Zeitschrift: Bulletin de la Société Vaudoise des Sciences Naturelles
Herausgeber: Société Vaudoise des Sciences Naturelles
Band: 24 (1888)
Heft: 99

Artikel: Fonctions abéliennes du genre 3 : un cas particulier
Autor: Amstein, H.
Kapitel: Détermination[s]
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-261785

Si $\sqrt{x_1}$, $\sqrt{\xi_1}$; $\sqrt{x_2}$, $\sqrt{\xi_2}$ sont deux couples de fonctions abéliennes appartenant au même groupe, c'est-à-dire satisfaisant à la condition

$$(\sqrt{x_1\xi_1}) = (\sqrt{x_2\xi_2}),$$

une fonction de la forme

$$\sqrt{\Psi} = a_1 \sqrt{x_1 \xi_1} + a_2 \sqrt{x_2 \xi_2},$$

où a_1 et a_2 désignent des constantes, a été appelée par M. W. (p. 114) une *fonction-racine (Wurzelfunction)* du 2^d degré et du 2^d ordre. Sa caractéristique est $(\sqrt{\Psi}) = (\sqrt{x_1 \xi_1})$ et elle possède quatre zéros du premier ordre dont un est arbitraire. Les constantes a_1, a_2 peuvent être déterminées de manière que $\sqrt{\Psi}$ s'annule en un des zéros α, β d'une fonction abélienne $\sqrt{q}$, par exemple en α. M. Weber démontre (p. 116 et suiv.) qu'alors les trois autres zéros c_1, c_2, c_3 de cette fonction $\sqrt{\Psi}$ sont en même temps les zéros de la fonction $\vartheta_{(\omega)}\left(\int_\alpha^\zeta du_h\right)$, à la condition toutefois que $(\omega) = (\sqrt{\Psi}) + (\sqrt{q})$. Lorsque (ω) est une caractéristique impaire, $\sqrt{\Psi}$ dégénère en un produit de deux fonctions abéliennes aux caractéristiques $(\sqrt{q})$ et $(\sqrt{\Psi}) + (\sqrt{q})$. Il s'ensuit, conformément à ce qui a été dit précédemment, qu'une fonction $\vartheta_{(\omega)}\left(\int_\alpha^\zeta du_h\right)$ impaire s'annule pour $\zeta = \alpha$ et en outre pour les zéros de la fonction abélienne qui porte la même caractéristique.

Détermination de c^o_1, c^o_2, c^o_3.

Parmi les 36 systèmes de points c_1, c_2, c_3, répondant aux 36 caractéristiques paires, il en est un qui mérite une attention spéciale. C'est celui qui représente les zéros du ϑ fondamental $\vartheta\left(\int_\alpha^\zeta du_h\right)$. Il correspond à $(\omega) = \binom{000}{000}$, soit $(\sqrt{\Psi}) = (\sqrt{q})$ et sera désigné par c^o_1, c^o_2, c^o_3. On peut le trouver de la manière suivante :

On choisira pour $\sqrt{q}$ la fonction $\sqrt{x_1} = \sqrt{s-1}$, en sorte que les intégrales qui entrent comme arguments dans les fonctions ϑ ont toutes pour limite inférieure le point $z=0, s=1$. Ensuite on établira le groupe

$$(\sqrt{q}) = (\sqrt{x_1}) = \binom{100}{100} = \underset{\xi_3}{\underline{\binom{010}{110}}} + \underset{\xi_5}{\underline{\binom{110}{010}}} = \underset{\gamma^0_2}{\underline{\binom{010}{111}}} + \underset{\gamma'_1}{\underline{\binom{110}{011}}} = \underset{x_3}{\underline{\binom{001}{101}}} + \underset{x_5}{\underline{\binom{101}{001}}} =$$

$$= \underset{\gamma^0_1}{\underline{\binom{001}{111}}} + \underset{\gamma'_2}{\underline{\binom{101}{}}} = \underset{\gamma''_3}{\underline{\binom{111}{010}}} + \underset{g}{\underline{\binom{011}{110}}} = \underset{g''}{\underline{\binom{111}{001}}} + \underset{\gamma_3}{\underline{\binom{011}{101}}}$$

