

# Vérification[s]

Objektyp: **Chapter**

Zeitschrift: **Bulletin de la Société Vaudoise des Sciences Naturelles**

Band (Jahr): **24 (1888)**

Heft 99

PDF erstellt am: **21.09.2024**

## **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

## **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Dans la théorie des fonctions abéliennes, on a rarement l'occasion de vérifier une formule générale par le calcul direct. Aussi la saisit-on volontiers, lorsque, comme c'est ici le cas, elle se présente tout naturellement. En effet, on est maintenant en état de vérifier la formule II, p. 114 de l'ouvrage de M. Weber, à savoir

$$\left( h \left( \int_{\alpha}^{\alpha'} du_h + \int_{\beta}^{\beta'} du_h \right) \right) = \left( \frac{1}{2} \omega_1, \frac{1}{2} \omega_2, \frac{1}{2} \omega_3 \right),$$

où  $\alpha, \beta$  sont les zéros d'une fonction abélienne  $\sqrt{x}$ ,  $\alpha', \beta'$  les zéros d'une autre fonction abélienne  $\sqrt{x'}$  et  $\omega_1, \omega_2, \omega_3$  un système de périodes à la caractéristique  $(\omega) = (\sqrt{x}) + (\sqrt{x'})$ .

### Vérification pour $\sqrt{g^0} \sqrt{g}$ .

Dans ce cas

$$(\omega) = (\sqrt{g^0}) + (\sqrt{g}) = \begin{pmatrix} 100 \\ 101 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 011 \\ 110 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 111 \\ 011 \end{pmatrix},$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \omega_1 &= \frac{1}{2} a_{11} + \frac{1}{2} a_{12} + \frac{1}{2} a_{13} = -\frac{1}{5} \pi (2-i) - \\ &\quad - \frac{\pi i}{10} (3+i) + \frac{1}{10} \pi (3+i) = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \omega_2 &= \frac{1}{2} a_{21} + \frac{1}{2} a_{22} + \frac{1}{2} a_{23} + \frac{1}{2} \pi i = -\frac{1}{10} \pi i (3+i) - \\ &\quad - \frac{2}{10} \pi (2-i) - \frac{1}{10} \pi (2-i) + \frac{1}{2} \pi i = -\frac{1}{2} \pi + \frac{1}{2} \pi i \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \omega_3 &= \frac{1}{2} a_{31} + \frac{1}{2} a_{32} + \frac{1}{2} a_{33} + \frac{1}{2} \pi i = \frac{1}{10} \pi (3+i) - \\ &\quad - \frac{1}{10} \pi (2-i) - \frac{2}{10} \pi (3+i) + \frac{1}{2} \pi i = -\frac{1}{2} \pi + \frac{1}{2} \pi i \end{aligned}$$

et

$$V_h = \int_{\text{III}}^{\text{III}} e^{-\frac{5}{12} \pi i} du_h + \int_{\text{II}}^{\text{II}} e^{\frac{11}{12} \pi i} du_h.$$

Or, il est à remarquer qu'il ne serait pas exact d'écrire

$$\int_{\text{III}} e^{-\frac{5}{12}\pi i} = \int_{\text{III } 0} e^{-\frac{5}{12}\pi i} - \int_{\text{III } 0} e^{\frac{7}{12}\pi i},$$

vu que les limites inférieures, 0, dans la surface de Riemann adoptée, ne coïncident pas, mais sont séparées par des lignes

de passage. Cette remarque s'applique également à  $\int_{\text{II}} \frac{e^{\frac{11}{12}\pi i}}{e^{-\frac{1}{12}\pi i}} du_h$  et,

en général, à toutes les intégrales de ce genre. Voici comment on peut procéder. On fera décrire à la variable  $z$  une ligne continue, partant de la limite inférieure  $e^{\frac{7}{12}\pi i}$  dans la 3<sup>me</sup> nappe et allant d'abord jusqu'à 0, puis de 0 à +1. Arrivé en +1,  $z$  contournera ce point un certain nombre de fois jusqu'à ce qu'il arrive dans la nappe voulue, ce qui est permis, attendu que les intégrales relatives à ces courbes infiniment petites sont négligeables. Ensuite  $z$  ira de +1 à 0 et enfin de 0 à la limite supérieure  $e^{-\frac{5}{12}\pi i}$ . De cette manière on obtient

