Dans la théorie des fonctions abéliennes, on a rarement l'occasion de vérifier une formule générale par le calcul direct. Aussi la saisit-on volontiers, lorsque, comme c'est ici le cas, elle se présente tout naturellement. En effet, on est maintenant en état de vérifier la formule II, p. 114 de l'ouvrage de M. Weber, à savoir

$$\left(\overset{3}{\underset{1}{h}}\left(\int_{\alpha}^{\alpha'} du_h + \int_{\beta}^{\beta'} du_h\right)\right) = \left(\frac{1}{2}\omega_1,\ \frac{1}{2}\omega_2,\ \frac{1}{2}\omega_3\right),$$

où α, β sont les zéros d'une fonction abélienne $\sqrt{x}$, α', β' les zéros d'une autre fonction abélienne $\sqrt{x'}$ et ω_1, ω_2, ω_3 un système de périodes à la caractéristique $(\omega) = (\sqrt{x}) + (\sqrt{x'})$.

Vérification pour $\sqrt{g^\circ}\ \sqrt{g}$.

Dans ce cas

$$(\omega) = (\sqrt{g^\circ}) + (\sqrt{g}) = \binom{100}{101} + \binom{011}{110} = \binom{111}{011},$$

$$\frac{1}{2}\omega_1 = \frac{1}{2}a_{11} + \frac{1}{2}a_{12} + \frac{1}{2}a_{13} = -\frac{1}{5}\pi(2-i) - \\ -\frac{\pi i}{10}(3+i) + \frac{1}{10}\pi(3+i) = 0$$

$$\frac{1}{2}\omega_2 = \frac{1}{2}a_{21} + \frac{1}{2}a_{22} + \frac{1}{2}a_{23} + \frac{1}{2}\pi i = -\frac{1}{10}\pi i(3+i) - \\ -\frac{2}{10}\pi(2-i) - \frac{1}{10}\pi(2-i) + \frac{1}{2}\pi i = -\frac{1}{2}\pi + \frac{1}{2}\pi i$$

$$\frac{1}{2}\omega_3 = \frac{1}{2}a_{31} + \frac{1}{2}a_{32} + \frac{1}{2}a_{33} + \frac{1}{2}\pi i = \frac{1}{10}\pi(3+i) - \\ -\frac{1}{10}\pi(2-i) - \frac{2}{10}\pi(3+i) + \frac{1}{2}\pi i = -\frac{1}{2}\pi + \frac{1}{2}\pi i$$

et

$$V_h = \int_{\mathrm{III}\ e^{\frac{7}{12}\pi i}}^{\mathrm{III}\ e^{-\frac{5}{12}\pi i}} du_h + \int_{\mathrm{II}\ e^{-\frac{1}{12}\pi i}}^{\mathrm{II}\ e^{\frac{11}{12}\pi i}} du_h.$$

Or, il est à remarquer qu'il ne serait pas exact d'écrire

$$\int_{\mathrm{III}\, e^{\frac{7}{12}\pi i}}^{\mathrm{III}\, e^{-\frac{5}{12}\pi i}} = \int_{\mathrm{III}\, 0}^{e^{-\frac{5}{12}\pi i}} - \int_{\mathrm{III}\, 0}^{e^{\frac{7}{12}\pi i}},$$

vu que les limites inférieures, 0, dans la surface de Riemann adoptée, ne coïncident pas, mais sont séparées par des lignes de passage. Cette remarque s'applique également à $\int_{\mathrm{II}\, e^{-\frac{1}{12}\pi i}}^{\mathrm{II}\, e^{\frac{11}{12}\pi i}} du_h$ et, en général, à toutes les intégrales de ce genre. Voici comment on peut procéder. On fera décrire à la variable z une ligne continue, partant de la limite inférieure $e^{\frac{7}{12}\pi i}$ dans la 3^{me} nappe et allant d'abord jusqu'à 0, puis de 0 à $+1$. Arrivé en $+1$, z contournera ce point un certain nombre de fois jusqu'à ce qu'il arrive dans la nappe voulue, ce qui est permis, attendu que les intégrales relatives à ces courbes infiniment petites sont négligeables. Ensuite z ira de $+1$ à 0 et enfin de 0 à la limite supérieure $e^{-\frac{5}{12}\pi i}$. De cette manière on obtient

