Zeitschrift: Bulletin de la Société Vaudoise des Sciences Naturelles
Herausgeber: Société Vaudoise des Sciences Naturelles
Band: 34 (1898)
Heft: 127

Artikel: Sur quelques propriétés du trapèze
Autor: Benoit, L.
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-265367

SUR QUELQUES PROPRIÉTÉS DU TRAPÈZE

par **L. BENOIT**

En cherchant la solution d'un problème de géométrie, j'ai trouvé au point d'intersection des diagonales du trapèze quelques propriétés que je me permets de vous signaler; jusqu'à quel point sont-elles inédites? c'est ce que je ne puis pas préciser; dans tous les cas, deux professeurs de géométrie, consultés à ce sujet, m'ont répondu qu'ils ne les avaient rencontrées dans aucun ouvrage à eux connu. Voici la chose :

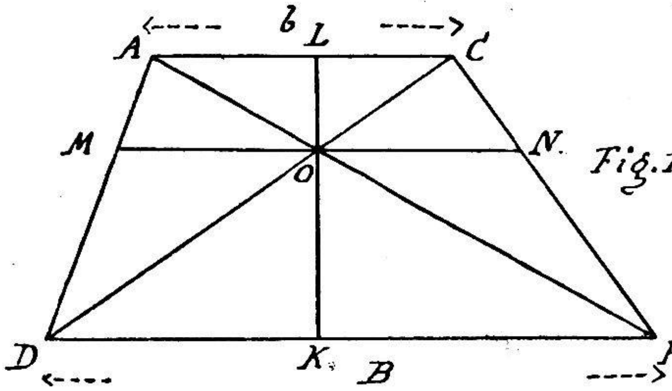


Fig. 1.

Soit le trapèze quelconque A C P D; menons les diagonales A P et C D; par leur point d'intersection O, menons M N parallèle aux bases A C et D P, et L K perpendiculaire à M N; appelons b et B les deux bases parallèles.

Les triangles A O C et D O P étant semblables, nous en tirons la propriété connue de chacun :

$$[1] \qquad \frac{AO}{OP} = \frac{CO}{OD} = \frac{b}{B},$$

donc : *Les diagonales du trapèze se coupent en segments proportionnels aux bases.*

Voilà notre point de départ. Etudions les propriétés de la droite M N.

Les triangles A M O et A D P sont semblables; donc:

$$[2] \qquad \frac{MO}{DP} = \frac{AO}{AP} = \frac{AO}{AO+OP};$$

mais l'égalité [1] nous donne (dans toute proportion, le premier terme est à la somme des deux premiers comme le troisième est à la somme des deux derniers) :

$$\frac{AO}{OP} = \frac{b}{B} \text{ d'où } \frac{AO}{AO + OP} = \frac{b}{B+b}$$

et en substituant dans l'égalité [2]

[3] $$\frac{MO}{DP} = \frac{b}{B+b}.$$

D'autre part, les triangles semblables CNO et CPD nous donnent :

[4] $$\frac{ON}{DP} = \frac{CO}{CD} = \frac{CO}{CO+OD};$$

tirons de l'égalité [1] la valeur du dernier rapport :

$$\frac{CO}{OD} = \frac{b}{B} \text{ d'où } \frac{CO}{CO+OD} = \frac{b}{B+b}$$

et substituons dans l'égalité [4]

[5] $$\frac{ON}{DP} = \frac{b}{B+b}.$$

Les égalités [3] et [5] donnent immédiatement le résultat cherché :

[6] $$MO = ON.$$

Donc : *Le point d'intersection des diagonales du trapèze divise en deux parties égales la parallèle aux bases menée par ce point.*

Evaluons la longueur MN en fonction des éléments du trapèze (base et hauteur). L'égalité [3] donne

$$MO = \frac{DP \,.\, b}{B+b} = \frac{Bb}{B+b}.$$

[7] $$MN = 2\,MO = \frac{2\,Bb}{B+b}$$

Cette valeur est intéressante en ce qu'elle nous montre que la longueur M N est une fonction des seules bases du trapèze et qu'elle est indépendante de la hauteur. Nous dirons donc :

Dans un trapèze, la parallèle aux bases, menée par le point d'intersection des diagonales, est égale au double produit des deux bases divisé par leur somme.

Elle est indépendante de la hauteur ; tous les trapèzes ayant mêmes bases ont donc la même valeur pour la parallèle en question, quelles que soient la hauteur et la forme du trapèze.

Voici d'autres propriétés moins importantes.

Les triangles semblables A O L et O K P donnent :

[8] $$\frac{\mathrm{L\,O}}{\mathrm{O\,K}} = \frac{\mathrm{A\,O}}{\mathrm{O\,P}} = \frac{b}{\mathrm{B}} \text{ (d'après [1])}.$$

Donc : *Le point d'intersection des diagonales du trapèze divise la hauteur du trapèze en segments proportionnels aux bases.*

Les triangles A D P et C D P donnent :

[9] $$\frac{\mathrm{A\,M}}{\mathrm{M\,D}} = \frac{\mathrm{A\,O}}{\mathrm{O\,P}} = \frac{b}{\mathrm{B}} \text{ et}$$

[10] $$\frac{\mathrm{C\,N}}{\mathrm{N\,P}} = \frac{\mathrm{C\,O}}{\mathrm{O\,D}} = \frac{b}{\mathrm{B}},$$

d'où : *Dans le trapèze, la parallèle aux bases, menée par le point d'intersection des diagonales, divise les côtés non parallèles en segments proportionnels aux bases.*

Les triangles semblables L O C et D O K donnent :

$$\frac{\mathrm{L\,C}}{\mathrm{D\,K}} = \frac{\mathrm{C\,O}}{\mathrm{O\,D}} = \frac{b}{\mathrm{B}},$$

de même pour les triangles A O L et K O P :

$$\frac{\mathrm{A\,L}}{\mathrm{K\,P}} = \frac{\mathrm{A\,O}}{\mathrm{O\,P}} = \frac{b}{\mathrm{B}}.$$

Ces deux dernières égalités donnent :

$$\frac{LC}{DK} = \frac{AL}{KP} \quad \text{ou [11]} \quad \frac{LC}{AL} = \frac{DK}{KP}$$

ou encore $LC \times KP = AL \times DK$.