On peut alors poser

$$\sqrt{\Psi} = \sqrt{x_3 x_5} + a\sqrt{\xi_3 \xi_5}$$

à la condition que l'équation

$$\sqrt{x_3 \xi_3} + \sqrt{x_5 \xi_5} + \sqrt{x_1 \xi_1} = 0$$

soit identique, à un facteur constant près, à $s^4 + z^4 - 1 = 0$. Or, on voit aisément qu'à cet effet il suffit d'admettre

$$x_1 = s-1, \qquad x_3 = z-i, \qquad x_5 = s-\varepsilon' z,$$
$$\xi_1 = -\varepsilon'(s+1), \qquad \xi_3 = \varepsilon(z+i), \qquad \xi_5 = \varepsilon(s+\varepsilon' z)$$

et en conséquence

$$\sqrt{\Psi} = \sqrt{(z-i)(s-\varepsilon' z)} + a\sqrt{i(z+i)(s+\varepsilon' z)}.$$

Afin de pouvoir utiliser directement les formules finales de M. W. (p. 118 et 119), à savoir :

$$(1) \qquad x_1 - \lambda\xi_2 = 0, \quad x_2 - \lambda\xi_1 = 0, \quad \xi_3 = 0$$

$$(2) \qquad \begin{cases} x_1 x_2 = \lambda''^2 \xi_1 \xi_2 \\ 2\lambda'' \xi_1 \xi_2 = x_1 \xi_1 + x_2 \xi_2 - x_3 \xi_3 \end{cases}$$

on remplacera $\dfrac{x_1, \quad x_2, \quad \xi_1, \quad \xi_2, \quad x_3, \quad \xi_3}{x_3, \quad x_5, \quad \xi_3, \quad \xi_5, \quad \xi_1, \quad x_1}$.
par

Par là, ces équations prennent la forme

$$(1^a) \qquad \begin{cases} x_3 - \lambda\xi_5 = z - i - \lambda\varepsilon(s+\varepsilon' z) = 0 \\ x_5 - \lambda\xi_3 = s - \varepsilon' z - \lambda\varepsilon(z+i) = 0 \\ x_1 = s - 1 = 0 \end{cases}$$

$$(2^a) \qquad \begin{cases} x_3 x_5 = \lambda''^2 \xi_3 \xi_5 \\ 2\lambda'' \xi_3 \xi_5 = x_3 \xi_3 + x_5 \xi_5 - x_1 \xi_1. \end{cases}$$

Les équations (1^a) déterminent les deux valeurs de λ, λ' et λ'' qui correspondent aux zéros de $\sqrt{x_1}$. Mais dans le cas actuel ces deux valeurs sont égales; par conséquent l'élimination de s et z entre ces trois équations devient superflue. En effet, en faisant $z=0$, $s=1$ dans l'équation

$$z-i-\lambda\varepsilon(s+\varepsilon' z)=0,$$

on en tire

$$\lambda=\lambda'=\lambda''=a=-\frac{i}{\varepsilon}=-\varepsilon.$$

La valeur de λ'' introduite dans (2^a), ces équations deviennent

(3) $$z(s+\varepsilon)=0,$$

(4) $$\sqrt{2}s^2-2\varepsilon' sz+i\sqrt{2}(\sqrt{2}+1)z^2-2\varepsilon s-2z+i\sqrt{2}=0.$$

Géométriquement, l'équation (3) représente deux lignes droites et l'équation (4) une conique. Les coordonnées de leurs points d'intersection sont les valeurs cherchées. En rejetant la solution $z=0$, $s=1$, on trouve aisément

$$c^\circ_1 : z = i\sqrt[4]{2},\ s=-\varepsilon,\ \text{nappe III},$$

$$c^\circ_2 : z = -i\sqrt[4]{2},\ s=-\varepsilon,\ \text{»}\ \text{IV},$$

$$c^\circ_3 : z = 0,\ s=i,\ \text{»}\ \text{II}.$$

Détermination de quelques autres systèmes c_1, c_2, c_3.

Il ne peut pas être question ici de déterminer tous les 36 systèmes de points c_1, c_2, c_3. Quelques exemples suffiront, et on donnera la préférence à ceux qui n'exigent pas des calculs trop compliqués. D'ailleurs, le procédé employé étant toujours le même, les calculs suivants peuvent se passer de commentaire.

$$\vartheta_{\binom{100}{000}}\left(\int_0^{\varsigma} du_h\right).$$

Dans ce cas

$$(\omega)=\binom{100}{000},\ (\sqrt{q})=\binom{100}{100},\ (\sqrt{\Psi})=(\omega)+(\sqrt{q})=\binom{000}{100}.$$