$$\begin{aligned} V_1 &= \int_{\text{III } e^{\frac{7}{12}\pi i}}^0 du_1 + \int_{\text{IV } 0}^1 du_1^{(-)} + \int_{\text{III } 1}^0 du_1^{(+)} + \int_{\text{III } 0} e^{-\frac{5}{12}\pi i} du_1 + \\ &+ \int_{\text{II } e^{-\frac{1}{12}\pi i}}^0 du_1 + \int_{\text{II } 0}^1 du_1^{(+)} + \int_{\text{III } 1}^0 du_1^{(-)} + \int_{\text{II } 0} e^{\frac{11}{12}\pi i} du_1 = \\ &= \left[ \int_{\text{III } 0} e^{-\frac{5}{12}\pi i} du_1 + \int_{\text{II } 0} e^{\frac{11}{12}\pi i} du_1 \right] - \left[ \int_{\text{III } 0} e^{\frac{7}{12}\pi i} du_1 + \int_{\text{II } 0} e^{-\frac{1}{12}\pi i} du_1 \right] + \\ &+ \int_{\text{IV } 0}^1 du_1^{(-)} - \int_{\text{III } 0}^1 du_1^{(+)} + \int_{\text{II } 0}^1 du_1^{(+)} - \int_{\text{III } 0}^1 du_1^{(-)} = \\ &= -\frac{1}{20}\pi i(7-i) + \frac{1}{20}\pi(3+i) + 0 - \frac{1}{10}\pi(2-i) - \\ &\quad - \frac{1}{20}\pi(3+i) - \frac{1}{20}\pi i(3+i) = -\frac{1}{5}\pi - \frac{2}{5}\pi i \end{aligned}$$

et de même

$$V_2 = \frac{3}{10}\pi - \frac{9}{10}\pi i, \quad V_3 = -\frac{1}{10}\pi + \frac{3}{10}\pi i.$$

Les valeurs trouvées peuvent s'écrire

$$\begin{aligned} V_1 &= -\frac{1}{5}\pi - \frac{2}{5}\pi i, \\ V_2 &= -\frac{1}{2}\pi + \frac{1}{2}\pi i + \frac{4}{5}\pi - \frac{7}{5}\pi i, \\ V_3 &= -\frac{1}{2}\pi + \frac{1}{2}\pi i + \frac{2}{5}\pi - \frac{1}{5}\pi i. \end{aligned}$$

La formule en question est vérifiée si dans les trois intégrales les expressions soulignées forment un système de périodes. On peut donc poser, en supprimant le facteur  $\pi$

$$\begin{aligned} -\frac{1}{5} - \frac{2}{5}i &= m_1 i + \frac{1}{\pi} (aa_{11} + ba_{12} + ca_{13}) = \\ &= m_1 i - \frac{2}{5}(2-i)a - \frac{1}{5}i(3+i)b + \frac{1}{5}(3+i)c, \\ \frac{4}{5} - \frac{7}{5}i &= m_2 i + \frac{1}{\pi} (aa_{21} + ba_{22} + ca_{23}) = \\ &= m_2 i - \frac{1}{5}i(3+i)a - \frac{2}{5}(2-i)b - \frac{1}{5}(2-i)c, \\ \frac{2}{5} - \frac{1}{5}i &= m_3 i + \frac{1}{\pi} (aa_{31} + ba_{32} + ca_{33}) = \\ &= m_3 i + \frac{1}{5}(3+i)a - \frac{1}{5}(2-i)b - \frac{2}{5}(3+i)c. \end{aligned}$$

Les nombres entiers  $a, b, c, m_1, m_2, m_3$  doivent satisfaire aux six équations résultant de la séparation des parties réelles et imaginaires qui, après multiplication par 5, prennent la forme

$$\begin{array}{l|l} -1 = -4a + b + 3c & -2 = m_1 + 2a - 3b + c, \\ 4 = a - 4b - 2c & -7 = m_2 - 3a + 2b + c, \\ 2 = 3a - 2b - 6c & -1 = m_3 + a + b - 2c. \end{array}$$

On en tire

$$\begin{aligned} a &= 0, & b &= -1, & c &= 0, \\ m_1 &= -5, & m_2 &= -5, & m_3 &= 0. \end{aligned}$$

Vérification pour  $\sqrt{g^0} \sqrt{g'}$ .