Nous dirons donc : *Dans le trapèze, la hauteur menée par le point d'intersection des diagonales divise les bases en segments inversément proportionnels ;* c'est-à-dire que les segments de l'une des bases sont inversément proportionnels aux segments correspondants de l'autre.

En d'autres termes : *Le produit des segments correspondants* (situés du même côté de la hauteur) *est constant.*

Les triangles A D P et C D P ayant même base et même hauteur, sont équivalents ; il en est de même des triangles D A C et P A C ; donc :

Les deux diagonales d'un trapèze divisent celui-ci dans le même rapport, c'est-à-dire que les deux triangles formés par l'une des diagonales sont équivalents aux deux triangles formés par l'autre diagonale.

Cas particuliers. Voyons entre quelles limites peut varier la valeur de la parallèle M N :

$$MN = \frac{2Bb}{B+b}.$$

1° B peut varier entre b et ∞ ; si $B = b$, nous avons :

$$\frac{2Bb}{B+b} = b \text{ (pour } B = b)$$

et la figure est un parallélogramme (fig. 2)

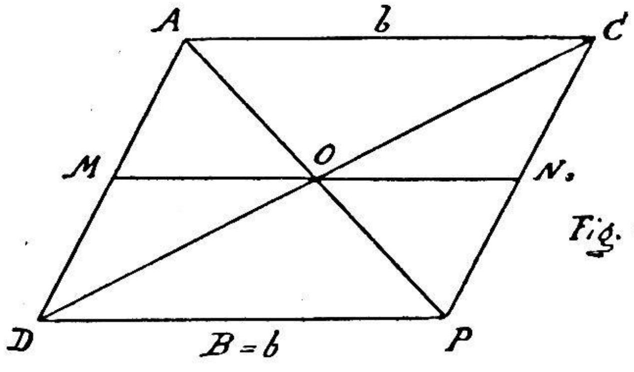
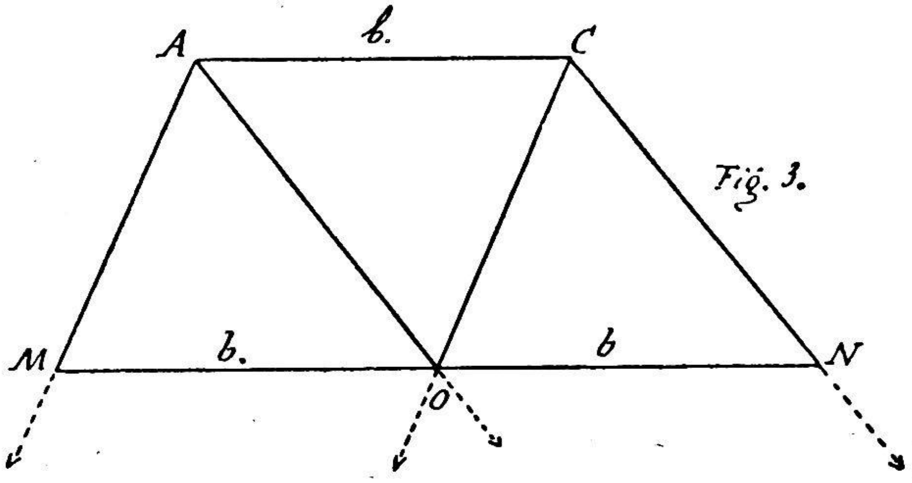


Fig. 2.

Si B croît de b à ∞, l'expression de la valeur de M N croît et tend vers un maximum qui est

$$\frac{2Bb}{B+b} = 2b \text{ (pour } B = \infty)$$

Dans ce cas, les points D et P étant situés à l'infini, les droites A D et C D sont parallèles, de même que A P et C P, et nous avons O M $= b$ et O N $= b$ (fig. 3).

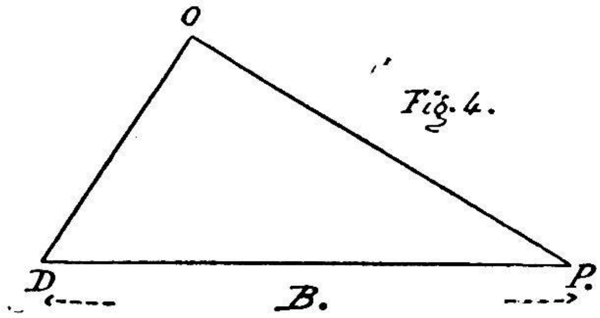


2° b peut varier entre B et zéro. Pour $b = $ B, nous tombons dans le 1er cas et la figure est un parallélogramme.

Si b diminue de B à zéro, l'expression de la valeur de M N diminue aussi et tend vers zéro

$$\frac{2\,Bb}{B+b} = 0 \text{ (pour } b = 0).$$

Dans ce cas, la petite base ainsi que la parallèle M N se confondent en un point, O, et la figure est un triangle (fig. 4).



En résumé, la longueur M N peut prendre toutes les valeurs comprises entre zéro et 2 b.

Toutes ces propriétés peuvent être proposées comme exercices aux élèves des établissements d'instruction secondaire; c'est à ce titre que je les communique aux membres de la Société, dont plusieurs font partie du corps enseignant secondaire.