11	45	120	420	1512	5040	14400	32400	50400	40320		
12	55	165	660	2772	11088	39600	118800	277200	443520	362880	
13	66	220	990	4752	22176	95040	356400	1108800	2661120	4354560	3628800

Valeurs de m.

A l'aide de ce tableau on calcule facilement les valeurs des coefficients a_k dont les 11 premiers sont :

$$a_1 = \lambda$$

$$a_2 = \lambda^2$$

$$a_3 = \lambda^3 + \lambda$$

$$a_4 = \lambda^4 + 4\lambda^2 - \lambda$$

$$a_5 = \lambda^5 + 10\lambda^3 - 5\lambda^2 + 8\lambda$$

$$a_6 = \lambda^6 + 20\lambda^4 - 15\lambda^3 + 58\lambda^2 - 26\lambda$$

$$a_7 = \lambda^7 + 35\lambda^5 - 35\lambda^4 + 238\lambda^3 - 217\lambda^2 + 194\lambda$$

$$a_8 = \lambda^8 + 56\lambda^6 - 70\lambda^5 + 728\lambda^4 - 1008\lambda^3 + 2035\lambda^2 - 1142\lambda$$

$$a_9 = \lambda^9 + 84\lambda^7 - 126\lambda^6 + 1848\lambda^5 - 3444\lambda^4 + 11611\lambda^3 - 13470\lambda^2 + 9736\lambda$$

$$a_{10} = \lambda^{10} + 120\lambda^8 - 210\lambda^7 + 4116\lambda^6 - 9660\lambda^5 + 47815\lambda^4 - 85410\lambda^3 + 134164\lambda^2 - 81384\lambda$$

$$a_{11} = \lambda^{11} + 165\lambda^9 - 330\lambda^8 + 8316\lambda^7 - 23562\lambda^6 + 159115\lambda^5 - 387090\lambda^4 + 983059\lambda^3 - 1243770\lambda^2 + 823392\lambda.$$

Dans le cas actuel où il s'agit du logarithme-intégral, λ est égal à l'unité et les premiers coefficients a_k deviennent

$$a_1 = 1, a_2 = 1, a_3 = 2, a_4 = 4, a_5 = 14, a_6 = 38, a_7 = 216,$$

$$a_8 = 600, a_9 = 6240, a_{10} = 9552, a_{11} = 319296, a_{12} = -519312,$$

$$a_{13} = 28108560, \text{ etc.}$$

Le logarithme-intégral, lorsqu'on y effectue la substitution

$$x = e^{-y}, \quad dx = -e^{-y} dy$$

peut se mettre sous la forme

$$J = \int_0^r \frac{dx}{\log x} = - \int_y^x \frac{e^{-y}}{y} dy$$

et cette dernière intégrale, abstraction faite du signe, est donnée par la série (1) dans laquelle on pose $\lambda = 1$. Ainsi l'on a

$$\begin{aligned}
 -J &= \int_y^x \frac{e^{-v}}{v} dv = \\
 &= \frac{e^{-y}}{y} \left[1 - \frac{1}{y+1} + \frac{1}{(y+1)(y+2)} - \frac{2}{(y+1)(y+2)(y+3)} + \right. \\
 &\quad \left. + \frac{4}{(y+1)(y+2)(y+3)(y+4)} - \frac{14}{(y+1)\dots(y+5)} + \right. \\
 &\quad \left. + \frac{38}{(y+1)\dots(y+6)} - \frac{216}{(y+1)\dots(y+7)} + \frac{600}{(y+1)\dots(y+8)} - \right. \\
 &\quad \left. - \frac{6240}{(y+1)\dots(y+9)} + \frac{9552}{(y+1)\dots(y+10)} - \frac{319296}{(y+1)\dots(y+11)} - \right. \\
 &\quad \left. - \frac{519312}{(y+1)\dots(y+12)} - \frac{28108560}{(y+1)\dots(y+13)} \dots \dots \right].
 \end{aligned}$$

Au moyen de cette série on trouve, par exemple, pour $y=6$ ou $x = e^{-6}$, en tenant compte des 11 premiers termes.

$$J = - \int_6^x \frac{e^{-y}}{y} dy = \int_0^{-6} \frac{dx}{\log x} = 0,000360082_{s_1}.$$

Afin de juger de la valeur pratique de la série (2^a), p. 208 de ma note sur le logarithme-intégral, on calculera encore une fois cette même intégrale à l'aide de la série en question. La comparaison des deux valeurs obtenues permettra de déterminer les premières décimales de la constante d'Euler.

Si dans la formule sus-mentionnée (2^a), à savoir

$$(9) \quad \int_0^x \frac{t^{a(1+\lambda)-1}}{\log t} dt = \int_0^x \frac{t^{a-1}}{\log t} dt + x^a S(x, a, \lambda),$$

où

$$S(x, \alpha, \lambda) = \log(1 + \lambda) - \frac{(\alpha \log x)}{1!} [\log(1 + \lambda) - \lambda] +$$

$$\frac{(\alpha \log x)^2}{2!} [\log(1 + \lambda) - \lambda + \frac{1}{2} \lambda^2] - \frac{(\alpha \log x)^3}{3!} [\log(1 + \lambda) - \lambda + \frac{1}{2} \lambda^2 - \frac{1}{3} \lambda^3] +$$

