Zeitschrift: Bulletin de la Société Vaudoise des Sciences Naturelles

Herausgeber: Société Vaudoise des Sciences Naturelles

Band: 36 (1900)

Heft: 135

Artikel: Note complémentaire sur le logarithme-intégral

Autor: Amstein, H.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-266065

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 16.11.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

Boranisches Museum des eidgenössischen Polytechnikums

Bulletin de la Société Vaudoise des Sciences Naturelles.

Vol. XXXVI.

Nº 135.

1900.

NOTE COMPLÉMENTAIRE

SUR LE LOGARITHME-INTÉGRAL

PAR

H. AMSTEIN

Les quelques pages qu'on va lire forment la suite de mon travail: « Note sur le logarithme-intégral ». (V. Bulletin, vol. XXXI, nº 119, 1895, pages 203-225.) En app'iquant les formules (1) p. 204 et (2a) p. 208, on remarque bien vite que le calcul numérique du logarithme-intégral devient peu commode, dès que son argument sort de certaines limites et devient, par exemple, ou très petit ou très grand. Il serait donc à désirer de posséder deux séries remédiant à cet inconvénient, c'est-àdire convergeant d'autant plus rapidement que l'argument du logarithme-intégral est respectivement plus petit ou plus grand. Or l'une d'elle au moins existe. Elle a été donnée par M. O. Schlemilch et se trouve dans la Zeitschrift für Math. und Phys., 4. Jahrg., p. 390, de même que dans le Compendium der höheren Analysis du même auteur, 2e édition, tome II, p. 265 et suivantes. Sous une forme un peu plus générale qu'il ne nous faut, la série en question est

$$\int_{x}^{\frac{x}{e^{t}}} \frac{dv}{v^{\lambda}} = \frac{1}{x^{\lambda}} \left[1 - \frac{a_{1}}{x+1} + \frac{a_{2}}{(x+1)(x+2)} - \frac{a_{3}}{(x+1)(x+2)(x+3)} + \dots \right],$$
où
$$a_{m} = \frac{1}{\Gamma(\lambda)} \int_{0}^{x} t(t-1)(t-2) \dots \left[t - (m-1) \right] t^{\lambda-1} e^{-t} dt.$$

Les coefficients a_1, a_2, a_5, \dots se calculent facilement. En développant sous le signe \int

$$t(t-1)(t-2)(t-3)\dots[t-(m-1)] =$$

$$= t^{m} - C_{m,1} t^{m-1} + C_{m,2} t^{m-2} - \dots + (-1)^{m-1} C_{m,m-1} t,$$

et en intégrant ensuite, il vient

$$a_{m} = \frac{1}{\Gamma(\lambda)} \int_{0}^{\infty} \left[t^{m} - C_{m,1} t^{m-1} + C_{m,2} t^{m-2} - \dots + (-1)^{m-1} C_{m,m-1} t \right] t^{\lambda-1} e^{t} dt =$$

$$= \frac{1}{I(\lambda)} \left[\int_{0}^{\infty} t^{m+\lambda-1-t} dt - C_{m,1} \int_{0}^{\infty} t^{m+\lambda-2-t} dt + \dots + (-1)^{m-1} C_{m,m-1} \int_{0}^{\infty} t^{\lambda} e^{t} dt \right] =$$

$$=\frac{1}{\Gamma(\lambda)}\left[\Gamma(m+\lambda)-C_{m,1}\Gamma(m+\lambda-1)+C_{m,2}\Gamma(m+\lambda-2)-...+(-1)^{m-1}C_{m,m-1}\Gamma(\lambda+1)\right]$$

Or on sait que

$$\frac{\Gamma(\lambda+1)}{\Gamma(\lambda)} = \lambda,$$

et par conséquent

$$\frac{\Gamma(\lambda+2)}{\Gamma(\lambda)} = \frac{\Gamma(\lambda+2)}{\Gamma(\lambda+1)} \cdot \frac{\Gamma(\lambda+1)}{\Gamma(\lambda)} = \lambda (\lambda+1),$$

.

$$\frac{\Gamma(\lambda+q)}{\Gamma(\lambda)} = \lambda (\lambda+1)(\lambda+2)...(\lambda+q-1) = [\lambda]^q,$$

de sorte que finalement

(2)
$$a_{m} = \left[\lambda\right]^{m} - C_{m,1} \left[\lambda\right]^{m-1} + C_{m,2} \left[\lambda\right]^{m-2} - \dots + (-1)^{m-1} C_{m,m-1} \left[\lambda\right].$$

La série (1) dont M. Schlæmilch démontre la convergence pour toutes les valeurs positives de x, mérite qu'on s'y arrête pendant quelques instants. Il peut arriver qu'on en ait besoin d'un grand nombre de termes. Dans ce cas il serait utile d'avoir

une formule de réduction facilitant encore le calcul des coefficients a. Afin de l'obtenir on commencera par étudier les quantités C.

