Zeitschrift: Bulletin de la Société Vaudoise des Sciences Naturelles
Herausgeber: Société Vaudoise des Sciences Naturelles
Band: 24 (1888)
Heft: 99

Artikel: Fonctions abéliennes du genre 3 : un cas particulier
Autor: Amstein, H.
Kapitel: Vérification[s]
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-261785

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 12.01.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

Dans la théorie des fonctions abéliennes, on a rarement l'occasion de vérifier une formule générale par le calcul direct. Aussi la saisit-on volontiers, lorsque, comme c'est ici le cas, elle se présente tout naturellement. En effet, on est maintenant en état de vérifier la formule II, p. 114 de l'ouvrage de M. Weber, à savoir

$$\left(\overset{3}{\underset{1}{h}}\left(\int_{\alpha}^{\alpha'} du_{\mathrm{h}} + \int_{\beta}^{\beta'} du_{\mathrm{h}}\right)\right) = \left(\frac{1}{2}\omega_1,\ \frac{1}{2}\omega_2,\ \frac{1}{2}\omega_3\right),$$

où α, β sont les zéros d'une fonction abélienne $\sqrt{x}$, α', β' les zéros d'une autre fonction abélienne $\sqrt{x'}$ et ω_1, ω_2, ω_3 un système de périodes à la caractéristique $(\omega) = (\sqrt{x}) + (\sqrt{x'})$.

Vérification pour $\sqrt{g^\circ}\ \sqrt{g}$.

Dans ce cas

$$(\omega) = (\sqrt{g^\circ}) + (\sqrt{g}) = \binom{100}{101} + \binom{011}{110} = \binom{111}{011},$$

$$\frac{1}{2}\omega_1 = \frac{1}{2}a_{11} + \frac{1}{2}a_{12} + \frac{1}{2}a_{13} = -\frac{1}{5}\pi(2-i) -$$
$$-\frac{\pi i}{10}(3+i) + \frac{1}{10}\pi(3+i) = 0$$

$$\frac{1}{2}\omega_2 = \frac{1}{2}a_{21} + \frac{1}{2}a_{22} + \frac{1}{2}a_{23} + \frac{1}{2}\pi i = -\frac{1}{10}\pi i(3+i) -$$
$$-\frac{2}{10}\pi(2-i) - \frac{1}{10}\pi(2-i) + \frac{1}{2}\pi i = -\frac{1}{2}\pi + \frac{1}{2}\pi i$$

$$\frac{1}{2}\omega_3 = \frac{1}{2}a_{31} + \frac{1}{2}a_{32} + \frac{1}{2}a_{33} + \frac{1}{2}\pi i = \frac{1}{10}\pi(3+i) -$$
$$-\frac{1}{10}\pi(2-i) - \frac{2}{10}\pi(3+i) + \frac{1}{2}\pi i = -\frac{1}{2}\pi + \frac{1}{2}\pi i$$

et

$$\mathrm{V_h} = \int_{\mathrm{III}\, e^{\frac{7}{12}\pi i}}^{\mathrm{III}\, e^{-\frac{5}{12}\pi i}} du_h + \int_{\mathrm{II}\, e^{-\frac{1}{12}\pi i}}^{\mathrm{II}\, e^{\frac{11}{12}\pi i}} du_{\mathrm{h}}.$$

Or, il est à remarquer qu'il ne serait pas exact d'écrire

$$\int_{\mathrm{III}\, e^{\frac{7}{12}\pi i}}^{\mathrm{III}\, e^{-\frac{5}{12}\pi i}} = \int_{\mathrm{III}\, 0}^{e^{-\frac{5}{12}\pi i}} - \int_{\mathrm{III}\, 0}^{e^{\frac{7}{12}\pi i}},$$

vu que les limites inférieures, 0, dans la surface de Riemann adoptée, ne coïncident pas, mais sont séparées par des lignes de passage. Cette remarque s'applique également à $\int_{\mathrm{II}\, e^{-\frac{1}{12}\pi i}}^{\mathrm{II}\, e^{\frac{11}{12}\pi i}} du_{\mathrm{h}}$ et, en général, à toutes les intégrales de ce genre. Voici comment on peut procéder. On fera décrire à la variable z une ligne continue, partant de la limite inférieure $e^{\frac{7}{12}\pi i}$ dans la 3me nappe et allant d'abord jusqu'à 0, puis de 0 à $+1$. Arrivé en $+1$, z contournera ce point un certain nombre de fois jusqu'à ce qu'il arrive dans la nappe voulue, ce qui est permis, attendu que les intégrales relatives à ces courbes infiniment petites sont négligeables. Ensuite z ira de $+1$ à 0 et enfin de 0 à la limite supérieure $e^{-\frac{5}{12}\pi i}$. De cette manière on obtient