$$+ \frac{(\alpha \log x)^4}{4!} [\log(1 + \lambda) - \lambda + \frac{1}{2} \lambda^2 - \frac{1}{3} \lambda^3 + \frac{1}{4} \lambda^4] - + \dots,$$

on pose

$$t = x^{\frac{1}{\alpha+\beta}}, \quad dt = \frac{1}{\alpha+\beta} x^{\frac{1}{\alpha+\beta}-1} dx, \quad \log t = \frac{1}{\alpha+\beta} \log x,$$

où $\alpha > 0, \alpha + \beta > 0$, il vient d'abord

$$\int_0^x \frac{t^{\alpha+\beta-1}}{\log t} dt = \int_0^{x^{\alpha+\beta}} \frac{dx}{\log x},$$

$$\int_0^x \frac{t^{\alpha-1}}{\log t} dt = \int_0^{x^\alpha} \frac{dx}{\log x},$$

puis l'équation (9) prend la forme

$$(9^a) \quad \int_0^{x^{\alpha+\beta}} \frac{dx}{\log x} = \int_0^{x^\alpha} \frac{dx}{\log x} + x^\alpha S(x, \alpha, \lambda).$$

Maintenant pour calculer $\int_0^{\frac{r}{e}} \frac{dx}{\log x}$ on peut procéder de la

manière suivante : D'abord on calcule $\int_0^{\frac{r}{e}} \frac{dx}{\log x}$ à l'aide de la

série fondamentale

$$(10) \quad \int_0^x \frac{dx}{\log x} = C + \log(-\log x) + \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{\log^n x}{n \cdot n!};$$

ensuite l'application répétée de la formule (9^a) fournit successivement les intégrales suivantes :

$$\int_0^e \frac{x^{-1-\frac{1}{2}} dx}{\log x} = \int_0^e \frac{x^{-\frac{3}{2}} dx}{\log x} = \int_0^e \frac{x^{-1} dx}{\log x} + \frac{1}{e} S\left(\frac{1}{e}, 1, \frac{1}{2}\right),$$

$$\int_0^e \frac{x^{-\frac{3}{2}-\frac{1}{2}} dx}{\log x} = \int_0^e \frac{x^{-2} dx}{\log x} = \int_0^e \frac{x^{-\frac{3}{2}} dx}{\log x} + \frac{1}{e^{\frac{3}{2}}} S\left(\frac{1}{e}, \frac{3}{2}, \frac{1}{3}\right),$$

$$\int_0^e \frac{x^{-2-1} dx}{\log x} = \int_0^e \frac{x^{-3} dx}{\log x} = \int_0^e \frac{x^{-2} dx}{\log x} + \frac{1}{e^2} S\left(\frac{1}{e}, 2, \frac{1}{2}\right),$$

$$\int_0^e \frac{x^{-3-1} dx}{\log x} = \int_0^e \frac{x^{-4} dx}{\log x} = \int_0^e \frac{x^{-3} dx}{\log x} + \frac{1}{e^3} S\left(\frac{1}{e}, 3, \frac{1}{3}\right),$$

$$\int_0^e \frac{x^{-4-2} dx}{\log x} = \int_0^e \frac{x^{-6} dx}{\log x} = \int_0^e \frac{x^{-4} dx}{\log x} + \frac{1}{e^4} S\left(\frac{1}{e}, 4, \frac{1}{2}\right).$$

En éliminant les intégrales intermédiaires, on obtient

$$(11) \quad J = \int_0^e \frac{x^{-6} dx}{\log x} = C + \int_0^e \frac{x^{-1} dx}{\log x} + \frac{1}{e} S\left(\frac{1}{e}, 1, \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{e^{\frac{3}{2}}} S\left(\frac{1}{e}, \frac{3}{2}, \frac{1}{3}\right) + \\ + \frac{1}{e^2} S\left(\frac{1}{e}, 2, \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{e^3} S\left(\frac{1}{e}, 3, \frac{1}{3}\right) + \frac{1}{e^4} S\left(\frac{1}{e}, 4, \frac{1}{2}\right),$$

Cette disposition du calcul ne fait intervenir que trois séries, à savoir la série fondamentale (10) et les séries

$$S\left(x, a, \frac{1}{2}\right) \quad \text{et} \quad S\left(x, a, \frac{1}{3}\right).$$

Tous calculs effectués, l'égalité (11) donne

$$J = C - 0,577575747353_4 = -0,000360082_{s_1},$$

d'où l'on tire

$$C = 0,577215664\dots$$

valeur exacte jusqu'au 9^e ordre décimal.

En se servant d'une valeur plus exacte de C (Dans le mémoire de Gauss, *Disquisitiones generales circa Seriem infinitam*, etc. on en trouvera les 40 premières figures.) on obtient les valeurs suivantes des intégrales intermédiaires :

$$\int_0^{e^{-1}} \frac{dx}{\log x} = -0,21938393439552_2,$$

$$\int_0^{e^{-\frac{3}{2}}} \frac{dx}{\log x} = -0,100019582406_7,$$

$$\int_0^{e^{-2}} \frac{dx}{\log x} = -0,048900510707_7,$$

$$\int_0^{e^{-3}} \frac{dx}{\log x} = -0,013048381094_0,$$

$$\int_0^{e^{-4}} \frac{dx}{\log x} = -0,003779352409_3,$$

$$\int_0^{e^{-6}} \frac{dx}{\log x} = -0,000360082451_s,$$