La formation de ces quantités fait immédiatement reconnaître l'exactitude des équations

$$C_{m,1} = C_{m-1,1} + (m-1) C_{m-1,0}$$

$$C_{m,2} = C_{m-1,2} + (m-1) C_{m-1,1}$$

$$C_{m,3} = C_{m-1,3} + (m-1) C_{m-1,2}$$

$$\vdots$$

$$C_{m,k} = C_{m-1,k} + (m-1) C_{m-1,k-1}$$

$$\vdots$$

$$C_{m,m-1} = C_{m-1,m-1} + (m-1) C_{m-1,m-2},$$

où $C_{n,0} = 1$ et $C_{n,n} = 0$. On a ainsi, par exemple,

$$C_{m,1} = C_{m-1,1} + (m-1)$$
 $C_{m-1,1} = C_{m-2,1} + (m-2)$
...
 $C_{3,1} = C_{2,1} + 2$
 $C_{2,1} = 1$

En ajoutant ces équations terme à terme, il vient

$$C_{m,1} = 1 + 2 + 3 + ... + (m-1)$$

et l'on en conclut que les quantités $C_{2,1}$, $C_{3,1}$, $C_{4,1}$, $C_{m,1}$ forment une série arithmétique du second ordre.

Soit

$$R = u_0, u_1, u_2, \dots u_n, \dots$$

une série de nombres,

$$\Delta R = \Delta u_0 = u_1 - u_0, \quad M_1 = u_2 - u_1, \dots, \Delta u_n = u_{n+1} - u_n, \dots$$

la série de leurs différences premières,

$$I^{2}R = I^{2}u_{0} = Iu_{1} - Iu_{0}, I^{2}u_{1} = Iu_{2} - Iu_{1}, \dots I^{2}u_{n} = Iu_{n+1} - Iu_{n}, \dots$$

la série de leurs différences deuxièmes,

.

$$J^{p}R = J^{p}u_{0} = J^{p-1}u_{1} - J^{p-1}u_{0}, \quad J^{p}u_{1} = J^{p-1}u_{2} - J^{p-1}u_{1}, \dots$$

$$J^{p}u_{n} = J^{p-1}u_{n+1} - J^{p-1}u_{n}, \dots$$

la série de leurs différences $p^{i\hat{e}mes}$. Alors on sait que le terme général de R est donné par la formule

$$u_p = u_0 + p_1 / u_0 + p_2 / u_0 + p_3 / u_0 + \dots + / u_0$$

οù

$$p_r = \frac{p(p-1)(p-2)\dots(p-r+1)}{1\dots 2\dots r}$$

désigne le r^{ieme} cœfficient du binôme, et la série R est dite une série arithmétique du k^{ieme} ordre, lorsque toutes les différences $(k+1)^{ieme}$ sont zéros.

Dans le cas où la série se compose des nombres $C_{2,1}$, $C_{3,1}$, $C_{4,1}$, ... on trouve immédiatement

$$C_{2,1} = u_0 = 1$$
, $fu_0 = 2$, $f^2u_0 = 1$, $f^3u_0 = 0$,

de sorte que

$$C_{p+2.1} = u_p = u_0 + p_1 I u_0 + p_2 I^2 u_0 = 1 + 2p_1 + p_2$$
.

On vérifie aisément qu'en effet on a

$$C_{m,1} = 1 + 2 + 3 + \dots + (m-1) = \frac{m(m-1)}{2} = 1 + 2(m-2)_1 + (m-2)_2.$$

Ce fait une fois reconnu, il est naturel de demander si peutêtre les quantités $C_{m,2}$ forment une série arithmétique du 4° ordre, les quantités $C_{m,3}$ une série arithmétique du 6° ordre et ainsi de suite.

Si la réponse est affirmative, il doit être possible de mettre les nombres $C_{m,2}$ sous la forme

$$u_p = u_0 + p_1 / u_0 + p_2 / u_0 + p_3 / u_0 + p_4 / u_0$$

Or par un calcul des plus simples on prouve directement que l'on peut écrire

$$C_{3,2} = 2 = 2$$

$$C_{4,2} = 11 = 2 + 9 \cdot 1_{1}$$

$$C_{5,2} = 35 = 2 + 9 \cdot 2_{1} + 15 \cdot 2_{2}$$

$$C_{6,2} = 85 = 2 + 9 \cdot 3_{1} + 15 \cdot 3_{2} + 11 \cdot 3_{3}$$

$$C_{7,2} = 175 = 2 + 9 \cdot 4_{1} + 15 \cdot 4_{2} + 11 \cdot 4_{3} + 3 \cdot 4_{4}$$

$$C_{8,2} = 322 = 2 + 9 \cdot 5_{1} + 15 \cdot 5_{2} + 11 \cdot 5_{3} + 3 \cdot 5_{4}$$

