

**Zeitschrift:** Bulletin de la Société Vaudoise des Sciences Naturelles  
**Herausgeber:** Société Vaudoise des Sciences Naturelles  
**Band:** 24 (1888)  
**Heft:** 99

**Artikel:** Fonctions abéliennes du genre 3 : un cas particulier  
**Autor:** Amstein, H.  
**Kapitel:** Valeur numérique de quelques intégrales normales  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-261785>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 12.01.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

on obtient 
$$\frac{1}{2}W_2 = - \int_0^1 \frac{\zeta d\zeta}{\sqrt[4]{(1-\zeta^4)^3}} = -K_2.$$

c) 
$$\frac{1}{2}W_3 = \int_{II_0}^{-\varepsilon'\infty} \frac{dz}{\sqrt{1-z^4}} = - \int_0^{-\varepsilon'\infty} \frac{dz}{\sqrt{1-z^4}} = \varepsilon' \int_0^\infty \frac{dz}{\sqrt{1+z^4}} =$$
  

$$= \varepsilon' K_4 = (1-i)K_3.$$

D'une manière analogue, on trouve aisément :

Pour les zéros de  $\sqrt{\xi_6}$  : 
$$\frac{1}{2}W_1 = \int_0^{\varepsilon\infty} dw_1 = -\frac{1-i}{2}K_1,$$

$$\frac{1}{2}W_2 = \int_0^{\varepsilon\infty} dw_2 = -K_2, \quad \frac{1}{2}W_3 = \int_0^{\varepsilon\infty} dw_3 = -(1+i)K_3.$$

Pour les zéros de  $\sqrt{x_5}$  : 
$$\frac{1}{2}W_1 = \int_0^{\varepsilon'\infty} dw_1 = -\frac{1+i}{2}K_1,$$

$$\frac{1}{2}W_2 = \int_0^{\varepsilon'\infty} dw_2 = -K_2, \quad \frac{1}{2}W_3 = \int_0^{\varepsilon'\infty} dw_3 = -(1-i)K_3.$$

Pour les zéros de  $\sqrt{x_6}$  : 
$$\frac{1}{2}W_1 = \int_0^{-\varepsilon\infty} dw_1 = \frac{1-i}{2}K_1,$$

$$\frac{1}{2}W_2 = \int_0^{-\varepsilon\infty} dw_2 = -K_2, \quad \frac{1}{2}W_3 = \int_0^{-\varepsilon\infty} dw_3 = (1+i)K_3.$$


---

### Valeur numérique de quelques intégrales normales.

A l'aide des formules

$$\left\{ \begin{array}{l} u_1 = \frac{\pi(2-i)}{20} \left[ -2 \frac{w_1}{K_1} + \frac{w_2}{K_2} + \frac{w_3}{K_3} \right], \\ u_2 = \frac{\pi(1-3i)}{20} \left[ \frac{w_1}{K_1} - i \frac{w_2}{K_2} + \frac{1+i}{2} \frac{w_3}{K_3} \right], \\ u_3 = \frac{\pi(3+i)}{20} \left[ \frac{w_1}{K_1} - (1-i) \frac{w_2}{K_2} + \frac{1+i}{2} \frac{w_3}{K_3} \right] \end{array} \right.$$

(comp. p. 115) et du tableau p. 110 on construit sans difficulté le

tableau suivant, ne contenant que celles des intégrales dont il sera fait usage ultérieurement :