$$V_1 = \int_{\mathrm{III}\, e^{\frac{7}{12}\pi i}}^{0} du_1 + \int_{\mathrm{IV}\, 0}^{1} du_1^{(-)} + \int_{\mathrm{III}\, 1}^{0} du_1^{(+)} + \int_{\mathrm{III}\, 0}^{e^{-\frac{5}{12}\pi i}} du_1 +$$

$$+ \int_{\mathrm{II}\, e^{-\frac{1}{12}\pi i}}^{0} du_1 + \int_{\mathrm{II}\, 0}^{1} du_1^{(+)} + \int_{\mathrm{III}\, 1}^{0} du_1^{(-)} + \int_{\mathrm{II}\, 0}^{e^{\frac{11}{12}\pi i}} du_1 =$$

$$= [\int_{\mathrm{III}\, 0}^{e^{-\frac{5}{12}\pi i}} du_1 + \int_{\mathrm{II}\, 0}^{e^{\frac{11}{12}\pi i}} du_1] - [\int_{\mathrm{III}\, 0}^{e^{\frac{7}{12}\pi i}} du_1 + \int_{\mathrm{II}\, 0}^{e^{-\frac{1}{12}\pi i}} du_1] +$$

$$+ \int_{\mathrm{IV}\, 0}^{1} du_1^{(-)} - \int_{\mathrm{III}\, 0}^{1} du_1^{(+)} + \int_{\mathrm{II}\, 0}^{1} du_1^{(+)} - \int_{\mathrm{III}\, 0}^{1} du_1^{(-)} =$$

$$= -\frac{1}{20}\pi i(7-i) + \frac{1}{20}\pi(3+i) + 0 - \frac{1}{10}\pi(2-i) -$$

$$-\frac{1}{20}\pi(3+i) - \frac{1}{20}\pi i(3+i) = -\frac{1}{5}\pi - \frac{2}{5}\pi i$$

et de même

$$V_2 = \frac{3}{10}\pi - \frac{9}{10}\pi i, \quad V_3 = -\frac{1}{10}\pi + \frac{3}{10}\pi i.$$

Les valeurs trouvées peuvent s'écrire

$$\begin{aligned} V_1 &= \underline{-\frac{1}{5}\pi - \frac{2}{5}\pi i}, \\ V_2 &= -\frac{1}{2}\pi + \frac{1}{2}\pi i \underline{+\frac{4}{5}\pi - \frac{7}{5}\pi i}, \\ V_3 &= -\frac{1}{2}\pi + \frac{1}{2}\pi i \underline{+\frac{2}{5}\pi - \frac{1}{5}\pi i}. \end{aligned}$$

La formule en question est vérifiée si dans les trois intégrales les expressions soulignées forment un système de périodes. On peut donc poser, en supprimant le facteur π

$$\begin{aligned} -\frac{1}{5} - \frac{2}{5}i &= m_1 i + \frac{1}{\pi}(aa_{11} + ba_{12} + ca_{13}) = \\ &= m_1 i - \frac{2}{5}(2-i)\,a - \frac{1}{5}i(3+i)\,b + \frac{1}{5}(3+i)\,c, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{4}{5} - \frac{7}{5}i &= m_2 i + \frac{1}{\pi}(aa_{21} + ba_{22} + ca_{23}) = \\ &= m_2 i - \frac{1}{5}i(3+i)\,a - \frac{2}{5}(2-i)\,b - \frac{1}{5}(2-i)\,c, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{2}{5} - \frac{1}{5}i &= m_3 i + \frac{1}{\pi}(aa_{31} + ba_{32} + ca_{33}) = \\ &= m_3 i + \frac{1}{5}(3+i)\,a - \frac{1}{5}(2-i)\,b - \frac{2}{5}(3+i)\,c. \end{aligned}$$

Les nombres entiers a, b, c, m_1, m_2, m_3 doivent satisfaire aux six équations résultant de la séparation des parties réelles et imaginaires qui, après multiplication par 5, prennent la forme

$$\begin{array}{r|l} -1 = -4a + b + 3c & -2 = m_1 + 2a - 3b + c, \\ 4 = a - 4b - 2c & -7 = m_2 - 3a + 2b + c, \\ 2 = 3a - 2b - 6c & -1 = m_3 + a + b - 2c. \end{array}$$

On en tire

$$a = 0, \quad b = -1, \quad c = 0,$$
$$m_1 = -5, \quad m_2 = -5, \quad m_3 = 0.$$

Vérification pour $\sqrt{g^0}\sqrt{g'}$.