Le groupe

$$\binom{000}{100} = \underbrace{\binom{010}{010}}_{\xi_6} + \underbrace{\binom{010}{110}}_{\xi_3} = \underbrace{\binom{010}{011}}_{\gamma''_1} + \underbrace{\binom{010}{111}}_{\gamma^\circ_2} = \underbrace{\binom{001}{001}}_{x_6} + \underbrace{\binom{001}{101}}_{x_3} = \underbrace{\binom{001}{011}}_{\gamma''_2} +$$

$$+ \underbrace{\binom{001}{111}}_{\gamma^\circ_1} = \underbrace{\binom{011}{010}}_{\gamma'_3} + \underbrace{\binom{011}{110}}_{g} = \underbrace{\binom{011}{001}}_{g'} + \underbrace{\binom{011}{101}}_{\gamma_3}$$

permet de poser

$$\sqrt{\Psi} = \sqrt{x_3 x_6} + a\sqrt{\xi_3 \xi_6},$$

$$\sqrt{x_3 \xi_3} + \sqrt{x_6 \xi_6} + \sqrt{x_1 \xi_1} = 0,$$

où

$$x_3 = z - i, \qquad x_6 = s + \varepsilon z, \qquad x_1 = s - 1,$$

$$\xi_3 = \varepsilon'(z + i), \quad \xi_6 = \varepsilon'(s - \varepsilon z), \quad \xi_1 = -\varepsilon(s + 1).$$

Les trois équations de M. W.

$$x_1 - \lambda \xi_2 = 0, \quad \left\{ \begin{aligned} x_1 x_2 &= \lambda''^2 \xi_1 \xi_2, \\ 2\lambda'' \xi_1 \xi_2 &= x_1 \xi_1 + x_2 \xi_2 - x_3 \xi_3 \end{aligned} \right.$$

deviennent

$$x_3 - \lambda \xi_6 = z - i - \lambda \varepsilon'(s - \varepsilon z) = 0,$$

$$x_3 x_6 = \lambda''^2 \xi_3 \xi_6,$$

$$2\lambda'' \xi_3 \xi_6 = x_3 \xi_3 + x_6 \xi_6 - x_1 \xi_1.$$

De la première on tire pour $z = 0$, $s = 1$ la valeur

$$\lambda' = \lambda'' = a = \varepsilon'$$

et les deux autres, après simplification, prennent la forme

$$z(s + \varepsilon') = 0,$$

$$(1 + i)s^2 + 2isz + (1 - i + 2\varepsilon')z^2 - 2s + 2\varepsilon z + 1 - i = 0.$$

En les résolvant on obtient

$$c_1 : z = 0, \qquad s = -i, \quad \text{nappe IV},$$

$$c_2 : z = i\sqrt[4]{2}, \quad s = -\varepsilon', \quad \text{» I},$$

$$c_3 : z = -i\sqrt[4]{2}, \quad s = -\varepsilon', \quad \text{» III}.$$

$$\vartheta_{\binom{010}{101}}\left(\int_0^{\zeta} du_h\right).$$

Dans ce cas

$$(\sqrt{\Psi}) = (\sqrt{q}) + (\omega) = \binom{100}{100} + \binom{010}{101} = \binom{110}{001},$$

$$\sqrt{\Psi} = \sqrt{x_2 x_3} + a\sqrt{\xi_2 \xi_3},$$

$$\sqrt{x_2 \xi_2} \quad + \sqrt{x_3 \xi_3} \quad + \sqrt{x_1 \xi_1} = 0,$$

$$x_1 = s - 1, \quad x_2 = \frac{1}{2}(z+1), \quad x_3 = -\frac{1}{2}(z-i),$$

$$\xi_1 = s+1, \quad \xi_2 = z-1, \quad \xi_3 = z+i.$$

L'équation

$$x_2 - \lambda \xi_3 = \frac{1}{2}(z+1) - \lambda(z+i) = 0$$

donne pour $z=0$,

$$\lambda = \lambda' = \lambda'' = a = -\frac{1}{2}i$$

et des équations

$$0.z^2 + 2(1-i)z = 0$$
$$s^2 - iz^2 + (1+i)z - 1 = 0$$

on tire

$$c_1 : z = 0, \quad s = -1, \quad \text{nappe III},$$

$$c_2 : z = \infty, \quad \frac{s}{z} = \varepsilon, \quad \text{» I},$$

$$c_3 : z = \infty, \quad \frac{s}{z} = -\varepsilon, \quad \text{» III}.$$

$$\vartheta_{\binom{011}{111}}\left(\int_0^{\zeta} du_h\right).$$

Ici $\quad (\sqrt{\Psi}) = (\sqrt{q}) + (\omega) = \binom{100}{100} + \binom{011}{111} = \binom{111}{011},$

$$\sqrt{\Psi} = \sqrt{x_5 \xi_6} + a\sqrt{x_6 \xi_5},$$

$$\sqrt{x_5 \xi_5} \quad + \sqrt{x_6 \xi_6} + \sqrt{x_1 \xi_1} = 0,$$

$$x_5 = s - \varepsilon' z, \qquad x_6 = s + \varepsilon z, \qquad x_1 = s - 1,$$

$$\xi_5 = \frac{1}{2}i(s+\varepsilon' z), \quad \xi_6 = \frac{1}{2}i(s - \varepsilon z), \quad \xi_1 = i(s+1).$$