Nappes.	$\int_0^1 du_1^{(+)}$	$\int_0^1 du_2^{(+)}$	$\int_0^1 du_3^{(+)}$
I	0	$-\frac{\pi i}{4}$	$\frac{\pi i}{4}$
II	$-\frac{\pi}{20}(3+i)$	$\frac{\pi}{20}(2-i)$	$-\frac{\pi}{20}(4+3i)$
III	$\frac{\pi}{10}(2-i)$	$\frac{\pi}{20}(4+3i)$	$\frac{\pi}{20}(2-i)$
IV	$\frac{\pi i}{20}(3+i)$	$-\frac{3}{20}\pi(2-i)$	$\frac{\pi}{20}(2-i)$
Nappes.	$\int_0^1 du_1^{(-)}$	$\int_0^1 du_2^{(-)}$	$\int_0^1 du_3^{(-)}$
I	$-\frac{\pi}{20}(3+i)$	$\frac{\pi}{20}(2-i)$	$-\frac{\pi}{20}(4+3i)$
II	$\frac{\pi}{10}(2-i)$	$\frac{\pi}{20}(4+3i)$	$\frac{\pi}{20}(2-i)$
III	$\frac{\pi i}{20}(3+i)$	$-\frac{3}{20}\pi(2-i)$	$\frac{\pi}{20}(2-i)$
IV	0	$-\frac{\pi i}{4}$	$\frac{\pi i}{4}$

Il n'est peut-être pas sans intérêt de réunir aussi dans un tableau les valeurs numériques des sommes  $U_h$  qui sont aux intégrales  $u_h$  ce qu'étaient les  $W_h$  aux intégrales  $w_h$ . Dans ce tableau, les intégrales qui se trouvent sur une ligne horizontale ont pour limites supérieures les zéros de la fonction abélienne placée en tête de cette même ligne. Par exemple dans la pre-

mière ligne  $U_h$  signifie  $\int_{\text{III}}^0 e^{\frac{7}{12}\pi i} du_h + \int_{\text{II}}^0 e^{-\frac{4}{12}\pi i} du_h$ , dans la deuxième

$$U_h = \int_{\text{III}}^0 e^{-\frac{5}{12}\pi i} du_h + \int_{\text{II}}^0 e^{\frac{11}{12}\pi i} du_h, \text{ etc.}$$

	$U_1$	$U_2$	$U_3$
$\sqrt{g^0}$	$-\frac{\pi}{20}(3+i)$	$\frac{\pi i}{10}(2-i)$	$-\frac{\pi}{10}(2-i)$
$\sqrt{g}$	$-\frac{\pi i}{20}(7-i)$	$\frac{\pi}{10}(2-i)$	$\frac{\pi i}{10}(2-i)$
$\sqrt{g'}$	$\frac{\pi}{4}(1-i)$	0	0
$\sqrt{g''}$	$\frac{\pi}{20}(3+i)$	$\frac{\pi i}{10}(3+i)$	$-\frac{\pi}{10}(3+i)$
$\sqrt{\gamma^0_1}$	$\frac{\pi i}{20}(7-i)$	$-\frac{\pi}{10}(2-i)$	$-\frac{\pi i}{10}(2-i)$
$\sqrt{\gamma_1}$	$\frac{\pi}{20}(3+i)$	$-\frac{\pi i}{10}(2-i)$	$\frac{\pi}{10}(2-i)$
$\sqrt{\gamma'_1}$	$-\frac{\pi}{20}(3+i)$	$-\frac{\pi i}{10}(3+i)$	$\frac{\pi}{10}(3+i)$
$\sqrt{\gamma''_1}$	$-\frac{\pi}{4}(1-i)$	0	0
$\sqrt{\gamma^0_2}$	$-\frac{\pi}{4}(1+i)$	0	0
$\sqrt{\gamma_2}$	$-\frac{\pi i}{20}(3+i)$	$\frac{\pi}{10}(3+i)$	$\frac{\pi i}{10}(3+i)$
$\sqrt{\gamma'_2}$	$-\frac{\pi}{20}(7-i)$	$-\frac{\pi i}{10}(2-i)$	$\frac{\pi}{10}(2-i)$
$\sqrt{\gamma''_2}$	$\frac{\pi i}{20}(3+i)$	$\frac{\pi}{10}(2-i)$	$\frac{\pi i}{10}(2-i)$
$\sqrt{\gamma^0_3}$	$\frac{\pi i}{20}(3+i)$	$-\frac{\pi}{10}(3+i)$	$-\frac{\pi i}{10}(3+i)$
$\sqrt{\gamma_3}$	$\frac{\pi}{4}(1+i)$	0	0
$\sqrt{\gamma'_3}$	$-\frac{\pi i}{20}(3+i)$	$-\frac{\pi}{10}(2-i)$	$-\frac{\pi i}{10}(2-i)$
$\sqrt{\gamma''_3}$	$\frac{\pi}{20}(7-i)$	$\frac{\pi i}{10}(2-i)$	$-\frac{\pi}{10}(2-i)$
$\sqrt{\xi_5}$	$-\frac{\pi}{10}(4+3i)$	$\frac{3}{10}\pi(2-i)$	$\frac{\pi}{10}(8+i)$
$\sqrt{\xi_6}$	$-\frac{\pi}{10}(4+3i)$	$\frac{\pi i}{10}(2-i)$	$-\frac{\pi i}{10}(4+3i)$
$\sqrt{x_5}$	$\frac{\pi i}{2}$	$\frac{\pi i}{2}$	$-\frac{\pi i}{2}$
$\sqrt{x_6}$	$\frac{\pi i}{2}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2}$

