Zeitschrift: Bulletin de la Société Vaudoise des Sciences Naturelles

Herausgeber: Société Vaudoise des Sciences Naturelles

Band: 24 (1888)

Heft: 98

Artikel: Essai d'une application des principes de la mécanique à l'écoulement des glaciers

Autor: Odin, A.-A.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-261779

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 10.01.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

ESSAI D'UNE APPLICATION DES PRINCIPES DE LA MÉCANIQUE

A

L'ÉCOULEMENT DES GLACIERS

PAR LE

Dr A.-A. ODIN,

Professeur agrégé à l'Académie de Lausanne.

Pl. II et III.

En août dernier, nous eûmes, M. le prof. Dr Forel et moi, un entretien sur la question si controversée de l'écoulement des glaciers; M. Forel ayant soulevé la difficulté de trouver les causes de la périodicité des phases de crue et de décrue, me demanda si je croyais qu'il fût possible d'y arriver par voie mathématique. Au premier abord, la chose me parut trop hasardée pour l'entreprendre, mais en y réfléchissant mûrement, je me persuadai qu'il serait utile d'examiner de près une question aussi intéressante. Je l'ai fait, et, après de nombreuses tentatives, je suis arrivé, non à résoudre la difficulté elle-même, mais à en dégager la question primordiale des lois qui président à l'écoulement d'un glacier. Quant au problème lui-même posé par M. le prof. Forel, je crois nécessaire, pour chercher à le résoudre, d'attendre que les résultats des observations du C. A. S. sur le glacier du Rhône aient été publiés et qu'on ait pu juger du degré d'exactitude des formules que j'ai établies.

Avant d'entrer dans le sujet, j'ai cru devoir développer les hypothèses sur lesquelles je me base pour mettre en équations le problème si complexe de l'écoulement d'un glacier.

J'exprime ici à MM. les professeurs F.-A. Forel, à Morges, et Hagenbach, à Bâle, toute ma reconnaissance pour les bienveillantes indications qu'ils m'ont données, ainsi que pour le grand intérêt qu'ils ont apporté à cet « Essai ».

HYPOTHÈSES

L'écoulement d'un glacier étant un phénomène excessivement complexe, il ne peut être étudié mathématiquement qu'en négligeant plusieurs phénomènes accessoires et en faisant certaines hypothèses sur la forme et la constitution du névé et du glacier.

Les glaciers ont toujours une forme très irrégulière qui ne se prête pas à un calcul exact; par contre, si l'on se contente d'un résultat approximatif, on peut supposer que tout glacier, sauf quelques exceptions, se compose de deux ou de plusieurs canaux prismatiques à profils rectangulaires; l'un de ces canaux, large et rapide, représentera le névé; sa profondeur ira en croissant de la partie supérieure à la partie inférieure; un autre canal, en général plus long, moins large et moins rapide, représentera le glacier; la profondeur de la glace dans ce canal ira en décroissant de la partie supérieure à la partie inférieure. Si le glacier fait un coude, ce qui est fort souvent le cas, on le supposera formé de deux canaux droits.

L'étude de l'écoulement d'un glacier est donc ramenée à celle de l'écoulement d'une masse de neige ou de glace renfermée dans un canal prismatique rectangulaire; l'épaisseur de cette glace est variable, mais comme elle est très petite comparativement à la longueur du canal, nous pouvons considérer la surface supérieure et la surface inférieure de la glace comme étant sensiblement parallèles entre elles; ceci nous permettra de considérer la surface supérieure comme plane et de la prendre comme l'un des plans d'un système de coordonnées.

En remplaçant le glacier par un simple canal rectangulaire, nous faisons tacitement abstraction des crevasses; bien qu'il y en ait de très grandes, elles n'atteignent guère la moraine profonde et ne peuvent ainsi modifier d'une manière appréciable la marche du glacier.

On sait que la vitesse de la glace est plus forte au milieu qu'au bord; les mesures prises sur le glacier du Rhône ont montré que la relation des vitesses à différentes distances des bords se conserve très exactement sur toute la longueur du glacier, et que les trajectoires des particules de glace sont sensiblement parallèles à son axe. Ceci étant admis comme parfaitement exact et la glace étant regardée comme incompressible, la vitesse devrait être constante pour tous les points d'un même filet parallèle à l'axe; mais, comme il y a un enlèvement de matière causé par l'ablation, la vitesse des différents points d'un même filet va en décroissant de la partie supérieure à la partie inférieure[1]. Toutefois, il n'y a dans le sens de la longueur de grandes variations de vitesse que près du front du glacier, c'est-

[1] F.-A. Forel, *Archives de Genève,* tome VI, juillet 1881.

à-dire dans la partie qui a le moins d'influence sur le mouvement général. Nous ne commettrons donc pas une grande erreur en supposant que la vitesse est constante pour tous les points d'un même filet.

Ce que nous venons de dire de la vitesse du glacier, nous pouvons aussi le dire de celle du névé, quoique à la vérité avec moins de raison et moins de certitude; en effet, nous avons ici à compter avec le tassement des neiges, mais comme ce phénomène n'a pas encore été étudié jusqu'à présent d'une manière suffisante, il nous est impossible d'en tenir compte; s'il le fallait absolument, nous regarderions le névé comme formé non pas d'un seul canal, mais de deux canaux ou d'un nombre plus grand encore et il n'y aurait de cette manière rien de changé dans nos formules.

Les deux grands facteurs qui président aux mouvements des glaciers sont la pesanteur et les frottements. Nous n'avons rien à dire sur la pesanteur; par contre, il est nécessaire que nous soyons fixés au sujet des frottements.

Lorsqu'une masse visqueuse coule, elle est soumise à deux espèces de frottements: le frottement externe, soit contre les parois du canal dans lequel la masse se meut et le frottement interne.

Dans le glacier, le frottement externe est celui de la glace contre les moraines, c'est le frottement d'un corps solide contre un autre corps solide. Comme on le fait en général, nous admettrons que pour des variations minimes de la vitesse relative des deux corps, le frottement est proportionnel à la vitesse et en même temps à la pression totale que les deux corps exercent l'un sur l'autre. Nous ne nous éloignerons guère de la vérité en admettant que cette pression est semblable à une pression hydrostatique, c'est-à-dire qu'elle est proportionnelle à l'épaisseur du glacier au point donné. Nous considérerons le coefficient de frottement externe comme variant avec la vitesse et avec la distance du point considéré au front du glacier, mais comme étant le même pour tous les points d'une même section transversale du glacier ou du névé.

L'écoulement des glaciers n'étant pas autre chose qu'une déformation très lente produite sous l'influence de forces considérables, le frottement interne est toujours immense, surtout si on le compare à celui des liquides. Pour nous rendre un compte exact de sa valeur, considérons (fig. 1) une tranche de glace

AB A'B' prise dans l'intérieur du glacier et supposons qu'elle soit soumise à deux forces tangentielles égales et de sens contraires; soient P la valeur de chacune de ces forces par unité de surface; sous leur influence, la glace se déforme et le déplacement de AB par rapport à A'B' pendant le temps dt sera vdt, v étant la vitesse relative de AB par rapport à A'B'; tant que la force P restera la même, la vitesse v pourra être regardée comme indépendante du temps et comme proportionnelle à la force P; c'est au moins ce qu'il est le plus vraisemblable d'admettre et que les expériences faites jusqu'à présent confirment. Il est de plus facile de démontrer que la vitesse relative v est proportionnelle à l'épaisseur h de la tranche de glace.

En effet, supposons que nous ayons n plaques semblables (fig. 2) superposées les unes aux autres de manière à fo mer une plaque unique de même surface que la précédente, mais d'une épaisseur totale nh, soient A_1B_1 A_2B_2 ... $A_{n-1}B_{n-1}$ les séparations fictives de ces plaques, et A_0B_0 A_nB_n les forces extrêmes; nous supposons ces dernières soumises à deux forces tangentielles égales et de sens contraires; soient $-P_0$ et $+P_n$ ces forces et soit P leur intensité par unité de surface. Si nous faisons abstraction des allongements que peut subir la glace dans les sens A_kB_k, nous pourrons regarder les surfaces A_kB_k comme des surfaces matérielles solides et nous pourrons leur appliquer les deux forces $-P_k$ et $+P_k$ respectivement égales et parallèles à $-P_0$ et $+P_n$; chacune des n tranches de glace étant en équilibre (nous faisons abstraction du mouvement de rotation), les forces qui agissent sur elles doivent donner une résultante nulle; par conséquent, les forces qui agissent sur les différentes tranches doivent être accouplées de telle façon que l'élément $A_{k-1}B_{k-1}A_kB_k$ sera regardé comme soumis aux forces $-P_{k-1}$, P_k; il se déformera et la vitesse relative de ses deux faces aura une certaine valeur v'; mais cette valeur doit être la même pour chacune des n tranches, car elles sont toutes soumises à des forces identiques et la vitesse relative des deux faces A_0B_0 et A_nB_n sera donc nv', ce qui signifie qu'elle est proportionnelle au nombre n ou, ce qui revient au même, proportionnelle à l'épaisseur A_0A_n.