$$V_1 = \int_{\mathrm{III}\, e^{\frac{7}{12}\pi i}}^{0} du_1 + \int_{\mathrm{IV}\, 0}^{1} du_1^{(-)} + \int_{\mathrm{III}\, 1}^{0} du_1^{(+)} + \int_{\mathrm{III}\, 0}^{e^{-\frac{5}{12}\pi i}} du_1 +$$

$$+ \int_{\mathrm{II}\, e^{-\frac{1}{12}\pi i}}^{0} du_1 + \int_{\mathrm{II}\, 0}^{1} du_1^{(+)} + \int_{\mathrm{III}\, 1}^{0} du_1^{(-)} + \int_{\mathrm{II}\, 0}^{e^{\frac{11}{12}\pi i}} du_1 =$$

$$= [\int_{\mathrm{III}\, 0}^{e^{-\frac{5}{12}\pi i}} du_1 + \int_{\mathrm{II}\, 0}^{e^{\frac{11}{12}\pi i}} du_1] - [\int_{\mathrm{III}\, 0}^{e^{\frac{7}{12}\pi i}} du_1 + \int_{\mathrm{II}\, 0}^{e^{-\frac{1}{12}\pi i}} du_1] +$$

$$+ \int_{\mathrm{IV}\, 0}^{1} du_1^{(-)} - \int_{\mathrm{III}\, 0}^{1} du_1^{(+)} + \int_{\mathrm{II}\, 0}^{1} du_1^{(+)} - \int_{\mathrm{III}\, 0}^{1} du_1^{(-)} =$$

$$= -\frac{1}{20}\pi i(7-i) + \frac{1}{20}\pi(3+i) + 0 - \frac{1}{10}\pi(2-i) -$$

$$-\frac{1}{20}\pi(3+i) - \frac{1}{20}\pi i(3+i) = -\frac{1}{5}\pi - \frac{2}{5}\pi i$$

et de même

$$V_2 = \frac{3}{10}\pi - \frac{9}{10}\pi i, \qquad V_3 = -\frac{1}{10}\pi + \frac{3}{10}\pi i.$$

Les valeurs trouvées peuvent s'écrire

$$\begin{aligned} V_1 &= \underline{-\frac{1}{5}\pi - \frac{2}{5}\pi i}, \\ V_2 &= -\frac{1}{2}\pi + \frac{1}{2}\pi i \; \underline{+\frac{4}{5}\pi - \frac{7}{5}\pi i}, \\ V_3 &= -\frac{1}{2}\pi + \frac{1}{2}\pi i \; \underline{+\frac{2}{5}\pi - \frac{1}{5}\pi i}. \end{aligned}$$

La formule en question est vérifiée si dans les trois intégrales les expressions soulignées forment un système de périodes. On peut donc poser, en supprimant le facteur π

$$-\frac{1}{5} - \frac{2}{5} i = m_1 i + \frac{1}{\pi}(a a_{11} + b a_{12} + c a_{13}) =$$
$$= m_1 i - \frac{2}{5}(2-i)\,a - \frac{1}{5} i (3+i)\,b + \frac{1}{5}(3+i)\,c,$$

$$\frac{4}{5} - \frac{7}{5} i = m_2 i + \frac{1}{\pi}(a a_{21} + b a_{22} + c a_{23}) =$$
$$= m_2 i - \frac{1}{5} i (3+i)\,a - \frac{2}{5}(2-i)\,b - \frac{1}{5}(2-i)\,c,$$

$$\frac{2}{5} - \frac{1}{5} i = m_3 i + \frac{1}{\pi}(a a_{31} + b a_{32} + c a_{33}) =$$
$$= m_3 i + \frac{1}{5}(3+i)\,a - \frac{1}{5}(2-i)\,b - \frac{2}{5}(3+i)\,c.$$

Les nombres entiers a, b, c, m_1, m_2, m_3 doivent satisfaire aux six équations résultant de la séparation des parties réelles et imaginaires qui, après multiplication par 5, prennent la forme

$$\left.\begin{aligned} -1 &= -4a + b + 3c \\ 4 &= a - 4b - 2c \\ 2 &= 3a - 2b - 6c \end{aligned}\;\right|\; \begin{aligned} -2 &= m_1 + 2a - 3b + c, \\ -7 &= m_2 - 3a + 2b + c, \\ -1 &= m_3 + a + b - 2c. \end{aligned}$$

On en tire

$$a = 0, \quad b = -1, \quad c = 0,$$
$$m_1 = -5, \quad m_2 = -5, \quad m_3 = 0.$$

Vérification pour $\sqrt{g^\circ}\sqrt{g'}$.

