Zeitschrift: Bulletin de la Société Vaudoise des Sciences Naturelles
Herausgeber: Société Vaudoise des Sciences Naturelles
Band: 24 (1888)
Heft: 99

Artikel: Fonctions abéliennes du genre 3 : un cas particulier
Autor: Amstein, H.
Kapitel: Valeur numériwue de K1
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-261785

pour ramener cette intégrale elliptique à la forme normale

$$w_3 = -\frac{1}{\sqrt{2}}\int \frac{d\varphi}{\sqrt{1-\frac{1}{2}\sin^2\varphi}}.$$

On en tire

$$K_3 = \int_0^1 \frac{dz}{\sqrt{1-z^4}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-\frac{1}{2}\sin^2\varphi}} = \frac{1}{\sqrt{2}} K_1.$$

Ainsi, on vient de trouver

$$K_2 = K_3 = \frac{1}{\sqrt{2}} K_1.$$

Valeur numérique de K_1.

En vue d'une représentation qui sera faite ultérieurement, il est utile de connaître la valeur numérique de K_1. Pour la déterminer, on peut se servir de la méthode de Gauss.

Si l'on pose, pour abréger,

$$f(a, b, \varphi) = \int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{\sqrt{a^2\cos^2\varphi + b^2\sin^2\varphi}}$$

et que l'on soumette cette fonction n fois de suite à la transformation de Landen, il vient

$$f(a, b, \varphi) = \frac{1}{2} f(a_1, b_1, \varphi_1) = \frac{1}{2^2} f(a_2, b_2, \varphi_2) = \ldots$$
$$= \frac{1}{2^n} f(a_n, b_n, \varphi_n), \text{ où}$$

$$a_1 = \frac{1}{2}(a+b), \quad b_1 = \sqrt{ab}, \quad \operatorname{tg}(\varphi_1 - \varphi) = \frac{b}{a}\operatorname{tg}\varphi,$$

$$a_2 = \frac{1}{2}(a_1+b_1), \quad b_2 = \sqrt{a_1 b_1}, \quad \operatorname{tg}(\varphi_2 - \varphi_1) = \frac{b_1}{a_1}\operatorname{tg}\varphi_1,$$

$$a_3 = \frac{1}{2}(a_2+b_2), \quad b_3 = \sqrt{a_2 b_2}, \quad \operatorname{tg}(\varphi_3 - \varphi_2) = \frac{b_2}{a_2}\operatorname{tg}\varphi_2,$$

. . . .

Le calcul doit être poussé jusqu'à ce que $\lim \frac{b_n}{a_n} = 1$. Alors, si l'on écrit encore $\lim \left(\frac{\varphi_n}{2^n}\right) = \Phi$ et $\lim a_n = \lim b_n = A$, on a $f(a, b, \varphi) = \frac{\Phi}{A}$. Lorsque $\varphi = \frac{1}{2}\pi$, Φ est évidemment aussi $= \frac{1}{2}\pi$ et par conséquent

$$f\left(a, b\, \frac{1}{2}\,\pi\right) = \frac{\frac{1}{2}\pi}{A}.$$

Or, dans le cas actuel,

$$K_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - \frac{1}{2}\sin^2\varphi}} = \sqrt{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{2\cos^2\varphi + \sin^2\varphi}},$$

où

$$a = \sqrt{2} = 1,41421356, \quad b = 1,$$

on trouve successivement

$$\begin{aligned} a_1 &= 1,20710678, & b_1 &= 1,18920722, \\ a_2 &= 1,19815695, & b_2 &= 1,19812352, \\ a_3 &= 1,19814023, & b_3 &= 1,19814023. \end{aligned}$$

Il s'ensuit

$$A = 1{,}19814023, \quad K_1 = \frac{1}{2}\pi . \sqrt{2} . 0{,}83462684 = 1{,}85407468.$$

Il est intéressant de constater que les sommes

$$W_h = \int_0^\alpha dw_h + \int_0^\beta dw_h,$$

où α et β signifient les zéros d'une fonction abélienne quelconque, s'expriment d'une manière très simple au moyen des quantités K_1, K_2, K_3. A cet effet, et afin de faciliter le contrôle des calculs par la vue, on opérera la représentation du cercle des unités à l'aide des intégrales w_1, w_2, w_3. Pour mieux distinguer les différentes nappes, on tracera chaque dessin quatre fois. Dans les fig. $12^a \ldots 12^m$, pl. X, les chiffres ± 1, $\pm i$ se rapportent aux points correspondants de la surface (z). Le cercle des unités entre successivement dans chacune des quatre nappes. Si l'on exigeait que le point z restât constamment dans la même nappe, il faudrait faire intervenir les modules de périodicité des intégrales w_h; mais il n'y a aucune utilité de procéder de cette façon.