On trouve successivement

$$(\omega) = (\sqrt{g^0}) + (\sqrt{g'}) = \begin{pmatrix} 100 \\ 101 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 011 \\ 001 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 111 \\ 100 \end{pmatrix},$$

$$\frac{1}{2} \omega_1 = \frac{1}{2} \pi i, \quad \frac{1}{2} \omega_2 = -\frac{1}{2} \pi, \quad \frac{1}{2} \omega_3 = -\frac{1}{2} \pi,$$

$$V_1 = \int_{\text{II}}^{\text{IV}} \frac{e^{\frac{7}{12} \pi i}}{e^{-\frac{1}{12} \pi i}} du_1 + \int_{\text{III}}^{\text{III}} \frac{e^{-\frac{1}{12} \pi i}}{e^{\frac{7}{12} \pi i}} du_1 = \left[ \int_{\text{IV}}^{\text{IV}} e^{\frac{7}{12} \pi i} du_1 + \int_{\text{III}}^{\text{III}} e^{-\frac{1}{12} \pi i} du_1 \right] -$$

$$- \left[ \int_{\text{II}}^{\text{II}} e^{-\frac{1}{12} \pi i} du_1 + \int_{\text{III}}^{\text{III}} e^{\frac{7}{12} \pi i} du_1 \right] + \int_{\text{IV}}^1 du_1^{(-)} - \int_{\text{III}}^1 du_1^{(+)} =$$

$$= \frac{1}{4} \pi (1 - i) + \frac{1}{20} \pi (3 + i) + 0 - \frac{1}{10} \pi (2 - i) = \frac{1}{5} \pi - \frac{1}{10} \pi i,$$

$$V_1 = \frac{1}{5} \pi - \frac{1}{10} \pi i = \frac{1}{2} \pi i + \frac{1}{5} \pi - \frac{3}{5} \pi i,$$

$$V_2 = -\frac{3}{10} \pi - \frac{3}{5} \pi i = -\frac{1}{2} \pi + \frac{1}{5} \pi - \frac{3}{5} \pi i,$$

$$V_3 = \frac{1}{10} \pi + \frac{1}{5} \pi i = -\frac{1}{2} \pi + \frac{3}{5} \pi + \frac{1}{5} \pi i,$$

$$\begin{array}{l|l|l|l} 1 = -4a + b + 3c & -3 = m_1 + 2a - 3b + c & a = -1 & m_1 = 0 \\ 1 = a - 4b - 2c & -3 = m_2 - 3a + 2b + c & b = 0 & m_2 = -5 \\ 3 = 3a - 2b - 6c & 1 = m_3 + a + b - 2c & c = -1 & m_3 = 0 \end{array}$$

Vérification pour  $\sqrt{g^{\circ}} \sqrt{g''}$ .

Il vient

$$(\omega) = (\sqrt{g^{\circ}}) + (\sqrt{g''}) = \begin{pmatrix} 100 \\ 101 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 111 \\ 001 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 011 \\ 100 \end{pmatrix},$$

$$\frac{1}{2}\omega_1 = \frac{2}{5}\pi + \frac{3}{10}\pi i, \quad \frac{1}{2}\omega_2 = -\frac{3}{5}\pi + \frac{3}{10}\pi i,$$

$$\frac{1}{2}\omega_3 = -\frac{4}{5}\pi - \frac{1}{10}\pi i,$$

$$V_1 = \int_{\text{III}}^{\text{III}} \frac{e^{\frac{11}{12}\pi i}}{e^{\frac{7}{12}\pi i}} du_1 + \int_{\text{II}}^{\text{IV}} \frac{e^{-\frac{5}{12}\pi i}}{e^{-\frac{1}{12}\pi i}} du_1 = \left[ \int_{\text{III}}^{\text{III}} e^{\frac{11}{12}\pi i} du_1 + \int_{\text{IV}}^{\text{IV}} e^{-\frac{5}{12}\pi i} du_1 \right] -$$

$$- \left[ \int_{\text{III}}^{\text{III}} e^{\frac{7}{12}\pi i} du_1 + \int_{\text{II}}^{\text{II}} e^{-\frac{1}{12}\pi i} du_1 \right] + \int_{\text{II}}^{\text{I}} du_1^{(+)} - \int_{\text{IV}}^{\text{I}} du_1^{(+)} =$$