En résumé, une tranche de glace soumise à deux forces tangentielles égales et de sens contraire agissant sur ses faces, se déforme de telle manière que ces dernières acquièrent une vitesse relative qui est proportionnelle à l'intensité P par unité de

surface de chacune des deux forces et proportionnelle à l'épaisseur h de la tranche; elle est donc donnée par la formule

$$v = \frac{1}{F} Ph.$$

F est une constante dépendant uniquement de la nature de la glace; nous l'appellerons *coefficient de frottement interne.*

Nous avons supposé jusqu'à présent que la plaque de glace n'était soumise en chacune de ses faces qu'à une seule force. En général, s'il y a différentes forces appliquées aux différents points ou si P est une fonction continue de l'épaisseur, nous devrons restreindre notre formule à une partie assez minime de la plaque pour qu'il n'y ait à considérer que deux forces sensiblement égales et de sens contraire agissant sur les deux faces; soient dh l'épaisseur de la partie ainsi considérée et dv la différence de vitesse de ses deux faces; nous avons alors :

$$dv = \frac{1}{F} Pdh.$$

Cette différence de vitesse produite dans la direction de la force P ne sera pas changée, si, conjointement à cette force, il y a d'autres forces Q, R, etc., qui agissent dans des plans obliques par rapport à celui dans lequel agit P, pourvu que ces forces soient comme P proportionnelles aux surfaces des sections dans lesquelles elles agissent; ceci est évident, car nous pouvons choisir l'épaisseur dh assez petite pour que l'action de ces forces soit négligeable en présence de l'effet que produit P.

En tirant la valeur de P de l'équation ci-dessus, nous obtenons la formule suivante :

$$(1) \qquad P = F \frac{dv}{dh},$$

qui est applicable à la partie d'une tranche de glace voisine de sa surface et donne la force qui doit agir le long de cette surface pour déformer la glace.

Le coefficient de frottement interne F varie probablement peu avec la vitesse et ne dépend guère que de la nature de la glace, mais de quelle manière en dépend-il, c'est ce que nous ne savons

pas; dans tous les cas, il doit être en relation avec les différentes pressions qui agissent sur la glace et qui par leurs variations en modifient assez rapidement la consistance, vu que dans un glacier, la glace est le plus souvent très près de son point de fusion. Malgré cela, nous admettrons, comme pour le frottement externe, qu'à un moment donné et pour une même section transversale du glacier ou du névé, F est constant. Cette hypothèse nous est indispensable pour arriver à un résultat final et les erreurs qu'elle peut entraîner nous paraissent devoir être de beaucoup inférieures à celles qui résultent des irrégularités de la forme de tout glacier.

Il est bon de remarquer que F aura toujours pour la partie supérieure du névé une valeur considérablement plus petite que pour la glace dure du glacier proprement dit.

Ce sont là les hypothèses principales sur lesquelles nous nous baserons pour les calculs généraux qui suivent; nous serons toutefois obligé, lorsqu'il s'agira de calculer le débit du glacier, de faire encore quelques restrictions de moindre importance; nous les indiquerons et les motiverons plus loin.

ÉQUATIONS DU MOUVEMENT DE LA GLACE DANS UN CANAL RECTANGULAIRE

D'après ce qui précède, l'étude de l'écoulement de la glace d'un glacier se ramène à celle de l'écoulement d'une masse de glace renfermée dans un canal prismatique rectangulaire. Rapportons ce canal à un système de coordonnées cartésiennes rectangulaires $Oxyz$ (fig. 3), choisi de telle façon que l'axe Ox partage la surface supérieure — de laquelle nous avons vu qu'elle peut être considérée comme plane — en deux parties, dans le sens de la longueur, et que l'axe Oy se trouve dans la section supérieure du canal. Soit α l'angle que forme l'axe Ox avec l'horizontale, autrement dit, l'angle de pente de l'axe du canal.

Considérons maintenant (fig. 4) un élément de glace ayant la forme du parallélipipède rectangle ABCDEFGH, dont le centre O a pour coordonnées (xyz) et dont les arêtes parallèles aux axes ont pour longueurs $dx\ dy\ dz$. Ce parallélipipède qui se meut, comme nous le savons, parallèlement à Ox, c'est-à-dire, parallèlement à quatre de ses arêtes, est actionné par diverses forces donnant des composantes parallèles à l'axe des x; ce sont:

1° Son poids; en appelant g la gravité et Δ la densité de la glace, ce poids est :

$$g \Delta \, dx \, dy \, dz$$

et sa composante dans la direction des x positifs est :

$$g \Delta \sin \alpha \, dx \, dy \, dz.$$

2° La pression de la glace contre les faces du parallélipipède. Soit p la pression en O (pression par unité de surface contre un plan parallèle à yOz est dans le sens de Ox); p est fonction de x, y et z, en sorte que la pression par unité de surface est au centre de la face ABFE

$$p - \frac{\partial p}{\partial x} \frac{dx}{2}.$$

La pression totale contre ABFE est donc :

$$\left(p - \frac{\partial p}{\partial x} \frac{dx}{2}\right) dy \, dz,$$

valeur exacte jusqu'aux infiniment petits du 4e ordre. On verrait de même que la pression contre la face DCGH est égale à

$$-\left(p + \frac{\partial p}{\partial x} \frac{dx}{2}\right) dy \, dz.$$

La résultante de ces deux pressions est donc :

$$-\frac{\partial p}{\partial x} dx \, dy \, dz.$$

Nous n'avons pas à considérer les pressions contre les autres faces du parallélipipède, car elles ne donnent point de composantes dans la direction Ox du mouvement.

3° Les forces agissant tangentiellement sur les faces du parallélipipède et qui occasionnent les différences de vitesses. Remarquons d'abord que les faces ABFE et DCGH ne sont soumises à aucune force de ce genre et prenons les deux autres faces deux à deux.

Soit v la vitesse de la glace en O; au centre de la face BCGF, cette vitesse sera

$$v + \frac{\partial v}{\partial y} \frac{dy}{2}$$

sa dérivée par rapport à l'épaisseur du parallélipipède et dirigée contre l'extérieur de celui-ci sera :

$$\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\frac{dy}{2}.$$

La force par unité de surface qui agit au centre de gravité de BCGF et dans la direction des x est donc, d'après la formule (1)

$$\mathrm{F}\left(\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\frac{dy}{2}\right),$$

par conséquent, la force tangentielle totale agissant sur BCGF a la valeur suivante qui est exacte jusqu'aux infiniment petits du 4e ordre.

$$\mathrm{F}\left(\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\frac{dy}{2}\right) dx\, dz.$$

La force agissant sur la face opposée du parallélipipède sera par analogie égale à

$$\mathrm{F}\left(-\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\frac{dy}{2}\right) dx\, dz$$

et leur résultante est :

$$\mathrm{F}\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} dx\, dy\, dz.$$

Les déformations de la glace résultent aussi de forces agissant sur les faces ABCD et EFGH, forces qui ont pour résultante :

$$\mathrm{F}\frac{\partial^2 v}{\partial z^2} dx\, dy\, dz.$$

La résultante de toutes les forces qui occasionnent une variation de vitesse de la glace d'un point à un autre est donc :

$$\mathrm{F}\left(\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2}\right) dx\, dy\, dz.$$

La résultante définitive de toutes les forces qui agissent sur l'élément de glace que nous avons choisi, est par conséquent :

$$g\,\Delta \sin\alpha\, dx\, dy\, dz - \frac{\partial p}{\partial x} dx\, dy\, dz + \mathrm{F}\left(\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2}\right) dx\, dy\, dz.$$

Cette résultante est, d'autre part, égale à la masse $\Delta\, dx\, dy\, dz$ du parallélipipède multipliée par l'accélération $\frac{\partial v}{\partial t}$ de son centre de gravité; si nous égalons ces deux valeurs en les divisant par $dx\, dy\, dz$, nous avons:

$$g\Delta \sin\alpha - \frac{\partial p}{\partial x} + \mathrm{F}\left(\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2}\right) = \Delta \frac{\partial v}{\partial t}.$$

Divisons les deux membres de cette équation par $g\Delta$ et posons:

$$\frac{\mathrm{F}}{g\Delta} = \mathrm{K} \tag{2}$$

elle devient:

$$\sin\alpha - \frac{1}{g\Delta}\frac{\partial p}{\partial x} + \mathrm{K}\left(\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2}\right) = \frac{1}{g}\frac{\partial v}{\partial t}.$$

Le second membre

$$\frac{1}{g}\frac{\partial v}{\partial t}$$

peut être négligé. En effet, chez les glaciers qui se meuvent le plus rapidement, on doit regarder comme impossible un changement de vitesse de 10 mètres en 1 minute (la vitesse étant donnée par heure). Ce changement correspond à

$$\frac{1}{g}\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{1}{211680},$$

valeur toujours négligeable en présence de $\sin\alpha$ qui représente la pente du glacier.

L'équation générale du mouvement de la glace est donc

$$\sin\alpha - \frac{1}{g\Delta}\frac{\partial p}{\partial x} + \mathrm{K}\left(\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2}\right) = 0. \tag{3}$$

Elle est vraie pour tous les points du glacier, mais ne pourra être intégrée que lorsque nous aurons fixé les conditions aux limites; occupons-nous donc de trouver celles-ci d'après les données du problème.