On trouve successivement

$$(\omega) = (\sqrt{g^0}) + (\sqrt{g'}) = \binom{100}{101} + \binom{011}{001} = \binom{111}{100},$$

$$\frac{1}{2}\omega_1 = \frac{1}{2}\pi i, \quad \frac{1}{2}\omega_2 = -\frac{1}{2}\pi, \quad \frac{1}{2}\omega_3 = -\frac{1}{2}\pi,$$

$$V_1 = \int_{\mathrm{II}}^{\mathrm{IV}} {}_{e^{-\frac{1}{12}\pi i}}^{e^{\frac{7}{12}\pi i}} du_1 + \int_{\mathrm{III}}^{\mathrm{III}} {}_{e^{\frac{7}{12}\pi i}}^{e^{-\frac{1}{12}\pi i}} du_1 = [\int_{\mathrm{IV}} {}_0^{e^{\frac{7}{12}\pi i}} du_1 + \int_{\mathrm{III}} {}_0^{e^{-\frac{1}{12}\pi i}} du_1] -$$

$$-[\int_{\mathrm{II}} {}_0^{e^{-\frac{1}{12}\pi i}} du_1 + \int_{\mathrm{III}} {}_0^{e^{\frac{7}{12}\pi i}} du_1] + \int_{\mathrm{IV}} {}_0^1 du_1^{(-)} - \int_{\mathrm{III}} {}_0^1 du_1^{(+)} =$$

$$= \frac{1}{4}\pi(1-i) + \frac{1}{20}\pi(3+i) + 0 - \frac{1}{10}\pi(2-i) = \frac{1}{5}\pi - \frac{1}{10}\pi i,$$

$$V_1 = \frac{1}{5}\pi - \frac{1}{10}\pi i = \frac{1}{2}\pi i + \underline{\frac{1}{5}\pi - \frac{3}{5}\pi i},$$

$$V_2 = -\frac{3}{10}\pi - \frac{3}{5}\pi i = -\frac{1}{2}\pi + \underline{\frac{1}{5}\pi - \frac{3}{5}\pi i},$$

$$V_3 = \frac{1}{10}\pi + \frac{1}{5}\pi i = -\frac{1}{2}\pi + \underline{\frac{3}{5}\pi + \frac{1}{5}\pi i},$$

$1 = -4a + b + 3c$	$-3 = m_1 + 2a - 3b + c$	$a = -1$	$m_1 = 0$
$1 = a - 4b - 2c$	$-3 = m_2 - 3a + 2b + c$	$b = 0$	$m_2 = -5$
$3 = 3a - 2b - 6c$	$1 = m_3 + a + b - 2c$	$c = -1$	$m_3 = 0$

Vérification pour $\sqrt{g^0}\,\sqrt{g''}$.

Il vient

$$(\omega) = (\sqrt{g^0}) + (\sqrt{g''}) = \binom{100}{101} + \binom{111}{001} = \binom{011}{100},$$

$$\frac{1}{2}\omega_1 = \frac{2}{5}\pi + \frac{3}{10}\pi i\,,\quad \frac{1}{2}\omega_2 = -\frac{3}{5}\pi + \frac{3}{10}\pi i,$$

$$\frac{1}{2}\omega_3 = = -\frac{4}{5}\pi - \frac{1}{10}\pi i,$$

$$V_1 = \int_{\mathrm{III}\,e^{\frac{7}{12}\pi i}}^{\mathrm{III}\,e^{\frac{11}{12}\pi i}} du_1 + \int_{\mathrm{II}\,e^{-\frac{1}{12}\pi i}}^{\mathrm{IV}\,e^{-\frac{5}{12}\pi i}} du_1 = [\int_{\mathrm{III}\,0}^{e^{\frac{11}{12}\pi i}} du_1 + \int_{\mathrm{IV}\,0}^{e^{-\frac{5}{12}\pi i}} du_1] -$$