Dans ce cas on a

$$C_{3,2} = u_0 = 2$$
, $\mathcal{L}u_0 = 9$, $\mathcal{L}^2u_0 = 15$, $\mathcal{L}^3u_0 = 11$, $\mathcal{L}^4u_0 = 3$, $\mathcal{L}^5u_0 = 0$, d'où il suit

$$C_{p+3,2} = u_p = 2 + 9 p_1 + 15 p_2 + 11 p_3 + 3 p_4,$$

et par conséquent

$$C_{m,2} = 2 + 9(m-3)_4 + 15(m-3)_2 + 11(m-3)_5 + 3(m-3)_4$$

A l'aide de la relation $C_{m+1,2;} = C_{m,2} + m C_{m,1}$ on montre aisément que cette formule supposée exacte pour m, reste encore valable pour m+1; elle est donc applicable à toute valeur entière de m > ou = 3.

Un raisonnement analogue conduit aux formules suivantes:

$$C_{m,3} = 6 + 44 (m-4)_1 + 131 (m-4)_2 + 204 (m-4)_3 + 176 (m-4)_4 + 80 (m-4)_5 + 15 (m-4)_6.$$

$$\begin{split} \mathrm{C}_{\mathrm{m,4}} &= 24 + 250 \ (m-5)_{\mathrm{4}} + 1100 \ (m-5)_{\mathrm{2}} + 2695 \ (m-5)_{\mathrm{3}} + 4045 \ (m-5)_{\mathrm{4}} + \\ &+ 3824 \ (m-5)_{\mathrm{5}} + 2230 \ (m-5)_{\mathrm{6}} + 735 \ (m-5)_{\mathrm{7}} + \ 105 \ (m-5)_{\mathrm{8}} \,. \end{split}$$

$$C_{m,5} = 120 + 1644 (m - 6)_{4} + 9724 (m - 6)_{2} + 33060 (m - 6)_{5} 72045 (m - 6)_{4} + 105650 (m - 6)_{5} + 105939 (m - 6)_{6} + 71904 (m - 6)_{7} + 31675 (m - 6)_{8} + 8190 (m - 6)_{9} + 945 (m - 6)_{10}.$$

La formule générale pour $C_{m,k}$ serait sans doute assez compliquée; nous ne l'établirons pas, vu que nous n'en ferons aucun usage dans la suite. Elle serait pourtant bien intéressante et, à l'occasion, utile, car $C_{m,k}$ étant la somme des combinaisons des (m-1) premiers nombres entiers $1, 2, 3, \ldots (m-1)$, pris $k \ a \ k$, elle fournirait le moyen d'évaluer cette somme d'une manière relativement simple. Ainsi, par exemple, la somme des 84 combinaisons des nombres $1, 2, \ldots 9$, pris $3 \ a \ 3$, est donnée par la formule

$$C_{10,3} = 6 + 44 \cdot 6_4 + 131 \cdot 6_2 + 204 \cdot 6_3 + 176 \cdot 6_4 + 80 \cdot 6_5 + 15 = 9450$$
.

Passant maintenant aux coefficients a, on prévoit qu'il est possible d'établir de différentes manières des relations linéaires entre $a_1, a_2, \ldots a_m$; il s'agit d'en choisir une qui ne soit pas trop compliquée. Partant de la formule

(2)
$$a_m = C_{m,0}[\lambda]^m - C_{m,1}[\lambda]^{m-1} + C_{m,2}[\lambda]^{m-2} - \dots + (-1)^{m-1}C_{m,m-1}[\lambda],$$

on essayera de déterminer les constantes $A_{m,v}$ de façon à avoir identiquement

(4)
$$a_m = \lambda a_{m-1} + A_{m,1} a_{m-2} - A_{m,2} a_{m-3} + A_{m,3} a_{m-4} - \dots + (-1)^{m-1} A_{m,m-2} a_{m-4}$$

Or d'après (2)

$$\lambda a_{m-1} = C_{m-1,0} \lambda [\lambda]^{m-1} - C_{m-1,1} \lambda [\lambda]^{m-2} + C_{m-1,2} \lambda [\lambda]^{m-3} - C_{m-1,3} \lambda [\lambda]^{m-4} + C_{m-1,4} \lambda [\lambda]^{m-5} - \dots + (-1)^{m-2} C_{m-1,m-2} \lambda [\lambda],$$

et comme

$$\lambda [\lambda]^k = (\lambda + k - k) [\lambda]^k = [\lambda]^{k+1} - k [\lambda]^k,$$

l'équation précédente peut s'écrire

$$\lambda a_{m-1} = C_{m-1,0} \left[[\lambda]^m - (m-1) [\lambda]^{m-1} \right] - C_{m-1,1} \left[[\lambda]^{m-1} - (m-2) [\lambda]^{m-2} \right] + C_{m-1,2} \left[[\lambda]^{m-2} - (m-3) [\lambda]^{m-3} \right] - C_{m-1,3} \left[[\lambda]^{m-3} - (m-4) [\lambda]^{m-4} \right] + \cdots + (-1)^{m-2} C_{m-1,m-2} \left[[\lambda]^2 - 1 \cdot [\lambda] \right];$$
ou bien