La limite supérieure comprend les points pour lesquels $z = 0$; en tous ces points, la glace est en contact uniquement avec de

l'air et n'est soumise dans le plan $z = 0$ à aucune force capable de la déformer, ce qui veut dire, à cause de la formule (1), que pour tous ces points, l'on doit avoir

$$\text{(4)} \qquad \text{pour } z = 0 \quad \frac{\partial v}{\partial z} = 0.$$

Si nous appelons h la hauteur de la glace dans le canal, sa surface inférieure sera caractérisée par l'équation $z = h$, h variant du reste avec x. Considérons un élément quelconque de cette surface : il frotte contre le fond du canal (moraine profonde) qui exerce sur lui une force de frottement qui, par unité de surface, est égale au produit du coefficient de frottement f multiplié par la vitesse v et par la pression par unité de surface de la glace sur le fond du canal ; nous avons déjà dit que nous regarderions cette pression comme analogue à une pression hydrostatique, ce qui fait que dans le cas particulier, elle est égale à $g\Delta h \cos\alpha$; la force de frottement est donc

$$-fg\Delta h \cos\alpha \,.\, v$$

elle est la seule qui agisse dans le plan $z = h$ et c'est donc elle seule qui déforme la couche la plus inférieure de la glace ; nous avons donc, en appliquant la formule (1)

$$-fg\Delta h \cos\alpha v = \mathrm{F}\frac{\partial v}{\partial z}$$

ou

$$\text{(5)} \qquad \text{pour } z = h \quad \mathrm{K}\frac{\partial v}{\partial z} + fh\cos\alpha v = 0.$$

Il nous reste à nous occuper des faces latérales du canal. Considérons d'abord celle pour laquelle $y = +y_0$, $2y_0$ étant la largeur du canal, et considérons un élément de cette surface ayant pour coordonnées $(x\, y_0\, z)$. Nous pouvons dire sur cet élément tout ce que nous venons de dire pour un élément choisi dans la surface inférieure, seulement ici nous manquons de données sur la pression. Comme le frottement contre les surfaces latérales du canal n'a pour la solution pratique de notre problème qu'une importance tout à fait secondaire et comme la pression de la glace contre les parois latérales du canal ne varie pas énormément d'un point à un autre, nous supposerons cette

pression, par unité de surface, constante et égale à $g\Delta q \cos\alpha$; remarquons que q sera toujours de beaucoup inférieur à h. D'après cette hypothèse, la force de frottement doit être égale à

$$-fg\Delta q \cos\alpha v$$

ce qui donne l'équation

$$\text{(6)} \qquad \text{pour } y = y_0 \quad K\frac{\partial v}{\partial y} + fq\cos\alpha v = 0.$$

Pour passer de cette équation à l'équation limite se rapportant à l'autre surface latérale, nous n'avons qu'à remplacer y par $-y$, ce qui donne :

$$\text{(7)} \qquad \text{pour } y = -y_0 \quad K\frac{\partial v}{\partial y} - fq\cos\alpha v = 0.$$

Les équations 2, 3, 4, 5, 6 suffisent pour déterminer complètement v lorsque l'on connaît p. Or, en réalité, p est une fonction inconnue, mais qui peut être éliminée dans l'application pratique, si l'on se contente de la vitesse moyenne du glacier. Nous allons donc nous occuper de l'intégration de l'équation (3) accompagnée des équations 4, 5, 6 et 7 en supposant que p est une fonction connue quelconque de x y et z.

VITESSE EN UN POINT QUELCONQUE

La vitesse en un point quelconque du canal est donnée par l'intégration de l'équation aux dérivées partielles :

$$\text{(3)} \qquad \sin\alpha - \frac{1}{g\Delta}\frac{\partial p}{\partial x} + K\left(\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2}\right) = 0,$$

accompagnée des équations aux limites :

$$\text{(4)} \qquad \text{pour } z = 0 \qquad \frac{\partial v}{\partial z} = 0$$

$$\text{(5)} \qquad \text{pour } z = h \qquad K\frac{\partial v}{\partial z} + fh\cos\alpha v = 0$$

$$\text{(6)} \qquad \text{pour } y = y_0 \qquad K\frac{\partial v}{\partial y} + fq\cos\alpha v = 0$$

$$\text{(7)} \qquad \text{pour } y = -y_0 \qquad K\frac{\partial v}{\partial y} - fq\cos\alpha v = 0.$$

Dans toutes ces équations, nous supposons p connu et v inconnu.

Remarquons d'abord qu'aucune dérivée de v par rapport à x ne se trouvant dans les équations ci-dessus, nous les intégrerons en regardant x comme constant. En conséquence, si nous posons

$$\sin\alpha - \frac{1}{g\Delta}\frac{dp}{dx} = \mathrm{KP}, \tag{8}$$

l'équation (3) deviendra :

$$\mathrm{P} + \frac{d^2v}{dy^2} + \frac{d^2v}{dz^2} = 0 \tag{9}$$

et P devra être regardé comme une fonction connue de y et de z. Si nous supposons que cette fonction est continue dans les limites du canal, nous pouvons la mettre sous la forme suivante :

$$\mathrm{P} = \sum_{\mu}\left[\mathrm{Z}_{\mu}\cos\left(r_{\mu}\frac{y}{h}\right) + \mathrm{Z}'_{\mu}\sin\left(r'_{\mu}\frac{y}{h}\right)\right] \tag{10}$$

Z_{μ} et Z'_{μ} étant des fonctions de z seulement et r_{μ} et r'_{μ} des paramètres quelconques; cette somme peut se composer d'un nombre fini ou infini de termes.

Si nous substituons cette valeur de P dans l'équation (9), elle devient :

$$\frac{d^2v}{dy^2} + \frac{d^2v}{dz^2} + \sum_{\mu}\left[\mathrm{Z}_{\mu}\cos\left(r_{\mu}\frac{y}{h}\right) + \mathrm{Z}'_{\mu}\cos\left(r'_{\mu}\frac{y}{h}\right)\right] = 0 \tag{11}$$

tandis que les équations (4, 5, 6 et 7) n'éprouvent aucun changement.

Ceci posé, cherchons une valeur W de v qui satisfasse à l'équation aux dérivées partielles

$$\frac{d^2\mathrm{W}}{dy^2} + \frac{d^2\mathrm{W}}{dz^2} + \mathrm{Z}\cos\left(r\frac{y}{h}\right) + \mathrm{Z}'\sin\left(r'\frac{y}{h}\right) = 0 \tag{12}$$

et aux équations (4 et 5). Une telle valeur aura la forme

(13)

$$\mathrm{W} = \cos\left(r\frac{y}{h}\right)\sum_{\lambda=0}^{\lambda=\infty} w_{\lambda}\cos\left(m_{\lambda}\frac{z}{h}\right) + \sin\left(r'\frac{y}{h}\right)\sum_{\lambda=0}^{\lambda=\infty} w'_{\lambda}\cos\left(m'_{\lambda}\frac{z}{h}\right)$$

Si nous la substituons dans l'équation (10) et égalons à 0 le coefficient de $\cos\left(r\frac{y}{h}\right)$ et celui de $\sin\left(r\frac{y}{h}\right)$, nous obtenons :

$$(14)\qquad \begin{aligned} &\sum_{\lambda=0}^{\lambda=\infty} \frac{r^2+m^2}{h^2} w_\lambda \cos\left(m_\lambda \frac{z}{h}\right) = Z \\ &\sum_{\lambda=0}^{\lambda=\infty} \frac{r'^2+m'^2_\lambda}{h^2} w'_\lambda \cos\left(m'_\lambda \frac{z}{h}\right) = Z'. \end{aligned}$$

L'équation (4) est d'elle-même satisfaite. Il reste encore l'équation (5); en faisant $z=h$ et en égalant à 0 les coefficients des mêmes *cos* et *sin* que ci-dessus, nous obtenons :

$$\sum_{\lambda=0}^{\lambda=\infty}\left(-\frac{K}{h} m_\lambda w_\lambda \sin m_\lambda + fh\cos\alpha \,.\, w_\lambda \cos m_\lambda\right) = 0$$

$$\sum_{\lambda=0}^{\lambda=\infty}\left(-\frac{K}{h} m'_\lambda w'_\lambda \sin m'_\lambda + fh\cos\alpha \,.\, w'_\lambda \cos m'_\lambda\right) = 0.$$

Comme ce sont les seules équations qui lient les m et m', nous pouvons donc choisir ces derniers arbitrairement pourvu qu'il soit encore possible de satisfaire les équations (14); nous les déterminerons en égalant à 0 les coefficients de w_λ et de w'_λ dans les deux dernières équations, ce qui a l'immense avantage de rendre les m indépendants des w. Nous poserons donc :

$$m'_\lambda = m_\lambda$$

et

$$-\frac{K}{h} m_\lambda \sin m_\lambda + fh\cos\alpha \,.\, \cos m_\lambda = 0$$

ou

$$m_\lambda \, tg\, m_\lambda = \frac{fh^2\cos\alpha}{K}.$$

Les m sont donc simplement les racines positives de l'équation transcendante

$$(15)\qquad m\, tg\, m = \frac{fh^2\cos\alpha}{K} = s.$$

Maintenant que nous avons trouvé les m_λ, les w_λ se déterminent aisément au moyen des équations (14). Reprenons la première de ces équations en faisant

$$\frac{r^2+m_\lambda^2}{h^2} w_\lambda = n_\lambda.$$

Elle prend la forme très simple :

$$\sum_{\lambda=0}^{\lambda=\infty} n_\lambda \cos\left(m_\lambda \frac{z}{h}\right) = Z.$$

Multiplions les deux membres de cette équation par

$$\cos\left(m_\nu \frac{z}{h}\right) dz$$

et intégrons de 0 à h, c'est-à-dire, sur toute l'épaisseur de la glace, nous avons :

$$\sum_{\lambda=0}^{\lambda=\infty} n_\lambda \int_0^h \cos\left(m_\lambda \frac{z}{h}\right)\cos\left(m_\nu \frac{z}{h}\right) dz = \int_0^h Z \cos\left(m_\nu \frac{z}{h}\right) dz.$$

Si l'on observe que, à cause de (15) :

$$m_\lambda \, tg \, m_\lambda - m_\nu \, tg \, m_\nu = 0$$

on vérifie aisément que si λ et ν sont différents,

$$\int_0^h \cos\left(m_\lambda \frac{z}{h}\right) \cos\left(m_\nu \frac{z}{h}\right) dz = 0.$$