$$-[\int_{\mathrm{III}\,0}^{e^{\frac{7}{12}\pi i}} du_1 + \int_{\mathrm{II}\,0}^{e^{-\frac{1}{12}\pi i}} du_1] + \int_{\mathrm{II}\,0}^{1} du_1^{(+)} - \int_{\mathrm{IV}\,0}^{1} du_1^{(+)} =$$

$$= \frac{1}{20}\pi(3+i) + \frac{1}{20}\pi(3+i) - \frac{1}{20}\pi(3+i) - \frac{1}{20}\pi i(3+i) =$$

$$= \frac{1}{5}\pi - \frac{1}{10}\pi i\,,$$

$$V_1 = \frac{1}{5}\pi - \frac{1}{10}\pi i = \frac{2}{5}\pi + \frac{3}{10}\pi i - \underline{\frac{1}{5}\pi - \frac{2}{5}\pi i},$$

$$V_2 = \frac{1}{5}\pi - \frac{1}{10}\pi i = -\frac{3}{5}\pi + \frac{3}{10}\pi i + \underline{\frac{4}{5}\pi - \frac{2}{5}\pi i},$$

$$V_3 = -\frac{2}{5}\pi - \frac{3}{10}\pi i = -\frac{4}{5}\pi - \frac{1}{10}\pi i + \underline{\frac{2}{5}\pi - \frac{1}{5}\pi i},$$

$-1 = -4a + b + 3c$	$-2 = m_1 + 2a - 3b + c$	$a = 0$	$m_1 = -5$
$4 = a - 4b - 2c$	$-2 = m_2 - 3a + 2b + c$	$b = -1$	$m_2 = 0$
$2 = 3a - 2b - 6c$	$-1 = m_3 + a + b - 2c$	$c = 0$	$m_3 = 0$

Si $\sqrt{x_1}$, $\sqrt{\xi_1}$; $\sqrt{x_2}$, $\sqrt{\xi_2}$ sont deux couples de fonctions abéliennes appartenant au même groupe, c'est-à-dire satisfaisant à la condition

$$(\sqrt{x_1\xi_1}) = (\sqrt{x_2\xi_2}),$$

une fonction de la forme

$$\sqrt{\Psi} = a_1\sqrt{x_1\xi_1} + a_2\sqrt{x_2\xi_2},$$

où a_1 et a_2 désignent des constantes, a été appelée par M. W. (p. 114) une *fonction-racine (Wurzelfunction)* du 2d degré et du 2d ordre. Sa caractéristique est $(\sqrt{\Psi}) = (\sqrt{x_1\xi_1})$ et elle possède quatre zéros du premier ordre dont un est arbitraire. Les constantes a_1, a_2 peuvent être déterminées de manière que $\sqrt{\Psi}$ s'annule en un des zéros α, β d'une fonction abélienne $\sqrt{q}$, par exemple en α. M. Weber démontre (p. 116 et suiv.) qu'alors les trois autres zéros c_1, c_2, c_3 de cette fonction $\sqrt{\Psi}$ sont en même temps les zéros de la fonction $\vartheta_{(\omega)}\left(\int_\alpha^\zeta du_h\right)$, à la condition toutefois que $(\omega) = (\sqrt{\Psi}) + (\sqrt{q})$. Lorsque (ω) est une caractéristique impaire, $\sqrt{\Psi}$ dégénère en un produit de deux fonctions abéliennes aux caractéristiques $(\sqrt{q})$ et $(\sqrt{\Psi})+(\sqrt{q})$. Il s'ensuit, conformément à ce qui a été dit précédemment, qu'une fonction $\vartheta_{(\omega)}\left(\int_\alpha^\zeta du_h\right)$ impaire s'annule pour $\zeta = \alpha$ et en outre pour les zéros de la fonction abélienne qui porte la même caractéristique.

Détermination de c^0_1, c^0_2, c^0_3.

Parmi les 36 systèmes de points c_1, c_2, c_3, répondant aux 36 caractéristiques paires, il en est un qui mérite une attention spéciale. C'est celui qui représente les zéros du ϑ fondamental $\vartheta\left(\int_\alpha^\zeta du_h\right)$. Il correspond à $(\omega) = \binom{000}{000}$, soit $(\sqrt{\Psi}) = (\sqrt{q})$ et sera désigné par c^0_1, c^0_2, c^0_3. On peut le trouver de la manière suivante :