$$\lambda a_{m-1} = \mathbf{C}_{m-1.0} \left[\lambda \right]^m -$$

$$-\left[C_{m-1,1}+(m-1) C_{m-1,0}\right] \left[\lambda\right]^{m-1}+\left[C_{m-1,2}+(m-2) C_{m-1,1}\right] \left[\lambda\right]^{m-2}-$$

$$-\left[C_{m-1,3}+(m-3) C_{m-1,2}\right] \left[\lambda\right]^{m-3}+\left[C_{m-1,4}+(m-4) C_{m-1,3}\right] \left[\lambda\right]^{m-4}-$$

$$-\ldots +\left(-1\right)^{m-1} \left[C_{m-1,m-1}+1 \cdot C_{m-1,m-2}\right] \left[\lambda\right];$$

ou encore en appliquant les formules (3) d'après lesquelles

$$-\left[C_{m,3}-2\cdot C_{m-1,2}\right][\hat{\lambda}]^{m-3}+\left[C_{m,4}-3\cdot C_{m-1,3}\right][\hat{\lambda}]^{m-4}-\cdots+(-1)^{m-1}\left[C_{m,m-1}-(m-2)\cdot C_{m-1,m-2}\right][\hat{\lambda}].$$

Si l'on introduit cette expression pour λa_{m-1} et en même temps les valeurs de a_{m-2} , a_{m-3} , ... a_1 tirées de (2) dans l'équation (4), il vient

$$a_{m} = C_{m,0}[\lambda]^{m} - C_{m,1}[\lambda]^{m-1} + [C_{m,2} - 1 \cdot C_{m-1,1}][\lambda]^{m-2} - [C_{m,3} - 2 \cdot C_{m-1,2}][\lambda]^{m-3} + [C_{m,4} - 3 \cdot C_{m-1,3}][\lambda]^{m-4} - \dots + (-1)^{m-1}[C_{m,m-1} - (m-2) \cdot C_{m-1,m-2}][\lambda] + A_{m,4} \langle C_{m-2,0}[\lambda]^{m-2} - C_{m-2,4}[\lambda]^{m-3} + C_{m-2,2}[\lambda]^{m-4} \dots + (-1)^{m-3} \cdot C_{m-2,m-3}[\lambda] \rangle - A_{m,2} \langle C_{m-3,0}[\lambda]^{m-3} - C_{m-3,4}[\lambda]^{m-4} + \dots + (-1)^{m-4} \cdot C_{m-3,m-4}[\lambda] \rangle + A_{m,3} \langle C_{m-4,0}[\lambda]^{m-4} - C_{m-4,1}[\lambda]^{m-5} + \dots + (-1)^{m-5} \cdot C_{m-4,m-5}[\lambda] \rangle - A_{m,4} \langle C_{m-5,0}[\lambda]^{m-3} - C_{m-5,4}[\lambda]^{m-6} + \dots + (-1)^{m-6} \cdot C_{m-5,m-6}[\lambda] \rangle + \dots + (-1)^{m-4} \cdot C_{m-5,m$$

En égalant les coefficients des mêmes symboles $[\lambda]^{\nu}$ $(\nu = m, m-1, \ldots 2, 1)$ dans les seconds membres de (2) et (5), on obtient les équations

$$C_{m,0} = C_{m,0}; -C_{m,1} = -C_{m,4}$$

$$C_{m,2} = [C_{m,2} - 1.C_{m-1,1}] + A_{m,4} C_{m-2,0}$$

$$-C_{m,3} = -[C_{m,3} - 2.C_{m-1,2}] - A_{m,4} C_{m-2,1} - A_{m,2} C_{m-3,0}$$

$$C_{m,4} = [C_{m,4} - 3.C_{m-1,3}] + A_{m,4} C_{m-2,2} + A_{m,2} C_{m-3,4} + A_{m,3} C_{m-4,0}$$

$$(-1)^{m-1} C_{m,m-1} = (-1)^{m-1} \left[C_{m,m-1} - (m-2) C_{m-1,m-2} \right] + (-1)^{m-3} A_{m,1} C_{m-2,m-3}$$

$$- (-1)^{m-4} A_{m,2} C_{m-3,m-4} + (-1)^{m-5} A_{m,3} C_{m-4,m-5} - (-1)^{m-6} A_{m,4} C_{m-5,m-6}$$

$$+ \dots + (-1)^{m-1} A_{m,m-2} C_{1,0}$$

dont on tire, en les résolvant par rapport au dernier $\Lambda_{m,\mu}$ qui se trouve dans chacune d'elles