Par contre, si $\nu = \lambda$,

$$\int_0^h \cos^2\left(m_\lambda \frac{z}{h}\right) dz = \frac{h(m_\lambda + \sin m_\lambda \cos m_\lambda)}{2 m_\lambda}$$

n_λ peut donc être calculé par le moyen de l'équation

$$n_\nu \frac{h(m_\nu + \sin m_\nu \cos m_\nu)}{2 m_\nu} = \int_0^h Z \cos\left(m_\nu \frac{z}{h}\right) dz.$$

De là, nous tirons en remplaçant ν par λ :

$$w_\lambda = \frac{2 m_\lambda h \int_0^h Z \cos\left(m_\lambda \frac{z}{h}\right) dz}{(r^2 + m_\lambda^2)(m_\lambda + \sin m_\lambda \cos m_\lambda)}.$$

Nous trouverions de même :

$$w'_\lambda = \frac{2 m_\lambda h \int_0^h Z' \cos\left(m_\lambda \frac{z}{h}\right) dz}{(r'^2 + m_\lambda^2)(m_\lambda + \sin m_\lambda \cos m_\lambda)}.$$

En résumé, l'équation

$$\frac{d^2 W_\mu}{dy^2} + \frac{d^2 W_\mu}{dz^2} + Z_\mu \cos\left(r_\mu \frac{y}{h}\right) + Z'_\mu \cos\left(r'_\mu \frac{y}{h}\right) = 0$$

accompagnée des équations :

$$\text{pour } z = 0 \qquad \frac{d W_\mu}{dz} = 0$$

$$\text{pour } z = h \qquad K\frac{d W_\mu}{dz} + fh\cos\alpha\, W_\mu = 0$$

admet pour intégrale

$$W_\mu = \cos\left(r_\mu \frac{y}{h}\right) \sum_{\lambda=0}^{\lambda=\infty} w_{\mu\lambda} \cos\left(m_\lambda \frac{z}{h}\right) + \cos\left(r'_\mu \frac{y}{h}\right) \sum_{\lambda=0}^{\lambda=\infty} w'_{\mu\lambda} \cos\left(m_\lambda \frac{z}{h}\right)$$

où

$$w_{\mu\lambda} = \frac{2 m_\lambda h \int_0^h Z_\mu \cos\left(m \frac{z}{h}\right) dz}{(r_\mu^2 + m_\lambda^2)(m_\lambda + \sin m \cos m_\lambda)}$$

$$w'_{\mu\lambda} = \frac{2 m_\lambda h \int_0^h Z'_\mu \cos\left(m_\lambda \frac{z}{h}\right) dz}{(r_\mu'^2 + m^2)(m_\lambda + \sin m \cos m)}.$$

Par conséquent, les équations (11, 4 et 5) admettront l'intégrale

$$W = \Sigma W_\mu$$

W est donc une double somme. Si nous la transformons de manière à la séparer en deux groupes et si nous intervertissons les Σ, elle devient

$$W = \sum_{\lambda=0}^{\lambda=\infty} \left[\frac{2 m_\lambda h \cos\left(m_\lambda \frac{z}{h}\right)}{m_\lambda + \sin m_\lambda \cos m_\lambda} (S_\lambda + S'_\lambda) \right]$$

$$(16) \qquad S_\lambda = \Sigma \left[\frac{\cos\left(r_\mu \frac{y}{h}\right)}{r^2 + m^2} \int_0^h Z_\mu \cos\left(m_\lambda \frac{z}{h}\right) dz \right]$$

$$S'_\lambda = \Sigma \left[\frac{\cos\left(r'_\mu \frac{y}{h}\right)}{r_\mu'^2 + m_\lambda^2} \int_0^h Z'^\mu \cos\left(m_\lambda \frac{z}{h}\right) dz \right]$$

Maintenant que nous avons une intégrale de l'équation (11) qui satisfait aux équations (4 et 5), il nous est possible d'en trouver une qui satisfasse aux quatre équations (4, 5, 6 et 7). A cet effet, posons :

$$v = W + V. \tag{17}$$

L'équation (11) devient :

$$\frac{d^2 V}{dy^2} + \frac{d^2 V}{dz^2} = 0. \tag{18}$$

Les équations (4 et 5) ne subissent aucun changement ; elles sont :

$$\text{pour } z = 0 \qquad \frac{dV}{dz} = 0 \tag{19}$$

$$\text{pour } z = h \qquad K\frac{dV}{dz} = fh\cos\alpha V = 0. \tag{20}$$

Les équations (6 et 7) deviennent après réductions :

$$\text{pour } y = y_0 \qquad K\frac{dV}{dy} + fq\cos\alpha V = -K\frac{dW}{dy} - fq\cos\alpha W \tag{21}$$

$$\text{pour } y = -y_0 \, K\frac{dV}{dy} - fq\cos\alpha V = -K\frac{dW}{dy} + fq\cos\alpha W. \tag{22}$$

Les équations (18, 19 et 20) seront satisfaites quels que soient m, A et A′ si l'on pose :

$$V = \left[A\cos\text{hyp}\left(m\frac{y}{h}\right) + A'\sin\text{hyp}\left(m\frac{y}{h}\right)\right]\cos\left(m\frac{z}{h}\right).$$

Pour que (21) le soit, il faut et il suffit que

$$-K\frac{m}{h}\sin m + fh\cos\alpha\cos m = 0$$

$$m\,tg\,m = \frac{fh^2\cos\alpha}{K} = s$$

ce qui n'est autre que l'équation (15). Les différentes valeurs que m est susceptible d'avoir sont, par conséquent, les mêmes m_λ que nous avons déjà trouvées. Nous savons donc que si nous posons :

$$V = \sum_{\lambda=0}^{\lambda=\infty} \left[\frac{2 m_\lambda h \cos\left(m_\lambda \frac{z}{h}\right)}{m_\lambda + \sin m_\lambda \cos m_\lambda} (T_\lambda + T'_\lambda) \right]$$

(23) $$T_\lambda = A_\lambda \cos \text{hyp}\left(m_\lambda \frac{y}{h}\right)$$

$$T'_\lambda = A'_\lambda \sin \text{hyp}\left(m_\lambda \frac{y}{h}\right)$$

les équations (18, 19 et 20) seront satisfaites. Restent les équations (21 et 22); nous remplacerons dans ces équations W et V par leurs valeurs; nous égalerons les termes qui ont le même indice λ et nous diviserons ensuite par le facteur commun

$$\frac{2 m_\lambda h \cos\left(m_\lambda \frac{z}{h}\right)}{m_\lambda + \sin m_\lambda \cos m_\lambda};$$

enfin, nous ramènerons en même temps pour l'équation (22) toutes les fonctions de l'argument $-y_0$ aux mêmes fonctions de l'argument $+y_0$ en remarquant que

$$S_\lambda \quad \frac{\partial S'_\lambda}{\partial y} \quad T_\lambda \quad \frac{\partial T'_\lambda}{\partial y}$$

sont des fonctions paires, et

$$S'_\lambda \quad \frac{\partial S_\lambda}{\partial y} \quad T'_\lambda \quad \frac{\partial T_\lambda}{\partial y}$$

des fonctions impaires. Nous obtiendrons ainsi les deux équations :

$$K\left(\frac{\partial T_\lambda}{\partial y} + \frac{\partial T'_\lambda}{\partial y}\right) + f q \cos\alpha (T_\lambda + T'_\lambda) =$$

$$= -K\left(\frac{\partial S_\lambda}{\partial y} + \frac{\partial S'_\lambda}{\partial y}\right) - f q \cos\alpha (S_\lambda + S'_\lambda)$$

$$K\left(-\frac{\partial T_\lambda}{\partial y} + \frac{\partial T'_\lambda}{\partial y}\right) + f q \cos\alpha (-T_\lambda + T'_\lambda) =$$

$$= -K\left(-\frac{\partial S_\lambda}{\partial y} + \frac{\partial S'_\lambda}{\partial y}\right) - f q \cos\alpha (-S_\lambda + S'_\lambda).$$

Prenons membre à membre la demi-différence et la demi-somme de ces deux équations :

$$K\frac{\partial T_\lambda}{\partial y} + fq\cos\alpha\, T_\lambda = -K\frac{\partial S_\lambda}{\partial y} - fq\cos\alpha\, S_\lambda$$

$$K\frac{\partial T'_\lambda}{\partial y} + fq\cos\alpha\, T'_\lambda = -K\frac{\partial S'_\lambda}{\partial y} - fq\cos\alpha\, S'_\lambda.$$

Si l'on remplace dans la première de ces équations T_λ, S_λ et leurs dérivées par leurs valeurs en faisant $y = y_0$, on obtient ainsi une équation qui permet de calculer les coefficients A_λ; les A'_λ se détermineraient d'une manière analogue. On trouve aisément, en utilisant l'équation (15), que si l'on pose

$$B_\mu = s\frac{q}{h}\cos\left(r_\mu\frac{y_0}{h}\right) - r_\mu\sin\left(r_\mu\frac{y_0}{h}\right)$$

$$B'_\mu = s\frac{q}{h}\sin\left(r'_\mu\frac{y_0}{h}\right) + r'_\mu\cos\left(r'_\mu\frac{y_0}{h}\right)$$

$$C_\lambda = s\frac{q}{h}\cosh\text{yp}\left(m_\lambda\frac{y_0}{h}\right) + m_\lambda\,\text{syn hyp}\left(m_\lambda\frac{y_0}{h}\right)$$

$$C'_\lambda = s\frac{q}{h}\sinh\text{yp}\left(m_\lambda\frac{y_0}{h}\right) + m_\lambda\cosh\text{yp}\left(m_\lambda\frac{y_0}{h}\right)$$