On trouve successivement

$$(\omega) = (\sqrt{g^\circ}) + (\sqrt{g'}) = \binom{100}{101} + \binom{011}{001} = \binom{111}{100},$$

$$\frac{1}{2}\omega_1 = \frac{1}{2}\pi i, \quad \frac{1}{2}\omega_2 = -\frac{1}{2}\pi, \quad \frac{1}{2}\omega_3 = -\frac{1}{2}\pi,$$

$$\mathrm{V}_1 = \int_{\mathrm{II}\; e^{-\frac{1}{12}\pi i}}^{\mathrm{IV}\; e^{\frac{7}{12}\pi i}} du_1 + \int_{\mathrm{III}\; e^{\frac{7}{12}\pi i}}^{\mathrm{III}\; e^{-\frac{1}{12}\pi i}} du_1 = [\int_{\mathrm{IV}\; 0}^{e^{\frac{7}{12}\pi i}} du_1 + \int_{\mathrm{III}\; 0}^{e^{-\frac{1}{12}\pi i}} du_1] -$$

$$-[\int_{\mathrm{II}\; 0}^{e^{-\frac{1}{12}\pi i}} du_1 + \int_{\mathrm{III}\; 0}^{e^{\frac{7}{12}\pi i}} du_1] + \int_{\mathrm{IV}\; 0}^{1} du_1^{(-)} - \int_{\mathrm{III}\; 0}^{1} du_1^{(+)} =$$

$$= \frac{1}{4}\pi(1-i) + \frac{1}{20}\pi(3+i) + 0 - \frac{1}{10}\pi(2-i) = \frac{1}{5}\pi - \frac{1}{10}\pi i,$$

$$\mathrm{V}_1 = \frac{1}{5}\pi - \frac{1}{10}\pi i = \frac{1}{2}\pi i + \underline{\frac{1}{5}\pi - \frac{3}{5}\pi i},$$

$$\mathrm{V}_2 = -\frac{3}{10}\pi - \frac{3}{5}\pi i = -\frac{1}{2}\pi + \underline{\frac{1}{5}\pi - \frac{3}{5}\pi i},$$

$$\mathrm{V}_3 = \frac{1}{10}\pi + \frac{1}{5}\pi i = -\frac{1}{2}\pi + \underline{\frac{3}{5}\pi + \frac{1}{5}\pi i},$$

$1 = -4a + b + 3c$	$-3 = m_1 + 2a - 3b + c$	$a = -1$	$m_1 = 0$
$1 = a - 4b - 2c$	$-3 = m_2 - 3a + 2b + c$	$b = 0$	$m_2 = -5$
$3 = 3a - 2b - 6c$	$1 = m_3 + a + b - 2c$	$c = -1$	$m_3 = 0$

Vérification pour $\sqrt{g^\circ}\sqrt{g''}$.

Il vient

$$(\omega)=(\sqrt{g^\circ})+(\sqrt{g''})=\binom{100}{101}+\binom{111}{001}=\binom{011}{100},$$

$$\frac{1}{2}\omega_1=\frac{2}{5}\pi+\frac{3}{10}\pi i,\ \frac{1}{2}\omega_2=-\frac{3}{5}\pi+\frac{3}{10}\pi i,$$

$$\frac{1}{2}\omega_3==-\frac{4}{5}\pi-\frac{1}{10}\pi i,$$

$$V_1=\int_{\text{III}\ e^{\frac{7}{12}\pi i}}^{\text{III}\ e^{\frac{11}{12}\pi i}}du_1+\int_{\text{II}\ e^{-\frac{1}{12}\pi i}}^{\text{IV}\ e^{-\frac{5}{12}\pi i}}du_1=\Big[\int_{\text{III}\ 0}^{e^{\frac{11}{12}\pi i}}du_1+\int_{\text{IV}\ 0}^{e^{-\frac{5}{12}\pi i}}du_1\Big]-$$

