Zeitschrift: Bulletin de la Société Vaudoise des Sciences Naturelles

Herausgeber: Société Vaudoise des Sciences Naturelles

Band: 24 (1888)

Heft: 99

Artikel: Fonctions abéliennes du genre 3 : un cas particulier

Autor: Amstein, H.

Kapitel: Valeur numérique de quelques intégrales normales

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-261785

on obtient $$\frac{1}{2}W_2 = -\int_0^1 \frac{\zeta d\zeta}{\sqrt[4]{(1-\zeta^4)^3}} = -K_2.$$

c) $$\frac{1}{2}W_3 = \int_{\mathrm{II}\,0}^{-\varepsilon'\infty} \frac{dz}{\sqrt{1-z^4}} = -\int_0^{-\varepsilon'\infty} \frac{dz}{\sqrt{1-z^4}} = \varepsilon' \int_0^{\infty} \frac{dz}{\sqrt{1+z^4}} =$$
$$= \varepsilon' K_1 = (1-i)K_3.$$

D'une manière analogue, on trouve aisément:

Pour les zéros de $\sqrt{\xi_6}$: $\frac{1}{2}W_1 = \int_{\mathrm{I}\,0}^{\varepsilon\infty} dw_1 = -\frac{1-i}{2}K_1,$

$$\frac{1}{2}W_2 = \int_{\mathrm{I}\,0}^{\varepsilon\infty} dw_2 = -K_2,\ \frac{1}{2}W_3 = \int_{\mathrm{I}\,0}^{\varepsilon\infty} dw_3 = -(1+i)K_3.$$

Pour les zéros de $\sqrt{x_5}$: $\frac{1}{2}W_1 = \int_{\mathrm{IV}\,0}^{\varepsilon'\infty} dw_1 = -\frac{1+i}{2}K_1,$

$$\frac{1}{2}W_2 = \int_{\mathrm{IV}\,0}^{\varepsilon'\infty} dw_2 = -K_2,\ \frac{1}{2}W_3 = \int_{\mathrm{IV}\,0}^{\varepsilon'\infty} dw_3 = -(1-i)K_3.$$

Pour les zéros de $\sqrt{x_6}$: $\frac{1}{2}W_1 = \int_{\mathrm{III}\,0}^{-\varepsilon\infty} dw_1 = \frac{1-i}{2}K_1,$

$$\frac{1}{2}W_2 = \int_{\mathrm{III}\,0}^{-\varepsilon\infty} dw_2 = -K_2,\ \frac{1}{2}W_3 = \int_{\mathrm{III}\,0}^{-\varepsilon\infty} dw_3 = (1+i)K_3.$$

Valeur numérique de quelques intégrales normales.

A l'aide des formules

$$\left\{\begin{aligned} u_1 &= \frac{\pi(2-i)}{20}\left[-2\frac{w_1}{K_1} + \frac{w_2}{K_2} + \frac{w_3}{K_3}\right], \\ u_2 &= \frac{\pi(1-3i)}{20}\left[\frac{w_1}{K_1} - i\frac{w_2}{K_2} + \frac{1+i}{2}\frac{w_3}{K_3}\right], \\ u_3 &= \frac{\pi(3+i)}{20}\left[\frac{w_1}{K_1} - (1-i)\frac{w_2}{K_2} + \frac{1+i}{2}\frac{w_3}{K_3}\right] \end{aligned}\right.$$

(comp. p. 115) et du tableau p. 110 on construit sans difficulté le tableau suivant, ne contenant que celles des intégrales dont il sera fait usage ultérieurement :

Nappes.	$\int_0^1 du_1^{(+)}$	$\int_0^1 du_2^{(+)}$	$\int_0^1 du_3^{(+)}$
I	0	$-\frac{\pi i}{4}$	$\frac{\pi i}{4}$
II	$-\frac{\pi}{20}(3+i)$	$\frac{\pi}{20}(2-i)$	$-\frac{\pi}{20}(4+3i)$
III	$\frac{\pi}{10}(2-i)$	$\frac{\pi}{20}(4+3i)$	$\frac{\pi}{20}(2-i)$
IV	$\frac{\pi i}{20}(3+i)$	$-\frac{3}{20}\pi(2-i)$	$\frac{\pi}{20}(2-i)$