Zéros de $\sqrt{g^\circ}$.

Soit à déterminer

$$W_1 = \int_{\underset{\text{III}}{0}}^{e^{\frac{7}{12}\pi i}} dw_1 + \int_{\underset{\text{II}}{0}}^{e^{-\frac{1}{12}\pi i}} dw_1.$$

En soumettant l'intégrale w_1 à la transformation $\zeta = \varepsilon \frac{z}{s}$, on obtient l'intégrale indéfinie $\varepsilon' \int \frac{d\zeta}{\sqrt{1-\zeta^4}}$ (comp. p. 141). Dans le calcul des limites de ζ, on se servira des valeurs de s qui correspondent à $z = e^{\frac{7}{12}\pi i}$ dans la 3^{me} nappe et à $z = e^{-\frac{1}{12}\pi i}$ dans la 2^{me} nappe.

On trouve

$$\underset{\text{III}}{z} = e^{\frac{7}{12}\pi i},\ s = e^{-\frac{1}{12}\pi i},\ \zeta = e^{\frac{1}{4}\pi i + \frac{7}{12}\pi i + \frac{1}{12}\pi i} = e^{\frac{11}{12}\pi i} \text{ (Voir les fig. 2 et 3.)}$$

$$\underset{\text{II}}{z} = e^{-\frac{1}{12}\pi i},\ s = e^{\frac{7}{12}\pi i},\ \zeta = e^{\frac{1}{4}\pi i - \frac{1}{12}\pi i - \frac{7}{12}\pi i} = e^{-\frac{5}{12}\pi i}.$$

Si l'on admet, en outre, que $\sqrt{1-\zeta^4} = +1$ pour $\zeta = 0$, le signe de $\sqrt{1-\zeta^4}$ dépend de la relation

$$s^2 = \frac{1}{\sqrt{1-\zeta^4}}.$$

Or, lorsque z se meut de 0 à $e^{-\frac{1}{12}\pi i}$ dans la 2^{me} nappe, s va de i à $e^{\frac{7}{12}\pi i}$, s^2 de -1 à $e^{\frac{7}{6}\pi i}$. Sur ce parcours, la partie réelle de s^2 est négative; il s'ensuit que, dans la 2^{me} des intégrales proposées, $\sqrt{1-\zeta^4}$ affecte le signe (—). Ainsi, il vient

$$W_1 = \varepsilon'\left[\int_0^{e^{\frac{11}{12}\pi i}} \frac{d\zeta}{\sqrt{1-\zeta^4}} - \int_0^{e^{-\frac{5}{12}\pi i}} \frac{d\zeta}{\sqrt{1-\zeta^4}}\right] =$$

$$= \varepsilon'\left[\int_0^{e^{\frac{11}{12}\pi i}} \frac{d\zeta}{\sqrt{1-\zeta^4}} + \int_0^{e^{\frac{7}{12}\pi i}} \frac{d\zeta}{\sqrt{1-\zeta^4}}\right].$$