Dans la théorie des fonctions abéliennes, on a rarement l'occasion de vérifier une formule générale par le calcul direct. Aussi la saisit-on volontiers, lorsque, comme c'est ici le cas, elle se présente tout naturellement. En effet, on est maintenant en état de vérifier la formule II, p. 114 de l'ouvrage de M. Weber, à savoir

$$\left( h_1^3 \left( \int_{\alpha}^{\alpha'} du_h + \int_{\beta}^{\beta'} du_h \right) \right) = \left( \frac{1}{2} \omega_1, \frac{1}{2} \omega_2, \frac{1}{2} \omega_3 \right),$$

où  $\alpha, \beta$  sont les zéros d'une fonction abélienne  $\sqrt{x}$ ,  $\alpha', \beta'$  les zéros d'une autre fonction abélienne  $\sqrt{x'}$  et  $\omega_1, \omega_2, \omega_3$  un système de périodes à la caractéristique  $(\omega) = (\sqrt{x}) + (\sqrt{x'})$ .

### Vérification pour $\sqrt{g^0} \sqrt{g}$ .

Dans ce cas

$$(\omega) = (\sqrt{g^0}) + (\sqrt{g}) = \begin{pmatrix} 100 \\ 101 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 011 \\ 110 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 111 \\ 011 \end{pmatrix},$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \omega_1 &= \frac{1}{2} a_{11} + \frac{1}{2} a_{12} + \frac{1}{2} a_{13} = -\frac{1}{5} \pi (2-i) - \\ &\quad - \frac{\pi i}{10} (3+i) + \frac{1}{10} \pi (3+i) = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \omega_2 &= \frac{1}{2} a_{21} + \frac{1}{2} a_{22} + \frac{1}{2} a_{23} + \frac{1}{2} \pi i = -\frac{1}{10} \pi i (3+i) - \\ &\quad - \frac{2}{10} \pi (2-i) - \frac{1}{10} \pi (2-i) + \frac{1}{2} \pi i = -\frac{1}{2} \pi + \frac{1}{2} \pi i \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \omega_3 &= \frac{1}{2} a_{31} + \frac{1}{2} a_{32} + \frac{1}{2} a_{33} + \frac{1}{2} \pi i = \frac{1}{10} \pi (3+i) - \\ &\quad - \frac{1}{10} \pi (2-i) - \frac{2}{10} \pi (3+i) + \frac{1}{2} \pi i = -\frac{1}{2} \pi + \frac{1}{2} \pi i \end{aligned}$$

et

$$V_h = \int_{\text{III}}^{\text{III}} \frac{e^{-\frac{5}{12} \pi i}}{e^{\frac{7}{12} \pi i}} du_h + \int_{\text{II}}^{\text{II}} \frac{e^{\frac{11}{12} \pi i}}{e^{-\frac{1}{12} \pi i}} du_h.$$