$$A_{m,1} = 1 \cdot C_{m-4,1}$$

$$A_{m,2} = 2 \cdot C_{m-1,2} - A_{m,1} \cdot C_{m-2,1}$$

$$A_{m,3} = 3 \cdot C_{m-1,3} - A_{m,1} \cdot C_{m-2,2} - A_{m,2} \cdot C_{m-3,1}$$

$$A_{m,4} = 4 \cdot C_{m-1,4} - A_{m,1} \cdot C_{m-2,3} - A_{m,2} \cdot C_{m-3,2} - A_{m,3} \cdot C_{m-4,1}$$

$$A_{m,m-2} = (m-2) \cdot C_{m-1,m-2} - A_{m,1} \cdot C_{m-2,m-3} - A_{m,2} \cdot C_{m-3,m-4} - A_{m,3} \cdot C_{m-4,m-5}$$

$$\dots - A_{m,m-3} \cdot C_{2,1}$$

$$Cos_{m,n} = a_{m,m-3} \cdot C_{2,1}$$

$$Cos_{m,n} = a_{m,m-3} \cdot C_{2,1}$$

Ces valeurs obtenues, il est facile de vérifier directement les égalités

$$\begin{pmatrix}
A_{m,1} = A_{m-1,1} + (m-2) \\
A_{m,2} = A_{m-1,2} + 1 \cdot A_{m-1,1} \\
A_{m,3} = A_{m-1,3} + 2 \cdot A_{m-1,2} \\
A_{m,4} = A_{m-1,4} + 3 \cdot A_{m-1,3} \\
\vdots$$

NOTE COMPLÉMENTAIRE SUR LE LOGARITHME-INTÉGRAL

De proche en proche on arrive à la relation hypothétique

$$(72) Am,k-1 = Am-1,k-1 + (k-2) Am-1,k-2,$$

et si l'on peut prouver, partant de (7) et (7a) que l'on a de même

(8)
$$A_{m,k} = A_{m-1,k} + (k-1) A_{m-1,k-1},$$

cette dernière égalité sera valable pour toutes les valeurs entières de k, de k=1 jusqu'à k=m-2. Or la démonstration en question n'offre aucune difficulté. En effet, en s'appuyant sur les formules (6), (7), (7^a) et (3), on a successivement