Grâce au théorème de l'addition des intégrales elliptiques de première espèce, à savoir

$$\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} + \int_0^y \frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-k^2y^2)}} =$$

$$= \int_0^c \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}},$$

où

$$c = \frac{x\sqrt{(1-y^2)(1-k^2y^2)} + y\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}{1-k^2x^2y^2}$$

on peut réduire cette somme à une seule intégrale. Dans le cas actuel

$$k^2 = -1,\ x = e^{\frac{11}{12}\pi i},\ y = e^{\frac{7}{12}\pi i},$$

$$c = \frac{e^{\frac{11}{12}\pi i}\sqrt{1-e^{\frac{7}{3}\pi i}} + e^{\frac{7}{12}\pi i}\sqrt{1-e^{\frac{11}{3}\pi i}}}{1+e^{\frac{11}{6}\pi i}e^{\frac{7}{6}\pi i}} =$$

$$= \frac{e^{\frac{11}{12}\pi i}e^{-\frac{1}{6}\pi i} + e^{\frac{7}{12}\pi i}e^{\frac{1}{6}\pi i}}{1-1} = \frac{e^{\frac{3}{4}\pi i} + e^{\frac{3}{4}\pi i}}{0} = 2\frac{e^{\frac{3}{4}\pi i}}{0},$$

en sorte que

$$W_1 = \varepsilon'\int_0^{-\varepsilon'\infty} \frac{d\zeta}{\sqrt{1-\zeta^4}}.$$

Substituant encore $\zeta = -\varepsilon' t$, il vient finalement

$$W_1 = \varepsilon'(-\varepsilon')\int_0^\infty \frac{dt}{\sqrt{1+t^4}} = i\int_0^\infty \frac{dt}{\sqrt{1+t^4}} = iK_1.$$

Observation. Dans le calcul de c, on choisira celle des deux valeurs de $\sqrt{1-e^x}$ dont la partie réelle est positive.

Soit à déterminer

$$W_2 = \int_{\text{III}\,0}^{e^{\frac{7}{12}\pi i}} dw_2 + \int_{\text{II}\,0}^{e^{-\frac{1}{24}\pi i}} dw_2.$$

Si l'on introduit s comme variable, on obtient l'intégrale indéfinie

$$w_2 = -\int \frac{ds}{\sqrt{1-s^4}}. \text{ (Comp. p. 146.)}$$

Les limites de s se trouvent comme dans le cas précédent et la relation

$$z^2 = \sqrt{1-s^4}$$

montre que, lorsque z se meut de 0 à $e^{\frac{7}{12}\pi i}$, z^2 de 0 à $e^{\frac{7}{6}\pi i}$, $\sqrt{1-s^4}$ prend le signe $(-)$.

Il s'ensuit

$$W_2 = \int_1^{e^{-\frac{1}{12}\pi i}} \frac{ds}{\sqrt{1-s^4}} - \int_i^{e^{\frac{7}{12}\pi i}} \frac{ds}{\sqrt{1-s^4}} = \int_1^{e^{-\frac{1}{12}\pi i}} \frac{ds}{\sqrt{1-s^4}} + \int_{-i}^{e^{-\frac{5}{12}\pi i}} \frac{ds}{\sqrt{1-s^4}} =$$

$$= \int_0^1 + \int_1^{e^{-\frac{1}{12}\pi i}} + \int_0^{-i} + \int_{-i}^{e^{-\frac{5}{12}\pi i}} - \int_0^1 - \int_0^{-i} =$$

$$= \int_0^{e^{-\frac{1}{12}\pi i}} + \int_0^{e^{-\frac{5}{12}\pi i}} - K_2 + iK_2.$$

L'application du théorème de l'addition aux deux premières intégrales donne

$$\int_0^{e^{-\frac{1}{12}\pi i}} + \int_0^{e^{-\frac{5}{12}\pi i}} = \varepsilon' K_1,$$

ensorte que

$$W_2 = -K_2 + iK_2 + \varepsilon' K_1 = -(1-i)\frac{K_1}{\sqrt{2}} + \frac{1-i}{\sqrt{2}}K_1 = 0.$$

Enfin, quant à la somme

$$W_3 = \int_{0\;\mathrm{III}}^{e^{\frac{7}{12}\pi i}} dw_3 + \int_{0\;\mathrm{II}}^{e^{-\frac{1}{12}\pi i}} dw_3,$$

on remarque d'abord que dans la 2ᵉ nappe, le long de l'intervalle rectiligne de 0 à $e^{-\frac{1}{12}\pi i}$, le radical $\sqrt{1-z^4}$ affecte le signe (—). Par conséquent

$$W_3 = \int_0^{e^{\frac{7}{12}\pi i}} \frac{dz}{\sqrt{1-z^4}} - \int_0^{e^{-\frac{1}{12}\pi i}} \frac{dz}{\sqrt{1-z^4}} = \int_0^{e^{\frac{7}{12}\pi i}} \frac{dz}{\sqrt{1-z^4}} + \int_0^{e^{\frac{11}{12}\pi i}} \frac{dz}{\sqrt{1-z^4}}.$$