A_λ et A'_λ sont donnés par les équations

$$C_\lambda A_\lambda = -\Sigma\left[\frac{B_\mu}{r_\mu^2 + m_\lambda^2}\int_0^h Z_\mu\cos\left(m_\lambda\frac{z}{h}\right)dz\right]$$

$$C'_\lambda A'_\lambda = -\Sigma\left[\frac{B'_\mu}{r'^2_\mu + m_\lambda^2}\int_0^h Z'_\mu\cos\left(m_\lambda\frac{z}{h}\right)dz.\right]$$

En introduisant ces valeurs dans les équations (23), on trouve V, après quoi, en effectuant la simple addition indiquée dans l'équation (17), et en rassemblant convenablement les termes, on obtient la valeur de la vitesse cherchée v telle que l'indique la formule suivante :

$$v = \sum_{\lambda=0}^{\lambda=\infty} \left[\frac{2\, m_\lambda h \cos\left(m_\lambda \frac{z}{h}\right)}{m_\lambda + \sin m_\lambda \cos m_\lambda} (R_\lambda + R'_\lambda) \right]$$

(25)

$$R_\lambda = \sum_\mu \left[\frac{\int_0^h Z_\mu \cos\left(m_\lambda \frac{z}{h}\right) dz}{r_\mu^2 + m_\lambda^2} \left[\cos\left(r_\mu \frac{y}{h}\right) - \frac{B_\mu}{C_\lambda} \cosh\text{yp}\left(m_\lambda \frac{y}{h}\right) \right] \right]$$

$$R'_\lambda = \sum_{\lambda=0} \left[\frac{\int_0^h Z'_\mu \cos\left(m_\lambda \frac{z}{h}\right) dz}{r'^2_\mu + m_\lambda^2} \left[\sin\left(r'_\mu \frac{y}{h}\right) - \frac{B'_\mu}{C'_\lambda} \sin\text{hyp}\left(m_\lambda \frac{y}{h}\right) \right] \right]$$

Cette formule donne donc la vitesse en un point quelconque du canal; elle est tout à fait générale et absolument exacte si les lois sur les frottements externes et internes dont nous sommes partis sont exactes.

La valeur générale de v prend une forme plus simple si l'on suppose que Z_μ et Z'_μ sont développés en série comme suit :

(26)

$$Z_\mu = \Sigma \left[z_{\mu\lambda} \cos\left(m_\lambda \frac{z}{h}\right) \right] = \Sigma\, (Z_{\mu\lambda})$$

$$Z'_\mu = \Sigma \left[z'_{\mu\lambda} \cos\left(m_\lambda \frac{z}{h}\right) \right] = \Sigma\, (Z'_{\mu\lambda})$$

$z_{\mu\lambda}$ et $z'_{\mu\lambda}$ étant des constantes. On peut déterminer ces constantes comme nous avons déterminé $w_{\mu\lambda}$ et l'on trouve alors que:

(27)

$$v = h^2 \Sigma \left[\frac{Z_{\mu\lambda}}{r_\mu^2 + m_\lambda^2} \left[\cos\left(r_\mu \frac{y}{h}\right) - \frac{B_\mu}{C_\lambda} \cos\text{hyp}\left(m_\lambda \frac{y}{h}\right) \right] \right] +$$

$$+ h^2 \Sigma \left[\frac{Z'_{\mu\lambda}}{r'^2_\mu + m_\lambda^2} \left[\sin\left(r'_\mu \frac{y}{h}\right) - \frac{B'_\mu}{C'_\lambda} \sin\text{hyp}\left(m_\lambda \frac{y}{h}\right). \right] \right]$$

Les Σ doivent s'étendre sur tous les μ et sur tous les λ de o à ∞. Remarquons que pour des valeurs très grandes de l'indice λ, on a

$$m_\lambda = \lambda \pi.$$

Ceci nous montre que les deux séries dont se compose v doivent rapidement converger, d'autant plus que, pour que les formules

(26) aient lieu, les $Z_{\mu\lambda}$ doivent former des séries convergentes en les ordonnant d'après le 2e indice.

Cas particulier. — Supposons que la pression p ne soit pas fonction de l'ordonnée y; nous pouvons alors poser:

$$r_\mu = r'_\mu = 0$$

$$\Sigma Z_\mu = Z = P$$

où Z est une fonction quelconque de z, et les formules (24 et 25) donnent :

$$v = 2h \sum_{\lambda=0}^{\lambda=\infty} \left[\frac{\int_0^h Z \cos\left(m_\lambda \frac{z}{h}\right) dz}{m_\lambda (m_\lambda + \sin m_\lambda \cos m_\lambda)} \cos\left(m_\lambda \frac{z}{h}\right) \left[1 - \frac{B}{C_\lambda} \cos \text{hyp}\left(m_\lambda \frac{h}{y}\right) \right] \right]$$

$$B = S \frac{q}{h}.$$

Ce cas particulier ne pourra guère se rapporter à un glacier, car l'effet des frottements contre les moraines latérales peut en général être négligé, ce qui se traduit dans nos calculs par $q = 0$ et $B = 0$ et l'on voit que v n'est pas fonction de y; or, cela est contraire à toutes les observations faites jusqu'ici. Nous devons cependant nous étendre un peu sur ce cas spécial qui nous permettra d'établir la formule générale du débit du glacier.

Supposons que non-seulement p ne soit pas fonction de y, mais qu'il ne soit non plus fonction de z, en d'autres termes, qu'il ne varie qu'avec x; $Z = P$ devra être regardé comme constant dans la formule ci-dessus, et si nous faisons en outre $q = 0$, elle devient :

$$v = 2h^2 P \sum_{\lambda=0}^{\lambda=\infty} \left[\frac{\sin m_\lambda \cos\left(m_\lambda \frac{z}{h}\right)}{m_\lambda^2 (m_\lambda + \sin m_\lambda \cos m_\lambda)} \right].$$

Cette formule peut être mise sous une forme très simple; mais les m_λ étant les racines d'une équation transcendante, sa transformation directe n'est pas très facile. Par contre, on trouve aisément la forme finie de v en intégrant directement l'équation

$$P + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} = 0. \tag{9}$$

(dans laquelle on suppose P constant) avec les conditions (4, 5, 6, 7) dans lesquelles nous faisons $q = 0$ et qui sont :

(4) pour $z = 0$ $\qquad \dfrac{\partial v}{\partial z} = 0$

(5) pour $z = h$ $\qquad K \dfrac{\partial v}{\partial z} + f h \cos\alpha \, v = 0$

(6 et 7) pour $y = \pm y_0$ $\qquad \dfrac{\partial v}{\partial y} = 0.$

On voit immédiatement que l'on peut satisfaire à toutes ces conditions avec une fonction v de la forme

$$a + b z^2$$

et si l'on détermine les coefficients a et b, on trouve

$$v = \frac{P}{2}\left(\frac{2K}{f\cos\alpha} + h^2 - z^2\right)$$

ou en introduisant la valeur de s donnée par la formule (15)

$$v = \frac{1}{2} h^2 P \left[\left(1 + \frac{2}{5}\right) - \left(\frac{z}{h}\right)^2\right].$$

Cette expression une fois trouvée, on vérifie aisément qu'elle est bien égale à la première établie; il suffit pour cela de la développer en série suivant les

$$\cos\left(m_\lambda \frac{z}{h}\right)$$

ce que l'on fait sans la moindre difficulté comme nous l'avons indiqué plus haut.

Revenons à la formule générale (25). Si nous voulons l'appliquer à l'étude de l'écoulement des glaciers qui n'ont pas de changements brusques dans leur direction, nous pouvons sans inconvénient faire abstraction du frottement contre les moraines latérales, c'est-à-dire contre les faces latérales du canal dans lequel coule la glace; nous pouvons donc poser

$$q = 0.$$

La formule (25) n'éprouve aucune simplification, mais on a par contre :

$$B_\mu = -r_\mu \sin\left(r_\mu \frac{y_0}{h}\right)$$

$$B'_\mu = r'_\mu \cos\left(r'_\mu \frac{y_0}{h}\right)$$

$$C_\lambda = m_\lambda \sin\text{hyp}\left(m_\lambda \frac{y_0}{h}\right)$$

$$C'_\lambda = m_\lambda \cos\text{hyp}\left(m_\lambda \frac{y_0}{h}\right).$$

Il est bon de remarquer que la supposition $q = 0$ entraîne d'après les équations (6 et 7), pour le bord du glacier : $\frac{\partial v}{\partial y} = 0$, la vitesse v pouvant, elle, du reste, avoir au bord du glacier une valeur quelconque.

La formule (25) ne peut évidemment pas être appliquée dans toute sa généralité à l'étude d'un glacier ; il suffira même probablement dans toute application de considérer une ou deux fonctions Z_μ et Z'_μ (formule 10) et il suffira de même de prendre peu de termes pour la sommation par rapport à λ, vu que cette série est très convergente. On entrevoit ainsi que la formule (25) doit pouvoir être transformée et ramenée à une forme beaucoup plus simple qui permette de l'appliquer à des observations faites sur la marche d'un glacier. Nous laisserons ici cette transformation complètement de côté, nous réservant d'y venir plus tard s'il y a lieu et nous passerons directement à la recherche du débit qui est le but principal de notre calcul.