$$= \frac{1}{20}\pi(3+i) + \frac{1}{20}\pi(3+i) - \frac{1}{20}\pi(3+i) - \frac{1}{20}\pi i(3+i) =$$

$$= \frac{1}{5}\pi - \frac{1}{10}\pi i,$$

$$V_1 = \frac{1}{5}\pi - \frac{1}{10}\pi i = \frac{2}{5}\pi + \frac{3}{10}\pi i - \frac{1}{5}\pi - \frac{2}{5}\pi i,$$

$$V_2 = \frac{1}{5}\pi - \frac{1}{10}\pi i = -\frac{3}{5}\pi + \frac{3}{10}\pi i + \frac{4}{5}\pi - \frac{2}{5}\pi i,$$

$$V_3 = -\frac{2}{5}\pi - \frac{3}{10}\pi i = -\frac{4}{5}\pi - \frac{1}{10}\pi i + \frac{2}{5}\pi - \frac{1}{5}\pi i,$$

$$\begin{array}{l|l|l} -1 = -4a + b + 3c & -2 = m_1 + 2a - 3b + c & a = 0 \quad m_1 = -5 \\ 4 = a - 4b - 2c & -2 = m_2 - 3a + 2b + c & b = -1 \quad m_2 = 0 \\ 2 = 3a - 2b - 6c & -1 = m_3 + a + b - 2c & c = 0 \quad m_3 = 0 \end{array}$$

Si  $\sqrt{x_1}, \sqrt{\xi_1}; \sqrt{x_2}, \sqrt{\xi_2}$  sont deux couples de fonctions abéliennes appartenant au même groupe, c'est-à-dire satisfaisant à la condition

$$(\sqrt{x_1 \xi_1})' = (\sqrt{x_2 \xi_2}),$$

une fonction de la forme

$$\sqrt{\Psi} = a_1 \sqrt{x_1 \xi_1} + a_2 \sqrt{x_2 \xi_2},$$

où  $a_1$  et  $a_2$  désignent des constantes, a été appelée par M. W. (p. 114) une *fonction-racine* (*Wurzelfunction*) du 2<sup>d</sup> degré et du 2<sup>d</sup> ordre. Sa caractéristique est  $(\sqrt{\Psi}) = (\sqrt{x_1 \xi_1})$  et elle possède quatre zéros du premier ordre dont un est arbitraire. Les constantes  $a_1, a_2$  peuvent être déterminées de manière que  $\sqrt{\Psi}$  s'annule en un des zéros  $\alpha, \beta$  d'une fonction abélienne  $\sqrt{q}$ , par exemple en  $\alpha$ . M. Weber démontre (p. 116 et suiv.) qu'alors les trois autres zéros  $c_1, c_2, c_3$  de cette fonction  $\sqrt{\Psi}$  sont en même temps les zéros de la fonction  $\mathcal{P}_{(\omega)} \left( \int_{\alpha}^{\zeta} du_h \right)$ , à la condition toutefois que  $(\omega) = (\sqrt{\Psi}) + (\sqrt{q})$ . Lorsque  $(\omega)$  est une caractéristique impaire,  $\sqrt{\Psi}$  dégénère en un produit de deux fonctions abéliennes aux caractéristiques  $(\sqrt{q})$  et  $(\sqrt{\Psi}) + (\sqrt{q})$ . Il s'ensuit, conformément à ce qui a été dit précédemment, qu'une fonction  $\mathcal{P}_{(\omega)} \left( \int_{\alpha}^{\zeta} du_h \right)$  impaire s'annule pour  $\zeta = \alpha$  et en outre pour les zéros de la fonction abélienne qui porte la même caractéristique.

### Détermination de $c^{\circ}_1, c^{\circ}_2, c^{\circ}_3$ .

Parmi les 36 systèmes de points  $c_1, c_2, c_3$ , répondant aux 36 caractéristiques paires, il en est un qui mérite une attention spéciale. C'est celui qui représente les zéros du  $\mathcal{P}$  fondamental  $\mathcal{P} \left( \int_{\alpha}^{\zeta} du_h \right)$ . Il correspond à  $(\omega) = \begin{pmatrix} 000 \\ 000 \end{pmatrix}$ , soit  $(\sqrt{\Psi}) = (\sqrt{q})$  et sera désigné par  $c^{\circ}_1, c^{\circ}_2, c^{\circ}_3$ . On peut le trouver de la manière suivante :