$$-\Big[\int_{\text{III}\ 0}^{e^{\frac{7}{12}\pi i}}du_1+\int_{\text{II}\ 0}^{e^{-\frac{1}{12}\pi i}}du_1\Big]+\int_{\text{II}\ 0}^{1}du_1^{(+)}-\int_{\text{IV}\ 0}^{1}du_1^{(+)}=$$

$$=\frac{1}{20}\pi(3+i)+\frac{1}{20}\pi(3+i)-\frac{1}{20}\pi(3+i)-\frac{1}{20}\pi i(3+i)=$$

$$=\frac{1}{5}\pi-\frac{1}{10}\pi i,$$

$$V_1=\frac{1}{5}\pi-\frac{1}{10}\pi i=\frac{2}{5}\pi+\frac{3}{10}\pi i-\underline{\frac{1}{5}\pi-\frac{2}{5}\pi i},$$

$$V_2=\frac{1}{5}\pi-\frac{1}{10}\pi i=-\frac{3}{5}\pi+\frac{3}{10}\pi i+\underline{\frac{4}{5}\pi-\frac{2}{5}\pi i},$$

$$V_3=-\frac{2}{5}\pi-\frac{3}{10}\pi i=-\frac{4}{5}\pi-\frac{1}{10}\pi i+\underline{\frac{2}{5}\pi-\frac{1}{5}\pi i},$$

$$\begin{array}{l|l|l|l}
-1=-4a+b+3c & -2=m_1+2a-3b+c & a=0 & m_1=-5\\
4=a-4b-2c & -2=m_2-3a+2b+c & b=-1 & m_2=0\\
2=3a-2b-6c & -1=m_3+a+b-2c & c=0 & m_3=0
\end{array}$$

Si $\sqrt{x_1}$, $\sqrt{\xi_1}$; $\sqrt{x_2}$, $\sqrt{\xi_2}$ sont deux couples de fonctions abéliennes appartenant au même groupe, c'est-à-dire satisfaisant à la condition

$$(\sqrt{x_1 \xi_1}) = (\sqrt{x_2 \xi_2}),$$

une fonction de la forme

$$\sqrt{\Psi} = a_1 \sqrt{x_1 \xi_1} + a_2 \sqrt{x_2 \xi_2},$$

où a_1 et a_2 désignent des constantes, a été appelée par M. W. (p. 114) une *fonction-racine (Wurzelfunction)* du 2^d^ degré et du 2^d^ ordre. Sa caractéristique est $(\sqrt{\Psi}) = (\sqrt{x_1 \xi_1})$ et elle possède quatre zéros du premier ordre dont un est arbitraire. Les constantes a_1, a_2 peuvent être déterminées de manière que $\sqrt{\Psi}$ s'annule en un des zéros α, β d'une fonction abélienne $\sqrt{q}$, par exemple en α. M. Weber démontre (p. 116 et suiv.) qu'alors les trois autres zéros c_1, c_2, c_3 de cette fonction $\sqrt{\Psi}$ sont en même temps les zéros de la fonction $\vartheta_{(\omega)}\left(\int_\alpha^\zeta du_h\right)$, à la condition toutefois que $(\omega) = (\sqrt{\Psi}) + (\sqrt{q})$. Lorsque (ω) est une caractéristique impaire, $\sqrt{\Psi}$ dégénère en un produit de deux fonctions abéliennes aux caractéristiques $(\sqrt{q})$ et $(\sqrt{\Psi}) + (\sqrt{q})$. Il s'ensuit, conformément à ce qui a été dit précédemment, qu'une fonction $\vartheta_{(\omega)}\left(\int_\alpha^\zeta du_h\right)$ impaire s'annule pour $\zeta = \alpha$ et en outre pour les zéros de la fonction abélienne qui porte la même caractéristique.

Détermination de c^0_1, c^0_2, c^0_3.

Parmi les 36 systèmes de points c_1, c_2, c_3, répondant aux 36 caractéristiques paires, il en est un qui mérite une attention spéciale. C'est celui qui représente les zéros du ϑ fondamental $\vartheta\left(\int_\alpha^\zeta du_h\right)$. Il correspond à $(\omega) = \binom{000}{000}$, soit $(\sqrt{\Psi}) = (\sqrt{q})$ et sera désigné par c^0_1, c^0_2, c^0_3. On peut le trouver de la manière suivante :