DÉBIT, VITESSE MOYENNE

Les formules (25 et 27) donnent la vitesse en un point quelconque d'une section transversale d'un canal rectangulaire dont la largeur est $2y_0$ et la profondeur h ; si nous appelons U le débit du canal en un point de cette section, ou autrement dit le volume de la glace qui traverse cette dernière pendant l'unité de temps, nous savons que

$$U = \int_0^h \int_{-y_0}^{y_0} v\, dz\, dy.$$

Remplaçons v par sa valeur tirée de l'équation (25); nous avons

$$U = 4h \sum_{\lambda=0}^{\lambda=\infty} \left[\int_0^h \frac{m_\lambda \cos\left(m_\lambda \frac{z}{h}\right) dz}{m_\lambda + \sin m_\lambda \cos m_\lambda} \int_{-y_0}^{+y_0} (R_\lambda + R'_\lambda)\, dy. \right]$$

Effectuons d'abord l'intégration par rapport à z; il vient :

$$U = 4h^2 \sum_{\lambda=0}^{\lambda=\infty} \left[\frac{\sin m_\lambda}{m_\lambda + \sin m_\lambda \cos m_\lambda} \int_{-y_0}^{+y_0} (R_\lambda + R'_\lambda)\, dy. \right]$$

Ici, nous sommes obligé de faire une restriction pour arriver à un résultat simple : nous négligerons le frottement contre les moraines latérales et ferons en conséquence :

$$q = 0.$$

Opérons maintenant l'intégration de $R_\lambda\, dy$ par rapport à y en employant les formules (25 et 28); nous trouvons après réductions :

$$\int_{-y_0}^{+y_0} \left[\cos\left(r_\mu \frac{y}{h}\right) - \frac{B_\mu}{C_\lambda} \cos \mathrm{hyp}\left(m_\lambda \frac{y}{h}\right) \right] dy =$$

$$= 2 \frac{y_0}{m_\lambda^2} (m_\lambda^2 + r_\mu^2) \frac{\sin\left(r_\mu \frac{y_0}{h}\right)}{r_\mu \frac{y_0}{h}}.$$

Substituons cette expression dans la valeur de R_λ ; il vient :

$$\int_{-y_0}^{+y_0} R_\lambda\, dy = y_0 \sum_\mu \left[\frac{\sin\left(r_\mu \frac{y_0}{h}\right)}{r_\mu \frac{y_0}{h}} \int_0^h Z_\mu \frac{\cos\left(m_\lambda \frac{z}{h}\right)}{m_\lambda^2} dz. \right]$$

Par contre

$$\int_{-y_0}^{+y_0} R'_\lambda\, dy = 0.$$

U a donc pour valeur

$$U = 4h^2 y_0 \int_0^h \sum \left[\frac{\sin\left(r_\mu \frac{y_0}{h}\right)}{r_\mu \frac{y_0}{h}} Z_\mu \right] \sum_{\lambda=0}^{\lambda=\infty} \left[\frac{\sin m_\lambda \cos\left(m_\lambda \frac{z}{h}\right) dz}{m_\lambda^2 (m_\lambda + \sin m_\lambda \cos m_\lambda)} \right]$$

Appelons S l'aire de la section du canal ; elle est égale à

$$S = 2y_0 h.$$

Nous avions posé

$$(10) \qquad P = \sum_{\mu} \left[Z_\mu \cos\left(r_\mu \frac{y}{h}\right) \right] + \sum_{\mu} \left[Z'_\mu \sin\left(r'_\mu \frac{y}{h}\right) \right]$$

Si nous considérons une valeur déterminée de z, la valeur moyenne de P pour toute la largeur du canal est :

$$\overline{P} = \frac{1}{2y_0} \int_{-y_0}^{+y_0} P\, dy = \sum_{\mu} \left[Z_\mu \frac{\sin\left(r_\mu \frac{y_0}{h}\right)}{r_\mu \frac{y_0}{h}} \right]$$

En introduisant les notations S et $\overline{P}$ dans la valeur de U, celle-ci devient :

$$(29) \qquad U = 2hS \int_0^h \sum_{\lambda=0}^{\lambda=\infty} \left[\overline{P} \frac{\sin m_\lambda \cos\left(m_\lambda \frac{z}{h}\right) dz}{m_\lambda^2 (m_\lambda + \sin m_\lambda \cos m_\lambda)} \right].$$

L'épaisseur d'un glacier est toujours très faible relativement à sa largeur ; les variations de vitesse et de pression suivant l'épaisseur z seront donc peu sensibles et auront beaucoup moins d'influence sur le débit que les variations suivant y. Nous ne commettrons donc pas une erreur sensible en remplaçant $\overline{P}$ qui est fonction de z par la valeur moyenne $\overline{\overline{P}}$ de P pour toute la section S. Cette hypothèse revient à supposer que la pression ne varie pas avec z tandis qu'elle est une fonction quelconque de y. Ceci étant admis, nous pouvons effectuer l'intégration par rapport à z et nous avons :

$$(30) \qquad U = h^2 S \overline{\overline{P}} \sum_{\lambda=0}^{\lambda=\infty} \left[\frac{2 \sin^2 m_\lambda}{m_\lambda^3 (m_\lambda + \sin m_\lambda \cos m_\lambda)} \right].$$

Rappelons que les m_λ sont les racines positives de l'équation (15)

$$m\, tg\, m = s.$$

La série renfermée dans la valeur de U est donc une fonction bien déterminée de la seule variable s et nous pouvons poser

$$\sum_{\lambda=0}^{\lambda=\infty} \left[\frac{2 \sin^2 m_\lambda}{m_\lambda^3 (m_\lambda + \sin m_\lambda \cos m_\lambda)} \right] = \varphi(s).$$

Cette fonction est très facile à déterminer au moyen des données mêmes de notre problème. Pour y arriver remarquons d'abord que l'équation (30) est absolument exacte comme formule mathématique résultant de l'équation (9), si P est indépendant de z, et à plus forte raison si P est constant. Mais pour le cas où P est constant, nous avons trouvé une autre forme de v, savoir :

$$v = \frac{1}{2} h^2 \mathrm{P} \left[\left(1 + \frac{2}{3}\right) - \left(\frac{z}{h}\right)^2 \right].$$

Nous tirons de là une nouvelle expression du débit :

$$\mathrm{U} = \int_{-y_0}^{+y_0} dy \int_0^h v dz =$$

$$= 2 h^3 y_0 \mathrm{P} \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{s}\right)$$

$$\mathrm{U} = h^2 \mathrm{SP} \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{s}\right).$$

Cette valeur de U doit être identique à celle qui est donnée par la formule (33) ; il s'ensuit que :

$$\varphi(s) = \frac{1}{3} + \frac{1}{s}$$

quel que soit (s). En substituant cette valeur dans l'équation (30), elle devient :

$$\mathrm{R} = h^2 \mathrm{S} \bar{\bar{\mathrm{P}}} \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{s}\right).$$

Mais d'après la formule (15),

$$s = \frac{f h^2 \cos \alpha}{\mathrm{K}}.$$

Par conséquent :

$$\mathrm{U} = \mathrm{S} \bar{\bar{\mathrm{P}}} \left(\frac{h^2}{3} + \frac{\mathrm{K}}{f \cos \alpha}\right).$$

Nous avions posé

$$\sin \lambda - \frac{1}{g \Delta} \frac{\partial p}{\partial x} = \mathrm{KP}. \tag{8}$$

Si donc, nous représentons par p' la valeur moyenne de $\frac{\partial p}{\partial x}$, nous aurons :

$$\sin\alpha - \frac{p'}{g\Delta} = \mathrm{K}\bar{\bar{\mathrm{P}}}$$

et U est en définitive représenté par la formule

$$(31) \qquad \mathrm{U} = \left(\frac{h^2}{3\mathrm{K}} + \frac{1}{f\cos\alpha}\right)\left(\sin\alpha - \frac{p'}{g\Delta}\right)\mathrm{S}.$$

Le quotient du débit U par l'aire S de la section donne la vitesse moyenne v^*; donc

$$(32) \qquad v^* = \left(\frac{h^2}{3\mathrm{K}} + \frac{1}{f\cos\alpha}\right)\left(\sin\alpha - \frac{p'}{g\Delta}\right).$$

La simplicité de ces deux dernières formules est remarquable, étant donnée leur généralité; pour les établir, nous avons en effet supposé que la pression était une fonction quelconque de y, mais il est vrai qu'elle ne variait pas avec z.

Nous allons appliquer ces derniers résultats à l'écoulement de la glace renfermée dans un canal rectangulaire droit de section constante S. Soit (fig. 5) ABCD A'B'C'D' ce canal. Nous représenterons par l sa longueur, par h sa hauteur, par s la surface ABCD, par α son angle d'inclinaison. U étant son débit, il est exprimé par la formule (31) :

$$(31) \qquad \mathrm{U} = \left(\frac{h^2}{3\mathrm{K}} + \frac{1}{f\cos\alpha}\right)\left(\sin\alpha - \frac{p'}{g\Delta}\right)\mathrm{S}.$$

Rappelons que f et $\mathrm{F} = g\Delta\mathrm{K}$ sont les coefficients de frottement interne et externe, Δ la densité de la glace et g la gravité. Dans notre cas particulier, nous savons que toutes les quantités qui entrent dans la formule ci-dessus, à l'exception de p', sont des constantes; p' doit donc lui-même être constant. Il s'ensuit que si nous représentons par P_1 et P_2 les poussées totales qui agissent sur les extrémités ABCD et A'B'C'D', p' est donné par la relation :

$$\mathrm{S}p' = \frac{\mathrm{P}_2 - \mathrm{P}_1}{l}$$

et la formule (31) devient

$$(33) \qquad U = \left(\frac{h^2}{3K} + \frac{1}{f\cos\alpha}\right)\left(S\sin\alpha - \frac{P_2 - P_1}{g\Delta l}\right).$$

La vitesse moyenne aura alors pour valeur

$$(34) \qquad v^* = \left(\frac{h^2}{3K} + \frac{1}{f\cos\alpha}\right)\left(\sin\alpha - \frac{P_2 - P_1}{\Pi}\right)$$

où π représente le poids total de la glace renfermée dans le canal.