Ensuite le théorème de l'addition fournit

$$W_3 = \int_0^{-\varepsilon'\infty} \frac{dz}{\sqrt{1-z^4}} = -\varepsilon' \int_0^{\infty} \frac{dt}{\sqrt{1+t^4}} =$$

$$= -\varepsilon' K_1 = -\frac{1-i}{\sqrt{2}}\sqrt{2}K_3 = -(1-i)K_3.$$

Les valeurs de W_1, W_2, W_3 relatives aux zéros de $\sqrt{g^\circ}$ une fois établies par le calcul direct qui vient d'être fait, les fig. 12ᵃ ... 12ᵐ permettent de reconnaître immédiatement l'exactitude des résultats suivants :

$W_1 = \quad iK_1$ pour les zéros de $\sqrt{g^\circ}$, $\sqrt{g}$, $\sqrt{\gamma^\circ_2}$, $\sqrt{\gamma_2}$

$= -K_1$ » » » » $\sqrt{g'}$, $\sqrt{g''}$, $\sqrt{\gamma'_3}$, $\sqrt{\gamma''_3}$

$= -iK_1$ » » » » $\sqrt{\gamma_1^\circ}$, $\sqrt{\gamma_1}$, $\sqrt{\gamma^\circ_3}$, $\sqrt{\gamma_3}$

$= \quad K_1$ » » » » $\sqrt{\gamma'_1}$, $\sqrt{\gamma''_1}$, $\sqrt{\gamma'_2}$, $\sqrt{\gamma''_2}$

$W_3 = -(1-i)K_3$ pour les zéros de $\sqrt{g^\circ}$, $\sqrt{g''}$, $\sqrt{\gamma^\circ_1}$, $\sqrt{\gamma''_1}$

$= \quad (1-i)K_3$ » » » » $\sqrt{g}$, $\sqrt{g'}$, $\sqrt{\gamma_1}$, $\sqrt{\gamma'_1}$

$= -(1+i)K_3$ » » » » $\sqrt{\gamma^\circ_2}$, $\sqrt{\gamma'_2}$, $\sqrt{\gamma^\circ_3}$, $\sqrt{\gamma'_3}$

$= \quad (1+i)K_3$ » » » » $\sqrt{\gamma_2}$, $\sqrt{\gamma''_2}$, $\sqrt{\gamma_3}$, $\sqrt{\gamma''_3}$

et $W_2 = 0$ pour les zéros de toutes ces 16 fonctions abéliennes.

Seules les intégrales relatives aux zéros des fonctions $\sqrt{\xi_5}, \sqrt{\xi_6}, \sqrt{x_5}, \sqrt{x_6}$ ne peuvent être traitées de cette manière sommaire. Elles ne présentent d'ailleurs aucune difficulté nouvelle.

Zéros de $\sqrt{\xi_5}$.

Soit à déterminer

$$a) \qquad \frac{1}{2}\mathrm{W}_1 = \int_{\mathrm{II}\,0}^{-\varepsilon'\infty} \frac{dz}{\sqrt[4]{(1-z^4)^3}}.$$

(On se souvient que les zéros de chacune des fonctions $\sqrt{\xi_5}, \sqrt{\xi_6}, \sqrt{x_5}, \sqrt{x_6}$ se confondent). Réduisant d'abord à la 1[re] nappe, il vient

$$\frac{1}{2}\mathrm{W}_1 = -i\int_0^{-\varepsilon'\infty} \frac{dz}{\sqrt[4]{(1-z^4)^3}} = i\varepsilon'\int_0^{\infty} \frac{dz}{\sqrt[4]{(1+z^4)^3}};$$

posant ensuite

$$z = \frac{\zeta}{\sqrt[4]{1-\zeta^4}}, \quad dz = \frac{d\zeta}{(1-\zeta^4)^{\frac{5}{4}}},$$