$$\begin{aligned} &\mathbf{A}_{m,k} = k \, \mathbf{C}_{m-1,k} - \mathbf{A}_{m,1} \, \mathbf{C}_{m-2,k-1} - \mathbf{A}_{m,2} \, \mathbf{C}_{m-3,k-2} - \mathbf{A}_{m,3} \, \mathbf{C}_{m-4,k-3} - \dots - \\ &- \mathbf{A}_{m,k-1} \, \mathbf{C}_{m-k,1} = k \, [\mathbf{C}_{m-2,k} + (m-2) \, \mathbf{C}_{m-2,k-1}] - [\mathbf{A}_{m-1,1} + (m-2)] \, \mathbf{C}_{m-2,k-1} - \\ &- [\mathbf{A}_{m-1,2} + \mathbf{1} \cdot \mathbf{A}_{m-1,1}] \, \mathbf{C}_{m-3,k-2} - [\mathbf{A}_{m-1,3} + 2 \cdot \mathbf{A}_{m-1,2}] \, \mathbf{C}_{m-4,k-3} - \dots - \\ &- [\mathbf{A}_{m-1,k-1} + (k-2) \, \mathbf{A}_{m-1,k-2}] \, \mathbf{C}_{m-k,1} = k \, \mathbf{C}_{m-2,k} - \mathbf{A}_{m-1,1} \, \mathbf{C}_{m-2,k-1} - \\ &- \mathbf{A}_{m-1,k-1} \, \mathbf{C}_{m-3,k-2} - \dots - \mathbf{A}_{m-1,k-1} \, \mathbf{C}_{m-k,1} + k \, (m-2) \, \mathbf{C}_{m-2,k-1} - (m-2) \, \mathbf{C}_{m-2,k-1} - \\ &- \mathbf{1} \cdot \mathbf{A}_{m-1,1} \, \mathbf{C}_{m-3,k-2} - 2 \cdot \mathbf{A}_{m-1,2} \, \mathbf{C}_{m-k,k-3} - \dots - (k-2) \, \mathbf{A}_{m-1,k-2} \, \mathbf{C}_{m-k,1} \\ &= k \, \mathbf{C}_{m-2,k} - \mathbf{A}_{m-1,1} \, [\mathbf{C}_{m-3,k-1} + (m-3) \, \mathbf{C}_{m-3,k-2}] - \mathbf{A}_{m-1,2} \, [\mathbf{C}_{m-4,k-2} + \\ &+ (m-4) \, \mathbf{C}_{m-4,k-3}] - \mathbf{A}_{m-1,3} \, [\mathbf{C}_{m-5,k-3} + (m-5) \, \mathbf{C}_{m-5,k-4}] - \dots - \\ &\mathbf{A}_{m-1,k-1} \, [\mathbf{C}_{m-k-1,1} + m - k-1] + (k-1) \, (m-2) \, \mathbf{C}_{m-2,k-1} - \mathbf{1} \cdot \mathbf{A}_{m-1,1} \, \mathbf{C}_{m-3,k-2} - \\ &- 2 \cdot \mathbf{A}_{m-1,2} \, \mathbf{C}_{m-4,k-3} - \dots - (k-2) \, \mathbf{A}_{m-1,k-2} \, \mathbf{C}_{m-k,1} = \mathbf{A}_{m-1,k} - \\ &- (m-3) \, \mathbf{A}_{m-1,1} \, \mathbf{C}_{m-3,k-2} - (m-4) \, \mathbf{A}_{m-1,2} \, \mathbf{C}_{m-k,1} = \mathbf{A}_{m-1,k} - \\ &- (m-3) \, \mathbf{A}_{m-1,1} \, \mathbf{C}_{m-3,k-2} - (m-4) \, \mathbf{A}_{m-1,2} \, \mathbf{C}_{m-k,1} = \mathbf{A}_{m-1,k} - \\ &+ (k-1) \, (m-2) \, \mathbf{C}_{m-2,k-1} - \mathbf{1} \cdot \mathbf{A}_{m-1,1} \, \mathbf{C}_{m-3,k-2} - 2 \cdot \mathbf{A}_{m-1,2} \, \mathbf{C}_{m-4,k-3} - \dots - \\ &- (k-2) \, \mathbf{A}_{m-1,k-2} \, \mathbf{C}_{m-k,1} + \mathbf{A}_{m-1,k} + (m-2) \, [(k-1) \, \mathbf{C}_{m-2,k-1} - \mathbf{A}_{m-1,1} \, \mathbf{C}_{m-3,k-2} - \\ &- \mathbf{A}_{m-1,2} \, \mathbf{C}_{m-k,k-3} - \dots - \mathbf{A}_{m-1,k-2} \, \mathbf{C}_{m-k,1} \\ &- 1 \, \mathbf{A}_{m-1,k} \, \mathbf{C}_{m-3,k-2} + 2 \, \mathbf{A}_{m-1,k-2} \, \mathbf{C}_{m-k,1} \\ &- (m-k-1) \, \mathbf{A}_{m-1,k-1} \\ &- (m-k-1) \, \mathbf{A}_{m-1,k-1} - (m-k-1) \, \mathbf{A}_{m-1,k-1} = \mathbf{A}_{m-1,k} + (k-1) \, \mathbf{A}_{m-1,k-1} \\ &- (m-k-1) \, \mathbf{A}_{m-1,k-1} - (m-k-1) \, \mathbf{A}_{m-1,k-1} - (m-k-1) \, \mathbf{A}_{m-1,k-1} \\ &- \mathbf{A}_{m-1,k} + (k-1) \, \mathbf{A}_{m-1,k-1} - (m-k-1) \, \mathbf{A}_{m-1,k-1} \\ &- \mathbf{A}_$$

Les nombres Am.k conservant leur valeur et leur importance quelle que soit la valeur particulière qu'on veut attribuer à \(\lambda \), il ne sera pas inutile de consigner ici le petit tableau suivant

A l'aide de ce tableau on calcule facilement les valeurs des coefficients a_k dont les 11 premiers sont :

$$a_{1} = \lambda$$

$$a_{2} = \lambda^{2}$$

$$a_{3} = \lambda^{3} + \lambda$$

$$a_{4} = \lambda^{4} + 4\lambda^{2} - \lambda$$

$$a_{5} = \lambda^{5} + 10\lambda^{3} - 5\lambda^{2} + 8\lambda$$

$$a_{6} = \lambda^{6} + 20\lambda^{4} - 15\lambda^{3} + 58\lambda^{2} - 26\lambda$$

$$a_{7} = \lambda^{7} + 35\lambda^{8} - 35\lambda^{4} + 238\lambda^{3} - 217\lambda^{2} + 194\lambda$$

$$a_{8} = \lambda^{8} + 56\lambda^{6} - 70\lambda^{5} + 728\lambda^{4} - 1008\lambda^{3} + 2035\lambda^{2} - 1142\lambda$$

$$a_{9} = \lambda^{9} + 84\lambda^{7} - 126\lambda^{6} + 1848\lambda^{5} - 3444\lambda^{4} + 11611\lambda^{3} - 13470\lambda^{2} + 9736\lambda$$

$$a_{10} = \lambda^{10} + 120\lambda^{8} - 210\lambda^{7} + 4116\lambda^{6} - 9660\lambda^{5} + 47815\lambda^{4} - 85410\lambda^{3} + 134164\lambda^{2} - 81384\lambda$$

$$a_{11} = \lambda^{14} + 165\lambda^{9} - 330\lambda^{8} + 8316\lambda^{7} - 23562\lambda^{6} + 159115\lambda^{5} - 387090\lambda^{4} + 983059\lambda^{3} - 1243770\lambda^{2} + 823392\lambda.$$