Si la glace était un corps absolument solide, c'est-à-dire indéformable, K serait infini et U serait donc inversement proportionnel à f.

Si la glace, étant considérée comme une masse visqueuse, ne glissait pas, c'est f qui deviendrait infini et la vitesse moyenne serait dans ce cas proportionnelle au carré de l'épaisseur h de la glace.

Dans les applications, c'est toujours un cas intermédiaire entre ces deux qui se présente.

CONCLUSION

Si l'on veut appliquer la loi d'écoulement que nous avons établie à l'étude de la marche des glaciers et obtenir un bon résultat, on se trouve arrêté par l'interprétation mathématique de deux phénomènes qui n'ont été jusqu'à présent qu'insuffisamment étudiés; ce sont le tassement des neiges formant le névé, tassement qui est produit en partie par simple compression et en partie par le « regel » et l'ablation qui fait particulièrement sentir ses effets sur le glacier. S'il ne s'agit que de déterminer la vitesse moyenne, on peut faire abstraction des différences de vitesses occasionnées par l'ablation et se servir uniquement de la vitesse moyenne de chaque filet du glacier; même s'il le fallait absolument, il serait possible de tenir compte de ces différences. Il n'en est plus tout à fait de même du tassement des neiges; ce phénomène ne peut pas encore à l'heure présente être soumis au calcul et la seule issue qui se présente à nous est, comme nous l'avons déjà dit plus haut, de passer outre, c'est-à-dire d'admettre que le névé est formé d'une matière incompressible et qu'il a pour toutes ses sections la même vitesse moyenne.

Nous obtiendrons par ce moyen la théorie mathématique d'un phénomène qui se rapprochera beaucoup de l'écoulement d'un glacier, mais dont les formules ne pourront cependant pas servir à des mesures exactes sans avoir été préalablement complétées de manière à tenir compte de phénomènes que nous sommes pour le moment obligé d'écarter et qui n'exercent pas moins une certaine influence sur le mouvement.

Supposons le névé de forme rectangulaire et soient l_1 sa longueur, h_1 son épaisseur, S_1 sa section moyenne, Δ_1 sa densité, f_1 et K_1 ses coefficients de frottement, U_1 son débit, v_1 sa vitesse moyenne, P_1 la pression totale que la neige exerce contre la section limite inférieure. Le névé forme un simple canal rectangulaire auquel nous pouvons appliquer la formule (33) qui nous donne le débit :

$$U_1 = \left(\frac{h_1^2}{3K_1} + \frac{1}{f_1 \cos\alpha_1}\right)\left(S_1 \sin\alpha_1 + \frac{P}{g\Delta_1 l_1}\right).$$

Ici, nous n'avons qu'une seule pression P. Multiplions cette équation par $g\Delta_1 l_1$ et représentons par M_1 la masse $g\Delta_1 l_1 S_1$ du névé, nous avons :

$$g\Delta_1 l_1 U_1 = \left(\frac{h_1^2}{3K_1} + \frac{1}{f_1 \cos\alpha_1}\right)(M_1 \sin\alpha_1 + P).$$

Mais

$$U_1 = S_1 v_1$$

et par suite

$$M_1 v_1 = \left(\frac{h_1^2}{3K_1} + \frac{1}{f_1 \cos\alpha_1}\right)(M_1 \sin\alpha_1 + P).$$

En faisant des suppositions tout à fait analogues pour le glacier, et en remarquant que la pression P sur la couche inférieure du névé est la même que celle qui agit sur la couche supérieure du glacier, nous trouverions pour ce dernier la formule suivante :

$$M_2 v_2 = \left(\frac{h_2^2}{3K_2} + \frac{1}{f_2 \cos\alpha_2}\right)(M_2 \sin\alpha_2 - P).$$

Eliminons P entre les deux dernières équations ; il vient :

$$(35) \qquad \frac{M_1 v_1}{\dfrac{h_1^2}{3K_1} + \dfrac{1}{f_1 \cos\alpha_1}} + \frac{M_2 v_2}{\dfrac{h_2^2}{3K_2} + \dfrac{1}{f_2 \cos\alpha_2}} = M_1 \sin\alpha_1 + M_2 \sin\alpha_2.$$

Un certain rapport doit toujours exister entre les vitesses v_1 du névé et v_2 du glacier; sans l'ablation ce rapport serait simplement l'expression du fait que le débit en masse (masse de neige qui traverse une section pendant l'unité de temps) du névé est égal à celui du glacier. Nous ne nous éloignerons donc pas beaucoup de la vérité en admettant qu'il en est ainsi. Nous poserons par conséquent :

$$\Delta_1 S_1 v_1 = \Delta_2 S_2 v_2.$$

Cette égalité peut être écrite comme suit :

$$\frac{M_1 v_1}{l_1} = \frac{M_2 v_2}{l_2} = Q$$

d'où l'on tire

$$M_1 v_1 = Q l_1$$
$$M_2 v_2 = Q l_2.$$

L'équation (35) devient ainsi :

$$Q\left[\frac{l_1}{\frac{h_1^2}{3K_1} + \frac{1}{f_1 \cos\alpha_1}} + \frac{l_2}{\frac{h_2^2}{3K_2} + \frac{1}{f_2 \cos\alpha_2}}\right] = M_1 \sin\alpha_1 + M_2 \sin\alpha_2$$

en remplaçant Q par ses valeurs, on obtient les deux formules suivantes :

$$(36) \qquad \begin{aligned} N\frac{v_1}{l_1} &= \sin\alpha_1 + \frac{M_2}{M_1}\sin\alpha_2 \\ N\frac{v_2}{l_2} &= \frac{M_1}{M_2}\sin\alpha_1 + \sin\alpha_2 \end{aligned}$$

dans lesquelles :

$$N = \frac{l_1}{\frac{h_1^2}{3K_1} + \frac{1}{f_1 \cos\alpha_1}} + \frac{l_2}{\frac{h_2^2}{3K_2} + \frac{1}{f_2 \cos\alpha_2}}$$

Les formules (36) sont le résultat final de nos calculs ; elles permettent de calculer la vitesse moyenne du névé et du glacier lorsqu'on connaît leurs dimensions et la nature des matières qui les composent.

Pour se faire une idée claire de la signification de ces formules, il est utile de rechercher ce qu'elles deviendraient pour le cas où la neige du névé aurait la même consistance que la glace du glacier et où le névé et le glacier auraient des sections transversales égales; nous interprèterons cette supposition en posant

$$K_1 = K_2 = K$$

$$f_1 = f_2 = f$$

$$h_1 = h_2 = h$$

$$\frac{M_2}{M_1} = \frac{l_2}{l_1}$$

$$v_1 = v_2 = v.$$

Les deux formules (36) se condensent alors en une seule qui après réductions devient :

$$v = \left(\frac{h^2}{3K} + \frac{1}{f\cos\alpha}\right)\sin\alpha \tag{37}$$

f et K représentent ici les valeurs moyennes à un moment donné des coefficients de frottement externe et interne pour tout le glacier accompagné du névé; h représente l'épaisseur moyenne et α l'inclinaison moyenne du glacier et du névé.

La formule (37) ne donne qu'une idée très imparfaite du mouvement d'un glacier puisqu'il n'arrive jamais que la matière qui constitue le névé soit identique à celle dont est formé le glacier. Si, malgré cela, on cherche à l'interpréter, on voit :

1° Que la vitesse moyenne est indépendante de la longueur du glacier;

2° Qu'elle est proportionnelle à la pente du glacier;

3° Qu'elle augmente avec l'épaisseur du glacier et cela d'autant plus rapidement que cette épaisseur est plus grande.

Ces déductions concordent en gros avec ce que l'on connaît actuellement du mouvement des glaciers et nous font croire que les hypothèses dont nous sommes partis sont fondées. Lorsque les résultats des observations faites sur le glacier du Rhône seront connus, il nous sera possible, nous l'espérons, de leur appliquer nos calculs et d'en déduire des données encore incon-