cette intégrale prend la forme

$$i\varepsilon'\int_0^1 \frac{d\zeta}{\sqrt{1-\zeta^4}},$$

ensorte que

$$\frac{1}{2}\mathrm{W}_1 = i\varepsilon'\mathrm{K}_3 = \varepsilon\mathrm{K}_3 = \frac{1+i}{2}\mathrm{K}_1.$$

$$b) \frac{1}{2}\mathrm{W}_2 = \int_{\mathrm{II}\,0}^{-\varepsilon'\infty} \frac{zdz}{\sqrt[4]{(1-z^4)^3}} = -i\int_0^{-\varepsilon'\infty} \frac{zdz}{\sqrt[4]{(1-z^4)^3}} = -\int_0^{\infty} \frac{zdz}{\sqrt[4]{(1+z^4)^3}}$$

Substituant

$$z = \frac{\zeta}{\sqrt[4]{1-\zeta^4}}$$

on obtient $$\frac{1}{2}W_2 = -\int_0^1 \frac{\zeta\, d\zeta}{\sqrt[4]{(1-\zeta^4)^3}} = -K_2.$$

c) $$\frac{1}{2}W_3 = \underset{\mathrm{II}}{\int_0^{-\varepsilon'\infty}} \frac{dz}{\sqrt{1-z^4}} = -\int_0^{-\varepsilon'\infty} \frac{dz}{\sqrt{1-z^4}} = \varepsilon' \int_0^{\infty} \frac{dz}{\sqrt{1+z^4}} =$$
$$= \varepsilon' K_1 = (1-i)K_3.$$

D'une manière analogue, on trouve aisément:

Pour les zéros de $\sqrt{\xi_6}$: $\frac{1}{2}W_1 = \underset{\mathrm{I}}{\int_0^{\varepsilon\infty}} dw_1 = -\frac{1-i}{2}K_1,$

$$\frac{1}{2}W_2 = \underset{\mathrm{I}}{\int_0^{\varepsilon\infty}} dw_2 = -K_2, \quad \frac{1}{2}W_3 = \underset{\mathrm{I}}{\int_0^{\varepsilon\infty}} dw_3 = -(1+i)K_3.$$

Pour les zéros de $\sqrt{x_5}$: $\frac{1}{2}W_1 = \underset{\mathrm{IV}}{\int_0^{\varepsilon'\infty}} dw_1 = -\frac{1+i}{2}K_1,$

$$\frac{1}{2}W_2 = \underset{\mathrm{IV}}{\int_0^{\varepsilon'\infty}} dw_2 = -K_2, \quad \frac{1}{2}W_3 = \underset{\mathrm{IV}}{\int_0^{\varepsilon'\infty}} dw_3 = -(1-i)K_3.$$

Pour les zéros de $\sqrt{x_6}$: $\frac{1}{2}W_1 = \underset{\mathrm{III}}{\int_0^{-\varepsilon\infty}} dw_1 = \quad \frac{1-i}{2}K_1,$

$$\frac{1}{2}W_2 = \underset{\mathrm{III}}{\int_0^{-\varepsilon\infty}} dw_2 = -K_2, \quad \frac{1}{2}W_3 = \underset{\mathrm{III}}{\int_0^{-\varepsilon\infty}} dw_3 = (1+i)K_3.$$

Valeur numérique de quelques intégrales normales.

A l'aide des formules

$$\left\{\begin{aligned} u_1 &= \frac{\pi(2-i)}{20}\left[-2\frac{w_1}{K_1} + \frac{w_2}{K_2} + \frac{w_3}{K_3}\right], \\ u_2 &= \frac{\pi(1-3i)}{20}\left[\frac{w_1}{K_1} - i\,\frac{w_2}{K_2} + \frac{1+i}{2}\,\frac{w_3}{K_3}\right], \\ u_3 &= \frac{\pi(3+i)}{20}\left[\frac{w_1}{K_1} - (1-i)\frac{w_2}{K_2} + \frac{1+i}{2}\,\frac{w_3}{K_3}\right] \end{aligned}\right.$$

(comp. p. 115) et du tableau p. 110 on construit sans difficulté le