Dans le cas actuel où il s'agit du logarithme-intégral, λ est égal à l'unité et les premiers coefficients a_k deviennent

$$a_1 = 1$$
, $a_2 = 1$, $a_3 = 2$, $a_4 = 4$, $a_5 = 14$, $a_6 = 38$, $a_7 = 216$, $a_8 = 600$, $a_9 = 6240$, $a_{10} = 9552$, $a_{11} = 319296$, $a_{12} = -519312$, $a_{13} = 28108560$, etc.

Le logarithme-intégral, lorsqu'on y effectue la substitution

$$x = e^{-y}$$
, $dx = -e^{-y} dy$

peut se mettre sous la forme

$$J = \int_{0}^{x} \frac{dx}{\log x} = -\int_{u}^{x} \frac{e^{y}}{e^{y}} \frac{dy}{y}$$

et cette dernière intégrale, abstraction faite du signe, est donnée par la série (1) dans laquelle on pose $\lambda = 1$. Ainsi l'on a

$$-J = \int_{y}^{\infty} \frac{e^{-t} dv}{v} =$$

$$= \frac{e^{y}}{y} \left[1 - \frac{1}{y+1} + \frac{1}{(y+1)(y+2)} - \frac{2}{(y+1)(y+2)(y+3)} + \frac{4}{(y+1)(y+2)(y+3)(y+4)} - \frac{14}{(y+1)\dots(y+5)} + \frac{38}{(y+1)\dots(y+6)} - \frac{216}{(y+1)\dots(y+7)} + \frac{600}{(y+1)\dots(y+8)} - \frac{6240}{(y+1)\dots(y+9)} + \frac{9552}{(y+1)\dots(y+10)} - \frac{319296}{(y+1)\dots(y+11)} - \frac{519312}{(y+1)\dots(y+12)} - \frac{28108560}{(y+1)\dots(y+13)} \dots \right].$$

Au moyen de cette série on trouve, par exemple, pour y=6 ou $x=\overline{e}^6$, en tenant compte des 11 premiers termes.

$$\mathbf{J} = -\int_{0}^{\infty} \frac{\overline{e}^{y} dy}{y} = \int_{0}^{\overline{e}^{-6}} \frac{dx}{\log x} = 0,000360082_{s_{1}}.$$

Afin de juger de la valeur pratique de la série (2ª), p. 208 de ma note sur le logarithme-intégral, on calculera encore une fois cette même intégrale à l'aide de la série en question. La comparaison des deux valeurs obtenues permettra de déterminer les premières décimales de la constante d'Euler.

Si dans la formule sus-mentionnée (2ⁿ), à savoir

(9)
$$\int_{0}^{t^{a}} \frac{t^{a(1+\lambda)-1}}{\log t} dt = \int_{0}^{\infty} \frac{t^{a-1}}{\log t} dt + x^{a} S(x, \alpha, \lambda),$$

où

$$S(x, \alpha, \lambda) = \log(1 + \lambda) - \frac{(\alpha \log x)}{1!} [\log(1 + \lambda) - \lambda] +$$

$$\frac{(\alpha \log x)^{2}}{2!} \left[\log (1+\lambda) - \lambda + \frac{1}{2} \lambda^{2}\right] - \frac{(\alpha \log x)^{3}}{3!} \left[\log (1+\lambda) - \lambda + \frac{1}{2} \lambda^{2} - \frac{1}{3} \lambda^{3}\right] + \frac{(\alpha \log x)^{4}}{4!} \left[\log (1+\lambda) - \lambda + \frac{1}{2} \lambda^{2} - \frac{1}{3} \lambda^{3} + \frac{1}{4} \lambda^{4}\right] - + \dots,$$

on pose

$$t = x^{\frac{1}{\alpha + \beta}}$$
, $dt = \frac{1}{\alpha + \beta} x^{\frac{1}{\alpha + \beta} - 1} dx$, $\log t = \frac{1}{\alpha + \beta} \log x$,

où

 $\alpha > 0$, $\alpha + \beta > 0$, il vient d'abord

$$\int_{0}^{x} \frac{t^{\alpha+\beta-1}}{\log t} dt = \int_{0}^{x^{\alpha+\beta}} \frac{dx}{\log x},$$

$$\int_{0}^{x} \frac{t^{a-1}}{\log t} dt = \int_{0}^{x^{a}} \frac{dx}{\log x},$$

puis l'équation (9) prend la forme

(9a)
$$\int_{0}^{x^{a+\beta}} \frac{dx}{\log x} = \int_{0}^{x^{a}} \frac{dx}{\log x} + x^{a} S(x, \alpha, \lambda).$$