Fig. 1

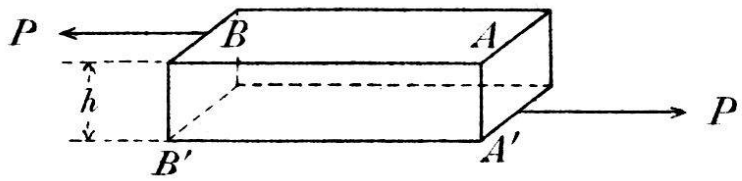


Fig. 2

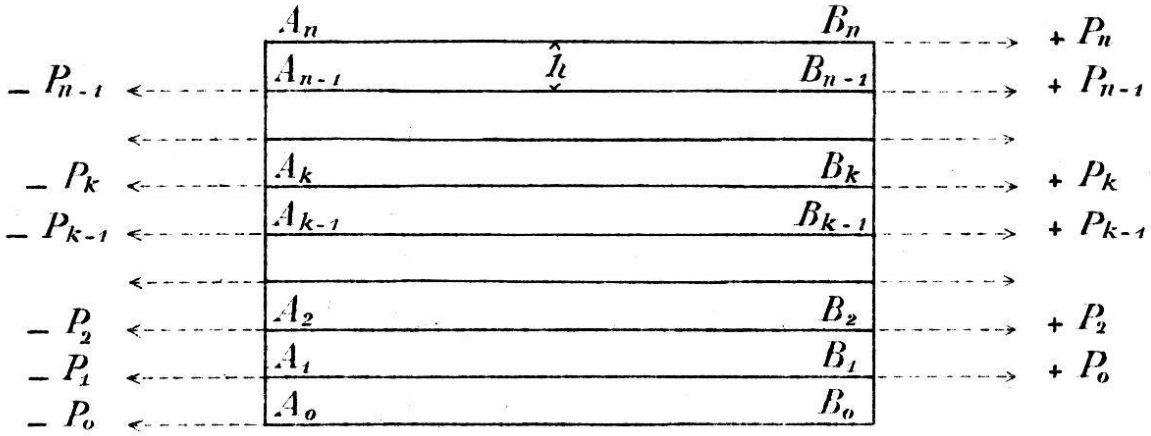
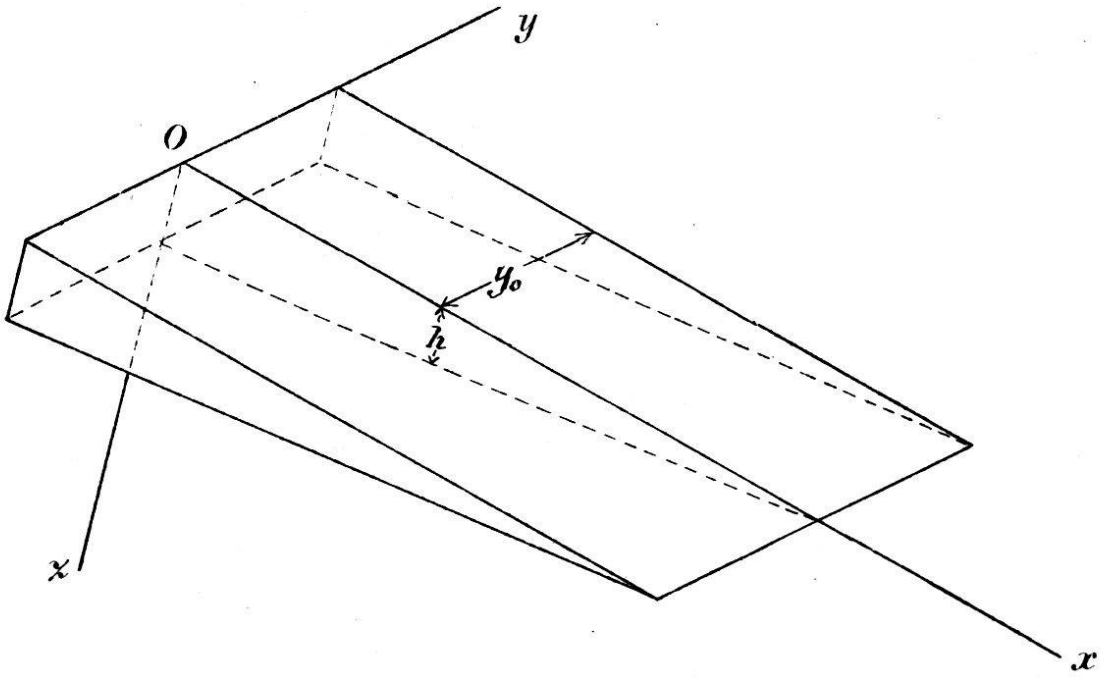


Fig. 3



Lith. J. Chappuis, Lausanne

Fig. 4

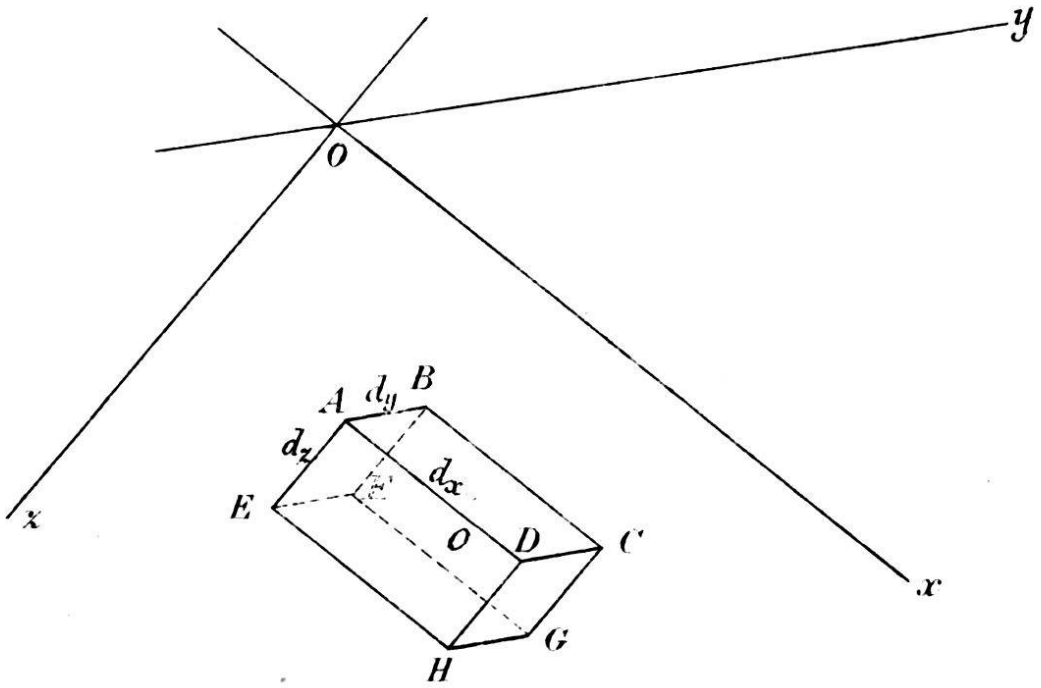
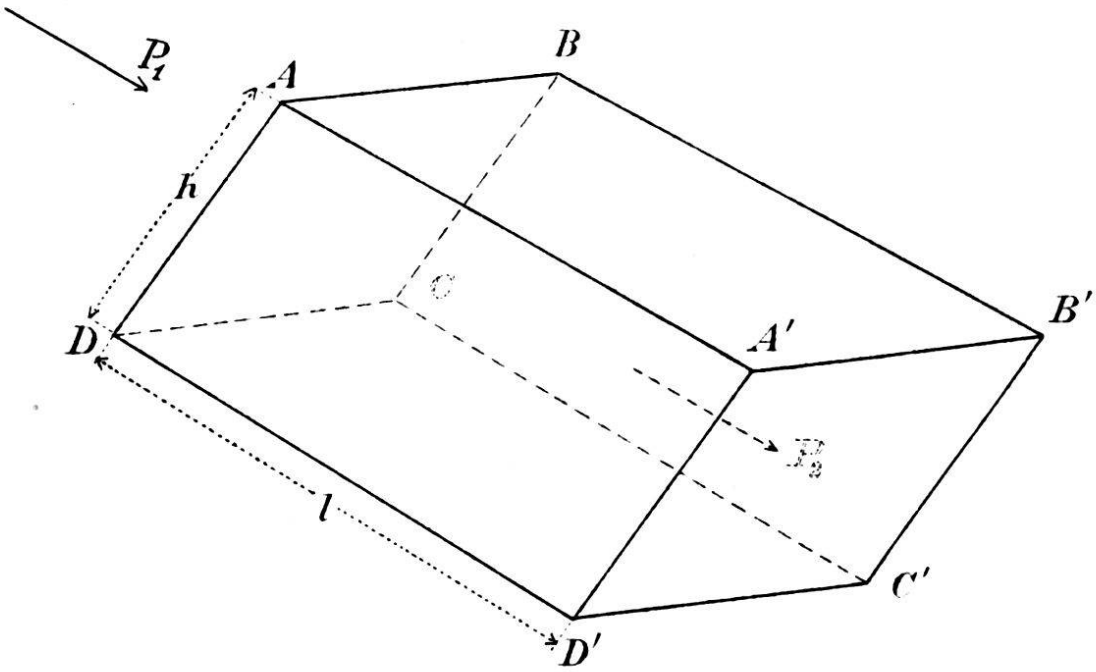


Fig. 5



Lith. J. Chappuis, Lausanne

nues jusqu'à présent, comme les coefficients de frottement, l'épaisseur du glacier, etc. La formule (25) simplifiée et la formule (36) paraissent devoir être les plus propres à une telle application.

Nous ne nous faisons cependant pas d'illusion; comme nous l'avons déjà dit, ce mémoire est un premier essai sur la théorie mathématique du mouvement des glaciers, et comme tel, il ne peut être que très imparfait, étant donné le peu de connaissances que l'on possède sur la matière. Il peut cependant devenir le point de départ de nouvelles études qui donneront la clef d'une théorie exacte du mouvement des glaciers. Pour arriver à ce résultat, vu la difficulté de ces études, il faudrait la coopération de beaucoup de forces. Les recherches et observations isolées des glaciologistes peuvent sans doute augmenter la liste des connaissances acquises, mais elles n'arriveront que très lentement et très partiellement à des découvertes certaines; il faudrait un concours d'études raisonnées faites simultanément en plusieurs points et sur plusieurs glaciers et névés. Le C. A. S. est le mieux placé pour cela et il serait fort à désirer qu'il continuât au moins les études commencées sur le glacier du Rhône et qu'il prît en mains les travaux qui seuls pourront permettre d'appliquer et de vérifier ou de corriger les formules que nous venons de donner, la phase de crue qui se prépare devant fournir des observations qui se prêteront mieux à cette application. Nous comptons sur des voix autorisées pour soutenir son ardeur et son zèle pour une cause d'un si grand intérêt pour la science moderne.