Nappes.	$\int_0^1 du_1^{(-)}$	$\int_0^1 du_2^{(-)}$	$\int_0^1 du_3^{(-)}$
I	$-\frac{\pi}{20}(3+i)$	$\frac{\pi}{20}(2-i)$	$-\frac{\pi}{20}(4+3i)$
II	$\frac{\pi}{10}(2-i)$	$\frac{\pi}{20}(4+3i)$	$\frac{\pi}{20}(2-i)$
III	$\frac{\pi i}{20}(3+i)$	$-\frac{3}{20}\pi(2-i)$	$\frac{\pi}{20}(2-i)$
IV	0	$-\frac{\pi i}{4}$	$\frac{\pi i}{4}$

Il n'est peut-être pas sans intérêt de réunir aussi dans un tableau les valeurs numériques des sommes U_h qui sont aux intégrales u_h ce qu'étaient les W_h aux intégrales w_h. Dans ce tableau, les intégrales qui se trouvent sur une ligne horizontale ont pour limites supérieures les zéros de la fonction abélienne placée en tête de cette même ligne. Par exemple dans la première ligne U_h signifie $\underset{\text{III}}{\int_0^{e^{\frac{7}{12}\pi i}}} du_h + \underset{\text{II}}{\int_0^{e^{-\frac{1}{12}\pi i}}} du_h$, dans la deuxième

$$U_h = \underset{\text{III}}{\int_0^{e^{-\frac{5}{12}\pi i}}} du_h + \underset{\text{II}}{\int_0^{e^{\frac{11}{12}\pi i}}} du_h, \text{ etc.}$$

	U_1	U_2	U_3
$\sqrt{g^\circ}$	$-\frac{\pi}{20}(3+i)$	$\frac{\pi i}{10}(2-i)$	$-\frac{\pi}{10}(2-i)$
$\sqrt{g}$	$-\frac{\pi i}{20}(7-i)$	$\frac{\pi}{10}(2-i)$	$\frac{\pi i}{10}(2-i)$
$\sqrt{g'}$	$\frac{\pi}{4}(1-i)$	0	0
$\sqrt{g''}$	$\frac{\pi}{20}(3+i)$	$\frac{\pi i}{10}(3+i)$	$-\frac{\pi}{10}(3+i)$
$\sqrt{\gamma^\circ_1}$	$\frac{\pi i}{20}(7-i)$	$-\frac{\pi}{10}(2-i)$	$-\frac{\pi i}{10}(2-i)$
$\sqrt{\gamma_1}$	$\frac{\pi}{20}(3+i)$	$-\frac{\pi i}{10}(2-i)$	$\frac{\pi}{10}(2-i)$
$\sqrt{\gamma'_1}$	$-\frac{\pi}{20}(3+i)$	$-\frac{\pi i}{10}(3+i)$	$\frac{\pi}{10}(3+i)$
$\sqrt{\gamma''_1}$	$-\frac{\pi}{4}(1-i)$	0	0
$\sqrt{\gamma^\circ_2}$	$-\frac{\pi}{4}(1+i)$	0	0
$\sqrt{\gamma_2}$	$-\frac{\pi i}{20}(3+i)$	$\frac{\pi}{10}(3+i)$	$\frac{\pi i}{10}(3+i)$
$\sqrt{\gamma'_2}$	$-\frac{\pi}{20}(7-i)$	$-\frac{\pi i}{10}(2-i)$	$\frac{\pi}{10}(2-i)$
$\sqrt{\gamma''_2}$	$\frac{\pi i}{20}(3+i)$	$\frac{\pi}{10}(2-i)$	$\frac{\pi i}{10}(2-i)$
$\sqrt{\gamma^\circ_3}$	$\frac{\pi i}{20}(3+i)$	$-\frac{\pi}{10}(3+i)$	$-\frac{\pi i}{10}(3+i)$
$\sqrt{\gamma_3}$	$\frac{\pi}{4}(1+i)$	0	0
$\sqrt{\gamma'_3}$	$-\frac{\pi i}{20}(3+i)$	$-\frac{\pi}{10}(2-i)$	$-\frac{\pi i}{10}(2-i)$
$\sqrt{\gamma''_3}$	$\frac{\pi}{20}(7-i)$	$\frac{\pi i}{10}(2-i)$	$-\frac{\pi}{10}(2-i)$
$\sqrt{\xi_5}$	$-\frac{\pi}{10}(4+3i)$	$\frac{3}{10}\pi(2-i)$	$\frac{\pi}{10}(8+i)$
$\sqrt{\xi_6}$	$-\frac{\pi}{10}(4+3i)$	$\frac{\pi i}{10}(2-i)$	$-\frac{\pi i}{10}(4+3i)$
$\sqrt{x_5}$	$\frac{\pi i}{2}$	$\frac{\pi i}{2}$	$-\frac{\pi i}{2}$
$\sqrt{x_6}$	$\frac{\pi i}{2}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2}$