L'équation

$$x_5 - \lambda x_6 = s - \varepsilon' z - \lambda(s + \varepsilon z) = 0$$

fournit pour $z = 0$, $s = 1$ la valeur

$$\lambda = \lambda' = \lambda'' = a = 1$$

et les deux équations

$$sz = 0,$$
$$s^2 + \sqrt{2}sz + z^2 - 1 = 0,$$

donnent

$c_1 : z = 0, \quad s = -1,$ nappe III,

$\left.\begin{array}{l} c_2 : z = 1, \quad s = 0 \\ c_3 : z = -1, \quad s = 0 \end{array}\right\}$ toutes les quatre nappes.

$$\vartheta_{\binom{101}{101}}\left(\int_0^{\varsigma} du_h\right).$$

Dans ce cas on a

$$(\sqrt{\Psi}) = (\sqrt{q}) + (\omega) = \binom{100}{100} + \binom{101}{101} = \binom{001}{001},$$
$$\sqrt{\Psi} = \sqrt{x_4\xi_2} + a\sqrt{x_2\xi_4},$$
$$\sqrt{x_2\xi_2} + \sqrt{x_4\xi_4} + \sqrt{x_1\xi_1} = 0,$$
$$x_2 = z + 1, \quad x_4 = s + i, \qquad x_1 = s - 1,$$
$$\xi_2 = z - 1, \quad \xi_4 = -\frac{1}{2}(s - i), \quad \xi_1 = \frac{1}{2}(s + 1).$$

De l'équation

$$x_4 - \lambda x_2 = s + i - \lambda(z + 1) = 0$$

il suit pour $z = 0$, $s = 1$:

$$\lambda = \lambda' = \lambda'' = a = 1 + i.$$

Les deux coniques deviennent

$$sz + is + z - i = 0,$$
$$s^2 - (1 + i)sz - z^2 - (1 + i)s - (1 - i)z + i = 0.$$

Elles se coupent au point $z=0$, $s=1$ et en outre dans les trois points

$$c_1: z=i, \qquad s=0 \text{ dans les 4 nappes,}$$

$$c_2: z=\frac{-i+\sqrt{7}}{2}, \; s=\frac{-1+i\sqrt{7}}{2}, \text{ nappe II,}$$

$$c_3: z=\frac{-i-\sqrt{7}}{2}, \; s=\frac{-1-i\sqrt{7}}{2} \qquad \text{»} \quad \text{I.}$$

$$\vartheta_{\binom{001}{110}}\Big(\int_0^s du_h\Big).$$

Ici $$(\sqrt{\Psi})=(\sqrt{q})+(\omega)=\binom{100}{100}+\binom{001}{110}=\binom{101}{010},$$

$$\sqrt{\Psi}=\sqrt{x_2\xi_3}+a\sqrt{x_3\xi_2},$$

$$\sqrt{x_2\xi_2}+\sqrt{x_3\xi_3}+\sqrt{x_1\xi_1}=0,$$

$$x_2=z+1, \qquad x_3=z-i, \qquad x_1=s-1,$$

$$\xi_2=\frac{1}{2}(z-1), \quad \xi_3=-\frac{1}{2}(z+i), \quad \xi_1=s+1.$$

De l'équation

$$x_2-\lambda x_3=z+1-\lambda(z-i)=0$$

on tire pour $z=0$

$$\lambda=\lambda'=\lambda''=a=i$$

et les coniques

$$0.z^2+2(1+i)z=0,$$

$$s^2+iz^2+(1-i)z-1=0$$

se coupent bien en $z=0$, $s=1$ et de plus en

$$c_1: z=0, \quad s=-1, \text{ nappe III,}$$

$$c_2: z=\infty, \quad \frac{s}{z}=\varepsilon', \qquad \text{»} \quad \text{IV,}$$

$$c_3: z=\infty, \quad \frac{s}{z}=-\varepsilon', \qquad \text{»} \quad \text{II.}$$