Maintenant pour calculer $\int_{0}^{\frac{-6}{r}} \frac{dx}{\log x}$ on peut procéder de la

manière suivante : D'abord on calcule $\int_0^{\frac{\pi}{c}} \frac{dx}{\log x}$ à l'aide de la série fondamentale

(10)
$$\int_{0}^{x} \frac{dx}{\log x} = C + \log \left(-\log x \right) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log^{n} x}{n \cdot n!} ;$$

ensuite l'application répétée de la formule (9ⁿ) fournit successivement les intégrales suivantes :

$$\int_{0}^{\frac{-1}{e} - \frac{1}{2}} \frac{dx}{\log x} = \int_{0}^{\frac{-3}{e} - \frac{3}{2}} \frac{dx}{\log x} = \int_{0}^{\frac{-1}{e} - \frac{1}{e}} \frac{dx}{\log x} + \frac{1}{e} S\left(\frac{1}{e}, 1, \frac{1}{2}\right),$$

$$\int_{0}^{\frac{-3}{e} - \frac{1}{2}} \frac{dx}{\log x} = \int_{0}^{\frac{-2}{e} - \frac{1}{2}} \frac{dx}{\log x} = \int_{0}^{\frac{-3}{e} - \frac{3}{2}} \frac{dx}{\log x} + \frac{1}{e^{\frac{3}{e}}} S\left(\frac{1}{e}, \frac{3}{2}, \frac{1}{3}\right),$$

$$\int_{0}^{\frac{-2}{e} - 1} \frac{dx}{\log x} = \int_{0}^{\frac{-3}{e} - \frac{1}{e}} \frac{dx}{\log x} = \int_{0}^{\frac{-3}{e} - \frac{3}{e}} \frac{dx}{\log x} + \frac{1}{e^{\frac{3}{e}}} S\left(\frac{1}{e}, 2, \frac{1}{2}\right),$$

$$\int_{0}^{\frac{-3}{e} - 1} \frac{dx}{\log x} = \int_{0}^{\frac{-3}{e} - \frac{3}{e}} \frac{dx}{\log x} = \int_{0}^{\frac{-3}{e} - \frac{3}{e}} \frac{dx}{\log x} + \frac{1}{e^{\frac{3}{e}}} S\left(\frac{1}{e}, 3, \frac{1}{3}\right),$$

$$\int_{0}^{\frac{-3}{e} - \frac{3}{e}} \frac{dx}{\log x} = \int_{0}^{\frac{-3}{e} - \frac{3}{e}} \frac{dx}{\log x} + \frac{1}{e^{\frac{3}{e}}} S\left(\frac{1}{e}, 3, \frac{1}{3}\right),$$

En éliminant les intégrales intermédiaires, on obtient

(11)
$$J = \int_{0}^{\frac{1}{e}} \frac{dx}{\log x} = C + \int_{0}^{\frac{1}{e}} \frac{1}{e} S\left(\frac{1}{e}, 1, \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{\frac{3}{e^{\frac{3}{2}}}} S\left(\frac{1}{e}, \frac{3}{2}, \frac{1}{3}\right) + \frac{1}{e^{2}} S\left(\frac{1}{e}, 2, \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{e^{3}} S\left(\frac{1}{e}, 3, \frac{1}{3}\right) + \frac{1}{e^{4}} S\left(\frac{1}{e}, 4, \frac{1}{2}\right),$$

Cette disposition du calcul ne fait intervenir que trois séries, à savoir la série fondamentale (10) et les séries

$$S\left(x, \alpha, \frac{1}{2}\right)$$
 et $S\left(x, \alpha, \frac{1}{3}\right)$.

Tous calculs effectués, l'égalité (11) donne

$$J = C - 0.577575747353_4 = -0.000360082_{81}$$

d'où l'on tire

$$C = 0.577215664...$$

valeur exacte jusqu'au 9e ordre décimal.

En se servant d'une valeur plus exacte de C (Dans le mémoire de Gauss, *Disquisitiones generales circa Seriem infinitam*, etc. on en trouvera les 40 premières figures.) on obtient les valeurs suivantes des intégrales intermédiaires:

$$\int_{0}^{\frac{-1}{e}} \frac{dx}{\log x} = -0.21938393439552_{2}$$

$$\int_{0}^{\frac{-3}{e}} \frac{dx}{\log x} = -0.100019582406_{7}$$

$$\int_{0}^{\frac{-2}{e}} \frac{dx}{\log x} = -0.048900510707_{7}$$

$$\int_{0}^{\frac{-3}{e}} \frac{dx}{\log x} = -0.013048381094_{0}$$

$$\int_{0}^{\frac{-4}{e}} \frac{dx}{\log x} = -0.003779352409_{3}$$

$$\int_{0}^{\frac{-6}{e}} \frac{dx}{\log x} = -0.000360082451_{8}$$