Dans la théorie des fonctions abéliennes, on a rarement l'occasion de vérifier une formule générale par le calcul direct. Aussi la saisit-on volontiers, lorsque, comme c'est ici le cas, elle se présente tout naturellement. En effet, on est maintenant en état de vérifier la formule II, p. 114 de l'ouvrage de M. Weber, à savoir

$$\left(\overset{3}{\underset{1}{h}}\left(\int_{\alpha}^{\alpha'} du_h + \int_{\beta}^{\beta'} du_h\right)\right) = \left(\frac{1}{2}\omega_1,\ \frac{1}{2}\omega_2,\ \frac{1}{2}\omega_3\right),$$

où α, β sont les zéros d'une fonction abélienne $\sqrt{x}$, α', β' les zéros d'une autre fonction abélienne $\sqrt{x'}$ et ω_1, ω_2, ω_3 un système de périodes à la caractéristique $(\omega) = (\sqrt{x}) + (\sqrt{x'})$.

Vérification pour $\sqrt{g^\circ}\ \sqrt{g}$.

Dans ce cas

$$(\omega) = (\sqrt{g^\circ}) + (\sqrt{g}) = \binom{100}{101} + \binom{011}{110} = \binom{111}{011},$$

$$\frac{1}{2}\omega_1 = \frac{1}{2}a_{11} + \frac{1}{2}a_{12} + \frac{1}{2}a_{13} = -\frac{1}{5}\pi(2-i) - \\ -\frac{\pi i}{10}(3+i) + \frac{1}{10}\pi(3+i) = 0$$

$$\frac{1}{2}\omega_2 = \frac{1}{2}a_{21} + \frac{1}{2}a_{22} + \frac{1}{2}a_{23} + \frac{1}{2}\pi i = -\frac{1}{10}\pi i(3+i) - \\ -\frac{2}{10}\pi(2-i) - \frac{1}{10}\pi(2-i) + \frac{1}{2}\pi i = -\frac{1}{2}\pi + \frac{1}{2}\pi i$$

$$\frac{1}{2}\omega_3 = \frac{1}{2}a_{31} + \frac{1}{2}a_{32} + \frac{1}{2}a_{33} + \frac{1}{2}\pi i = \frac{1}{10}\pi(3+i) - \\ -\frac{1}{10}\pi(2-i) - \frac{2}{10}\pi(3+i) + \frac{1}{2}\pi i = -\frac{1}{2}\pi + \frac{1}{2}\pi i$$

et

$$V_h = \int_{\mathrm{III}\, e^{\frac{7}{12}\pi i}}^{\mathrm{III}\, e^{-\frac{5}{12}\pi i}} du_h + \int_{\mathrm{II}\, e^{-\frac{1}{12}\pi i}}^{\mathrm{II}\, e^{\frac{11}{12}\pi i}} du_h.$$